# 最短経路問題
# Shortest Path Problem

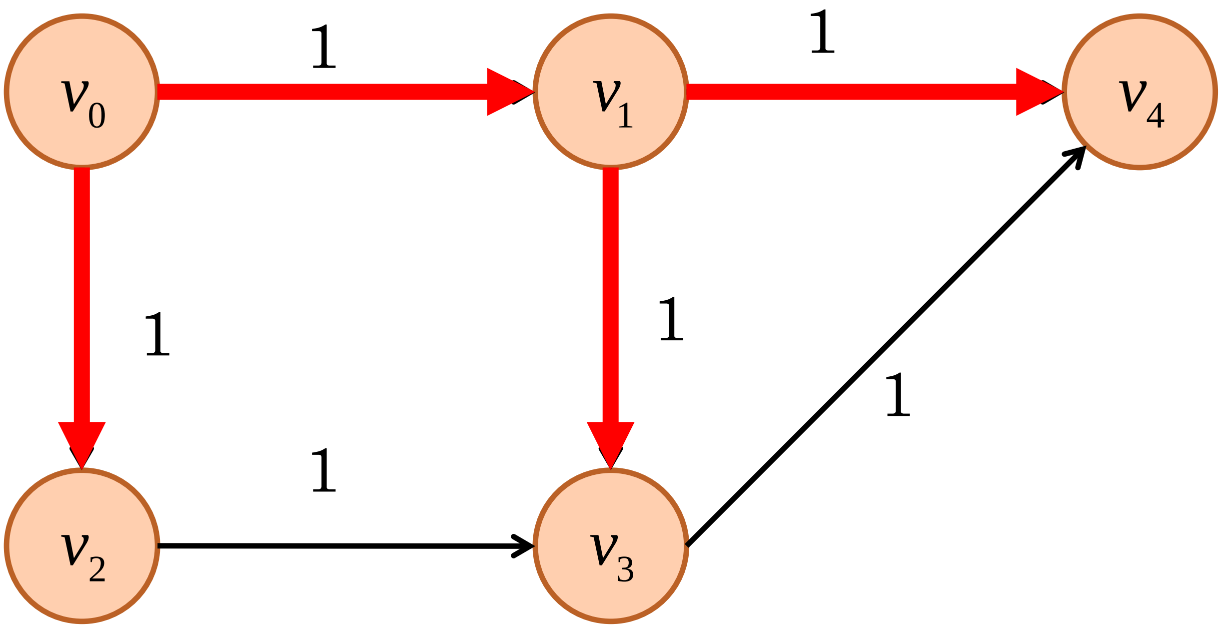
2016年度

担当:只木進一(工学系研究科)

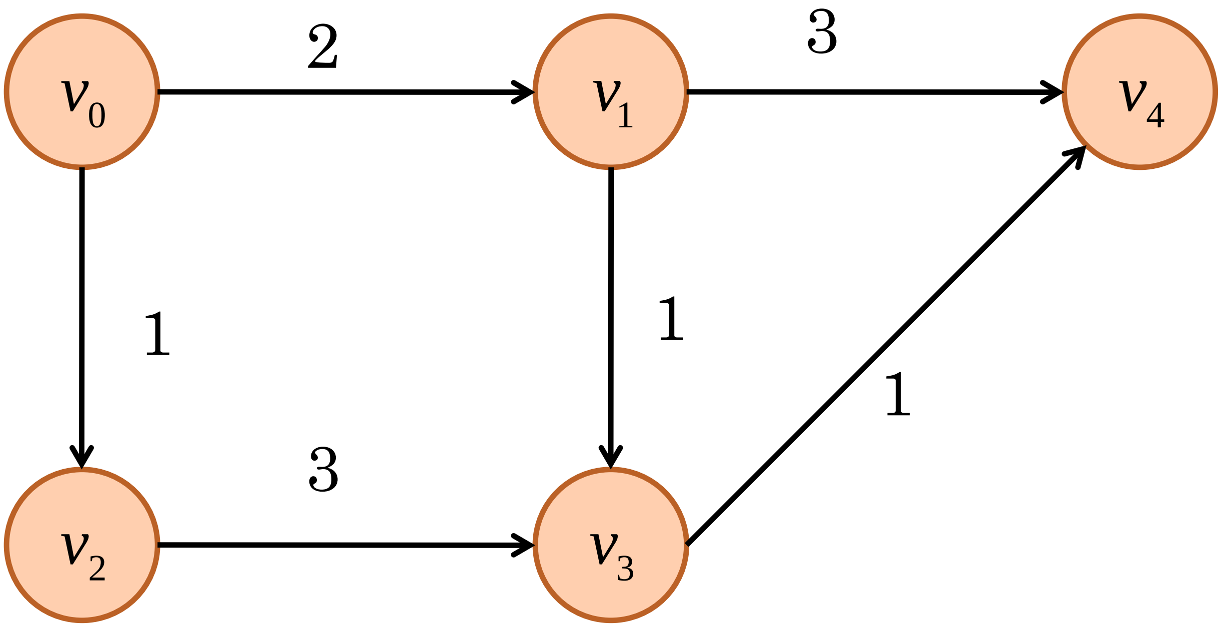
# 最短経路問題とは

- 有向ネットワーク
  - 各弧に距離やコスト(正の実数)が定義されている
- 始点から終点までの最短有向道を見つける
  - 弧の向きがそろった道
- 距離・コストの組み合わせ最適化問題

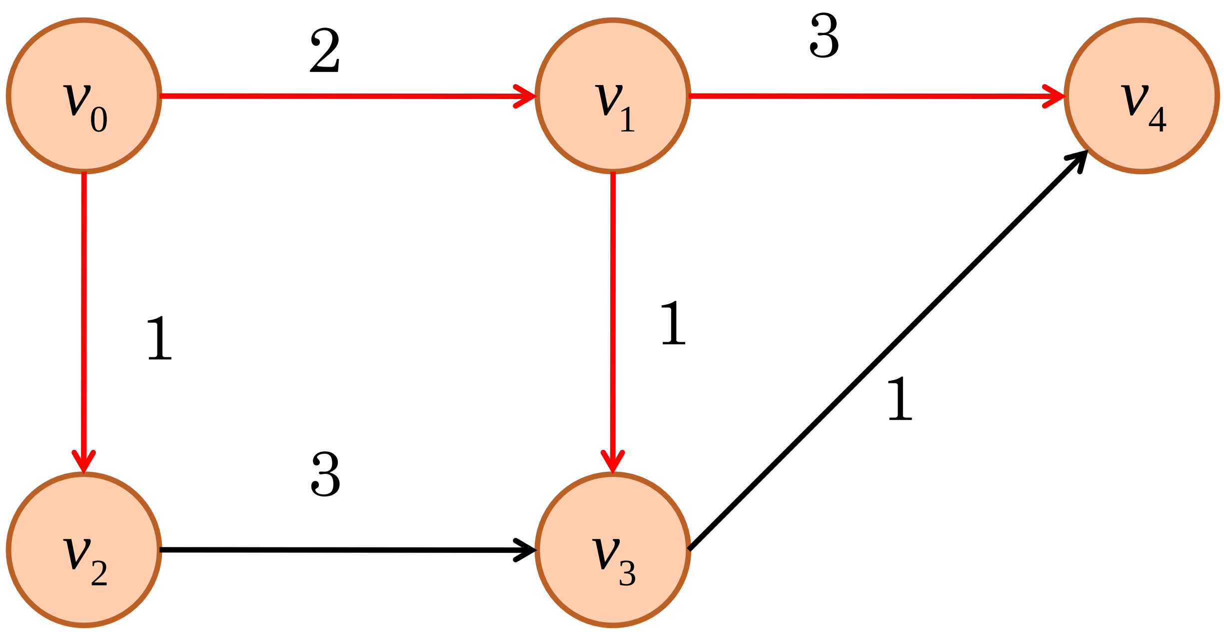
# すべての弧の距離が同じならば幅優先探索で十分



# 幅優先探索ではダメな理由



# 幅優先探索では



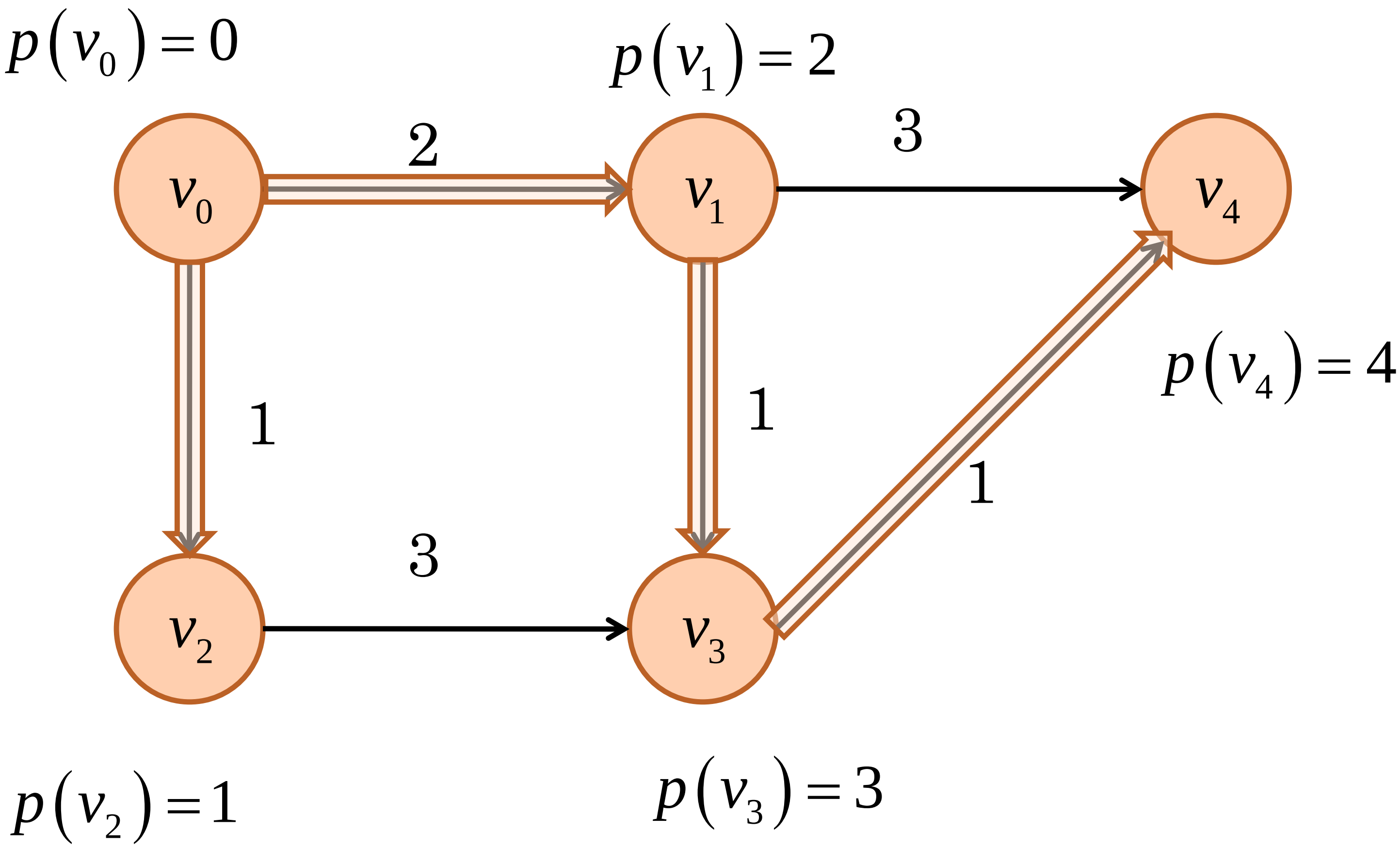

- $v_4$ への経路が$v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow v_4$となり、距離が5となってしまう
- しかし、経路$v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow v_3 \rightarrow v_4$のほうが距離4となって短い
- 頂点の移動数が多くても、距離の短い道がある

## 準備：ポテンシャル $p: V \rightarrow R$

- 一般には、各頂点に定義された実数値
- 始点からの「高さ」(距離)をイメージする
- 最短の経路に沿った距離に対応

- ポテンシャル(potential)→位置エネルギー
  - 経路（どうやってそこまで持ち上げたか）に依らない

# ポテンシャルの例



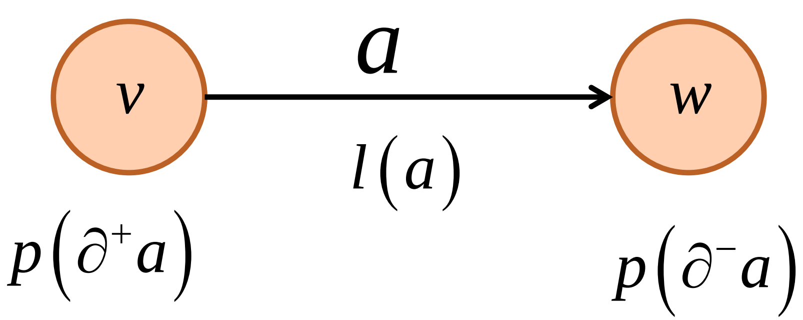

最短経路

# 関数$l_p: A \to R$

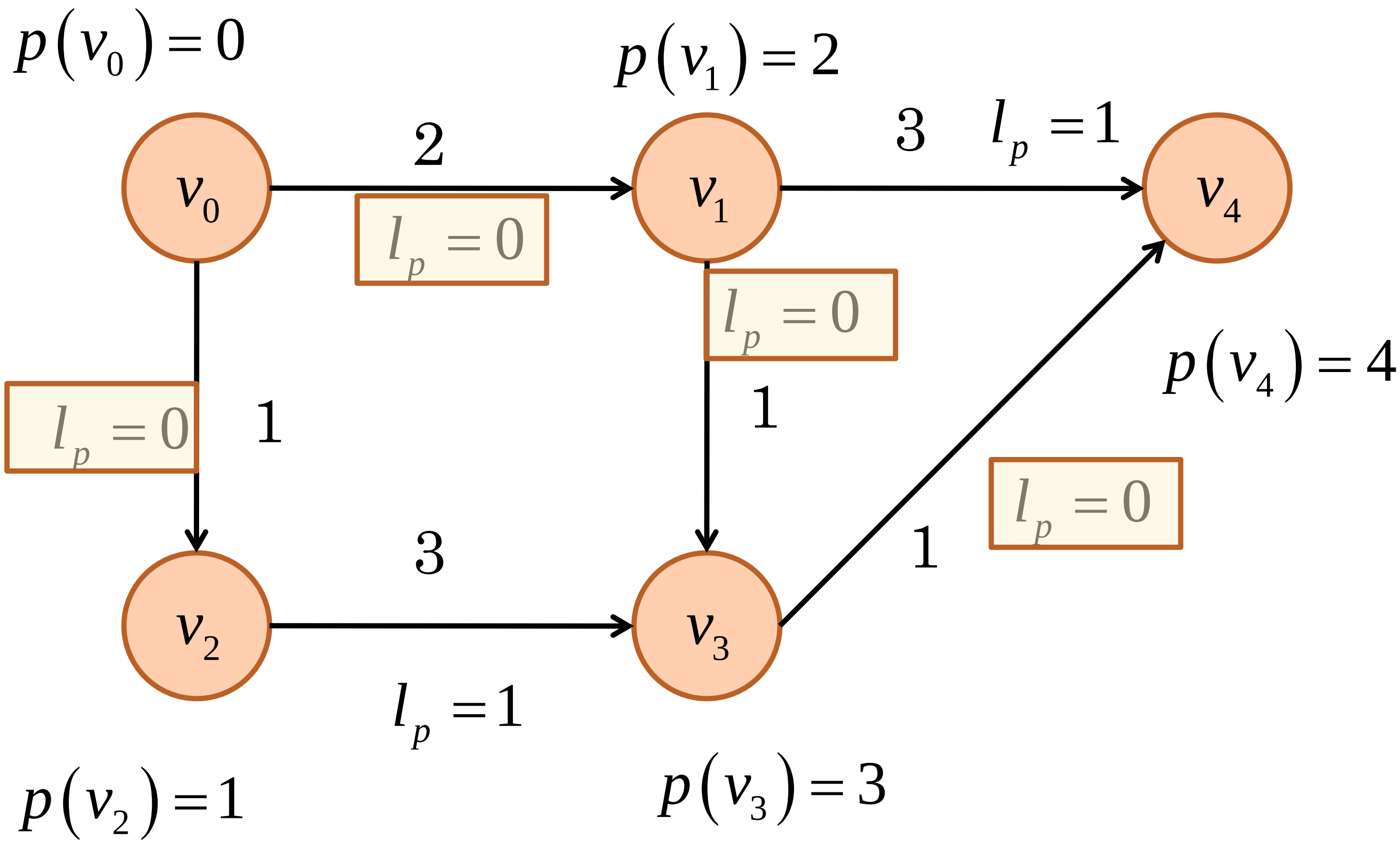
- 弧$a$の長さ(距離):$l(a)$
- 弧の始点(終点)のポテンシャル:$p(\partial^{\pm}a)$

$$l_p(a) = l(a) + p(\partial^{+}a) - p(\partial^{-}a)$$

- ポテンシャルの差と$l(a)$とのずれ



# 例




最短経路に沿って$l_p = 0$

# 有向道に沿って拡張

- 頂点$u$ から 頂点$v$ へ向かう有向道 $P$ に対して以下が成り立つ

$$l_p(P) = l(P) + p(u) - p(v)$$

$$l_p(P) \equiv \sum_{a \in P} l_p(a)$$

$$l(P) \equiv \sum_{a \in P} l(a)$$

# 有向道に沿った例

$$P = \{u = v_0, a_1, v_1, a_2, \ldots, a_k, v_k = v\}$$

$$\begin{aligned} l_p(P) &= \sum_{a \in P} l_p(a) = \sum_{i=1}^{k} l_p(a_i) \\ &= \sum_{i=1}^{k} \left[ l(a_i) + p(v_{i-1}) - p(v_i) \right] \\ &= \sum_{i=1}^{k} l(a_i) + p(u) - p(v) \\ &= l(P) + p(u) - p(v) \end{aligned}$$

- 関数$l_p: A \to R$が非負関数であり、道$P$上の各弧$a$において、$l_p(a) = 0$のとき、$P$は$u$から$v$への最短経路となる。
- 最短経路でない弧に対しては、$l_p(a) > 0$

- 始点$u$と終点$v$任意の道$P$に対して、その経路長の下限は、$p(u)-p(v)$である。

$$l(P)=p(u)-p(v)+l_p(P)\geq p(u)-p(v)$$

- このようなポテンシャル（可能な道のうち最小値を与える）を構成することが課題となる。

# ダイクストラ(Dijkstra)法

- $l(a) > 0$ の場合を考える
- グラフ $G$ は単純(並列弧が無い)と仮定する

- $U \subseteq V$ : 始点$v_0$からの有向道が見つかっているが、距離が確定していない頂点の集合
- $W \subseteq V$ : 始点$v_0$からの有向道が見つかり、距離が確定した頂点の集合
- $p(v) \in R$ : 始点$v_0$からの頂点$v$への経路に沿った距離
- $q(v) \in V$ : 最短経路を頂点$v$から逆にたどる際の頂点$v$の直前の頂点

# DIJKSTRA法：初期化

$$U = \{v_0\}$$

$$W = \varnothing$$

$$p(v_0) = 0$$

$$p(u) = +\infty \left(\forall u \in V \setminus \{v_0\}\right)$$

$$q(v) = \mathrm{NULL}\left(\forall v \in V\right)$$

$U$を$p(w)$によるヒープとして実装すると効率的

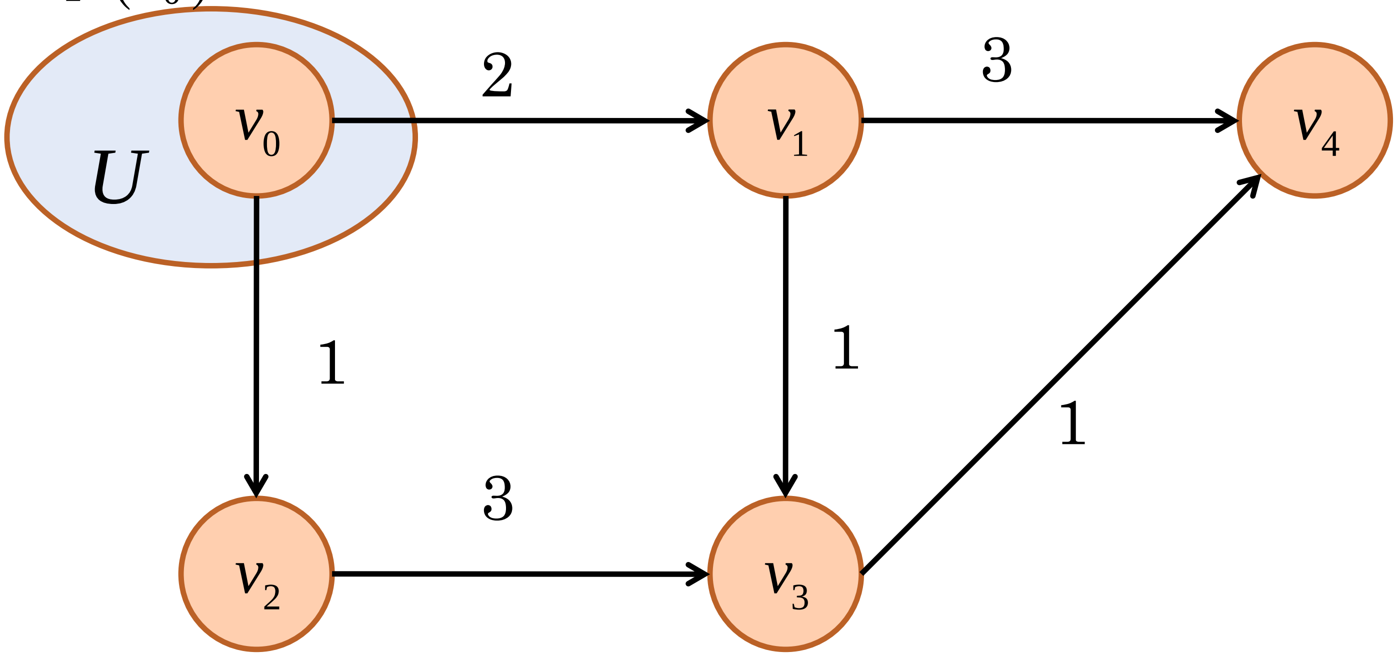
# DIJKSTRA法：アルゴリズム

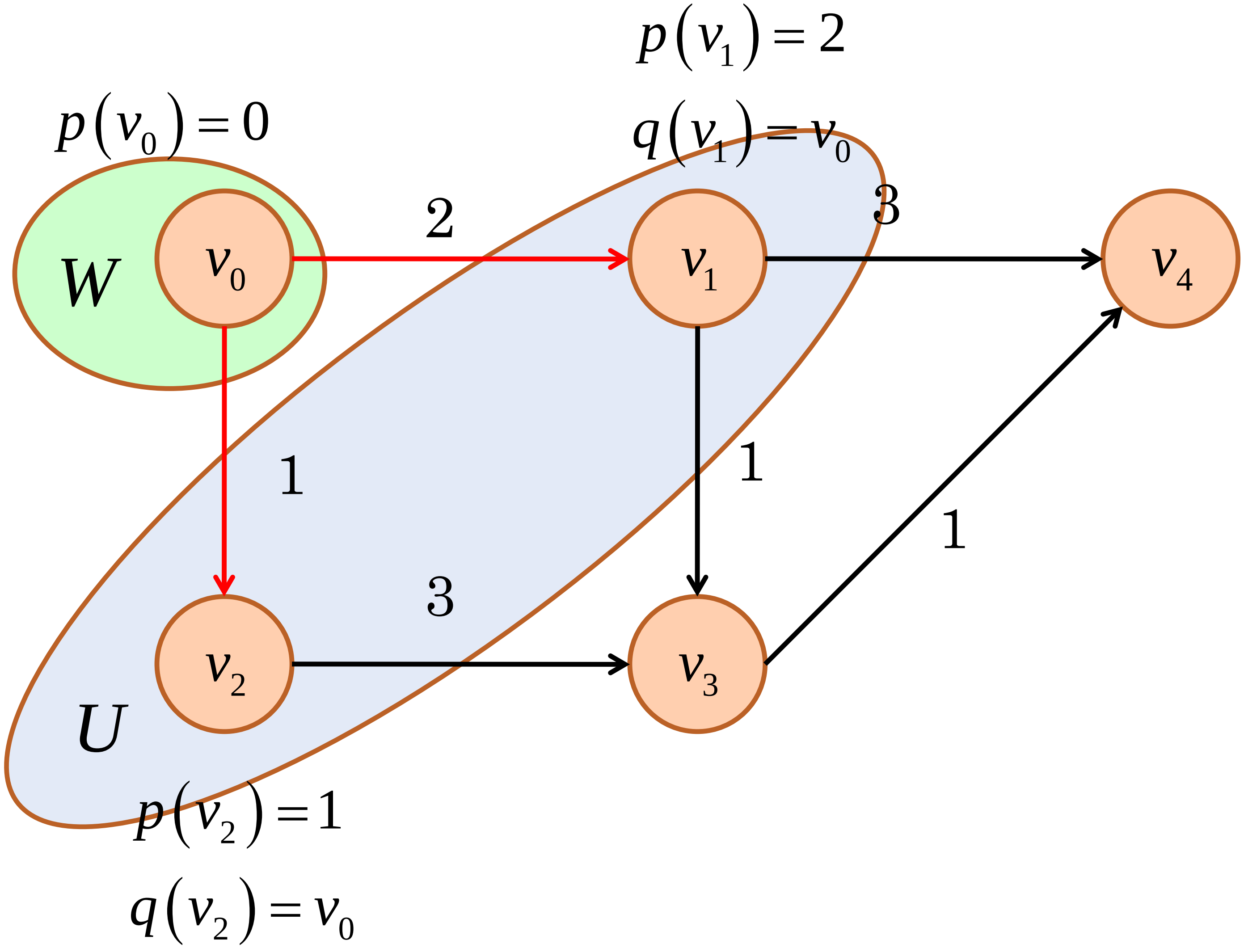
```
while ( U ≠ ∅ ) {
    w = U.poll()//p(w)が最小であるw ∈ U
    forall ( a ∈ δ⁺w ) {
        x = ∂⁻a
        if (x ∉ W) {
            if ( p(x) > p(w) + l(a) ) {
                q(x) ← w
                p(x) ← p(w) + l(a)
                if ( x ∈ U ) { U.reduceValue(x)//xの値を変更}
                else { U.add(x)//Uにxを追加}
    }}}
    W ← W ∪ {w}
}
```

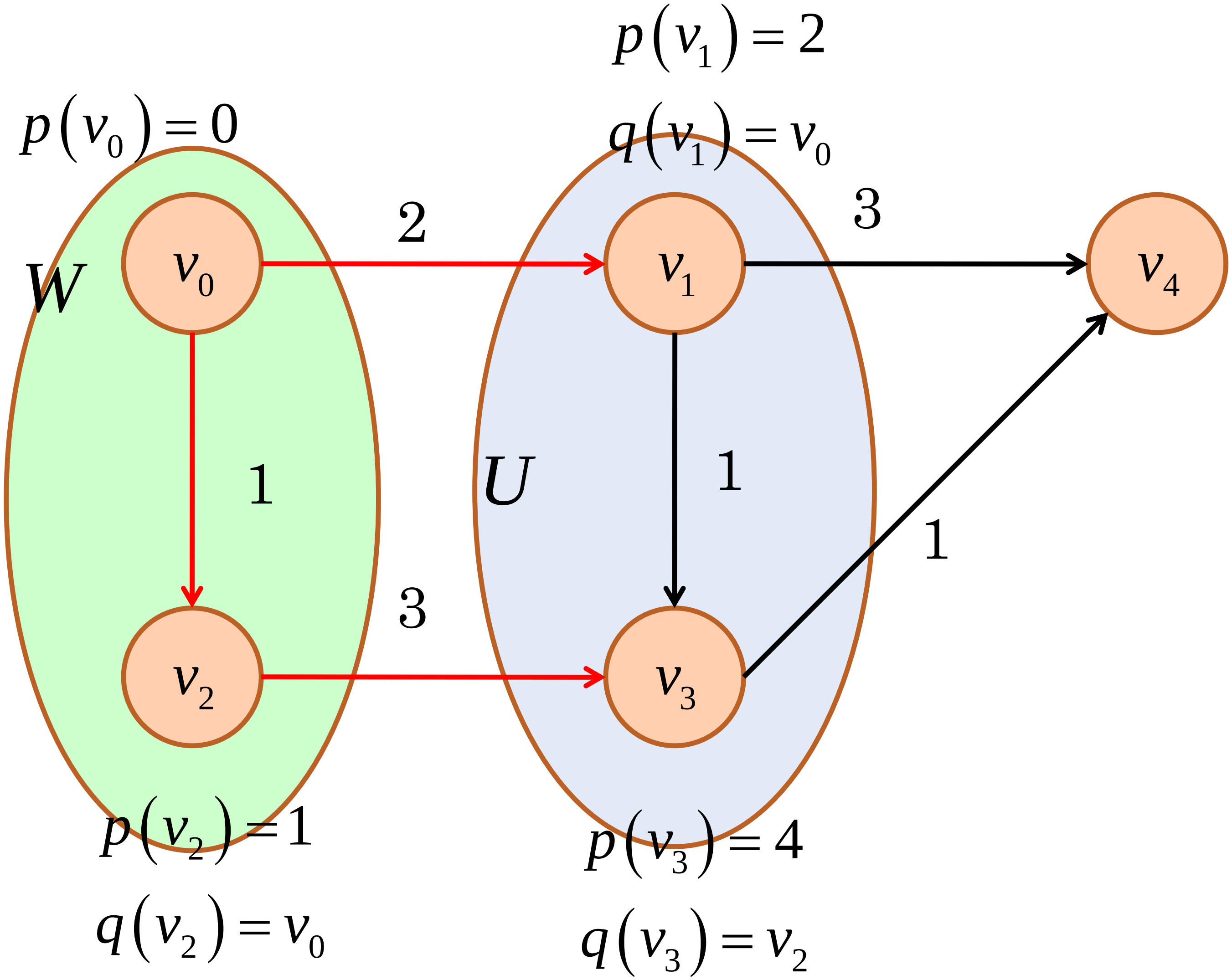
ヒープ中の$p(x)$の値が減ることがあることに注意

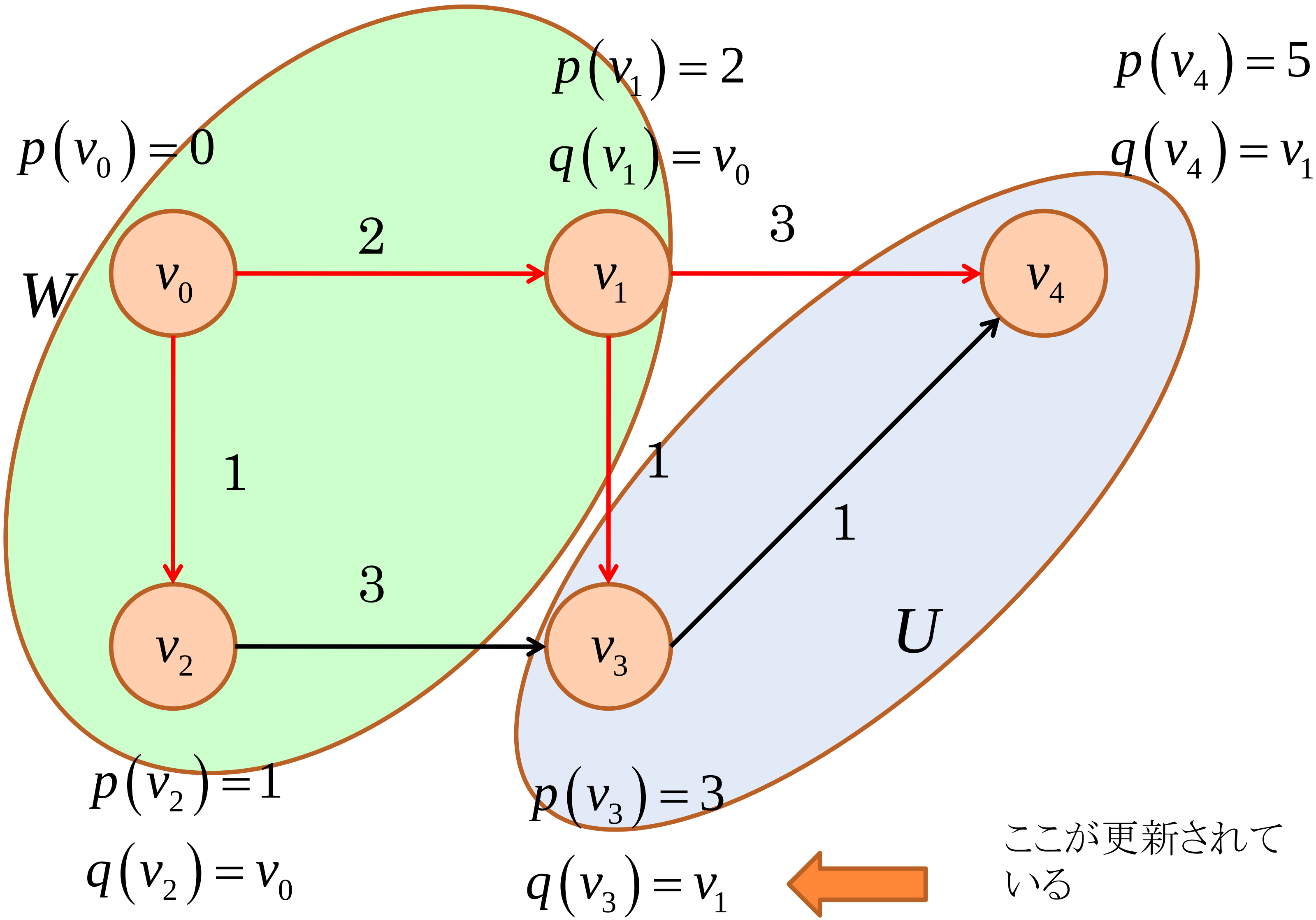
# 例1

$p(v_0)=0$



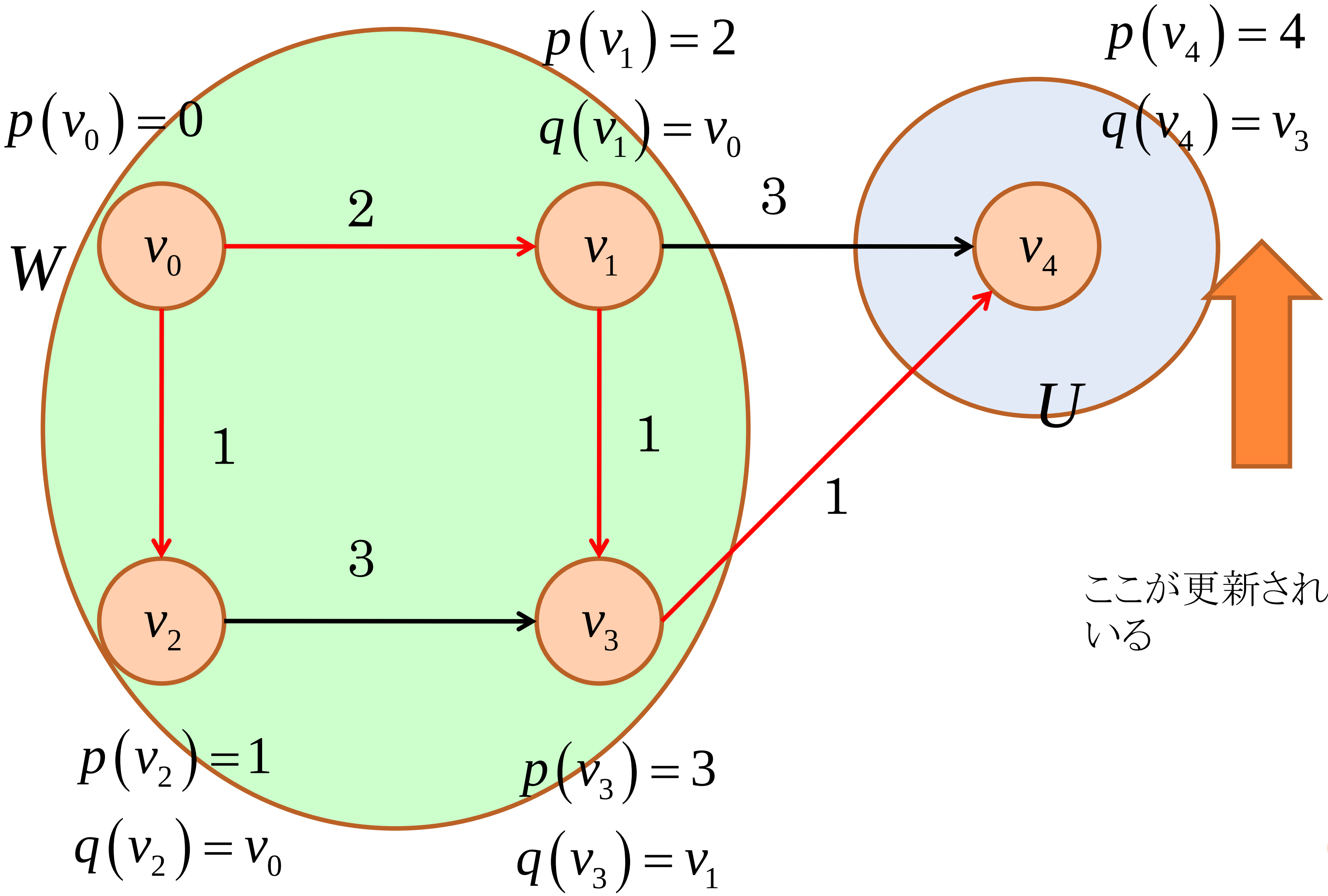

$p(v_1) = 2$
$q(v_1) = v_0$
$p(v_0) = 0$
$W$
$v_0$
$v_1$
$v_2$
$v_3$
$v_4$
2
3
1
1
1
3
$U$
$p(v_2) = 1$
$q(v_2) = v_0$


$p(v_1)=2$
$q(v_1)=v_0$
$p(v_0)=0$
$W$
$v_0$
2
$v_1$
3
$v_4$
1
$U$
1
1
3
$v_2$
$v_3$
$p(v_2)=1$
$q(v_2)=v_0$
$p(v_3)=4$
$q(v_3)=v_2$



$p(v_0)=0$
$p(v_1)=2$
$q(v_1)=v_0$
$p(v_4)=5$
$q(v_4)=v_1$
$W$
$v_0$
$v_1$
$v_4$
2
3
1
1
1
3
$v_2$
$v_3$
$U$
$p(v_2)=1$
$q(v_2)=v_0$
$p(v_3)=3$
$q(v_3)=v_1$


ここが更新されている


$p(v_1) = 2$
$q(v_1) = v_0$
$p(v_4) = 4$
$q(v_4) = v_3$
$p(v_0) = 0$
$W$
$v_0$
$v_1$
$v_4$
$v_2$
$v_3$
2
3
1
1
1
3
$U$
$p(v_2) = 1$
$q(v_2) = v_0$
$p(v_3) = 3$
$q(v_3) = v_1$

ここが更新されている

| | 注目している頂点 | $\boldsymbol{w}$ | $\boldsymbol{U}$ | $\boldsymbol{p}$ | $\boldsymbol{q}$ | 変更を受けた手順 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | $\emptyset$ | $\{v_0\}$ | $p(v_0) = 0$ | | |
| 1 | $v_0$ | $\{v_0\}$ | $\{v_1, v_2\}$ | $p(v_1) = 2$ | $q(v_1) = v_0$ | |
| | | | | $p(v_2) = 1$ | $q(v_2) = v_0$ | |
| 2 | $v_2$ | $\{v_0, v_2\}$ | $\{v_1, v_3\}$ | $p(v_3) = 4$ | $q(v_3) = v_2$ | 3 |
| 3 | $v_1$ | $\{v_0, v_1, v_2\}$ | $\{v_3, v_4\}$ | $p(v_4) = 5$ | $q(v_4) = v_1$ | 4 |
| | | | | $p(v_3) = 3$ | $q(v_3) = v_1$ | |
| 4 | $v_3$ | $\{v_0, v_1, v_2, v_3\}$ | $\{v_4\}$ | $p(v_4) = 4$ | $q(v_4) = v_3$ | |
| 5 | $v_4$ | $\{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4\}$ | $\emptyset$ | | | |

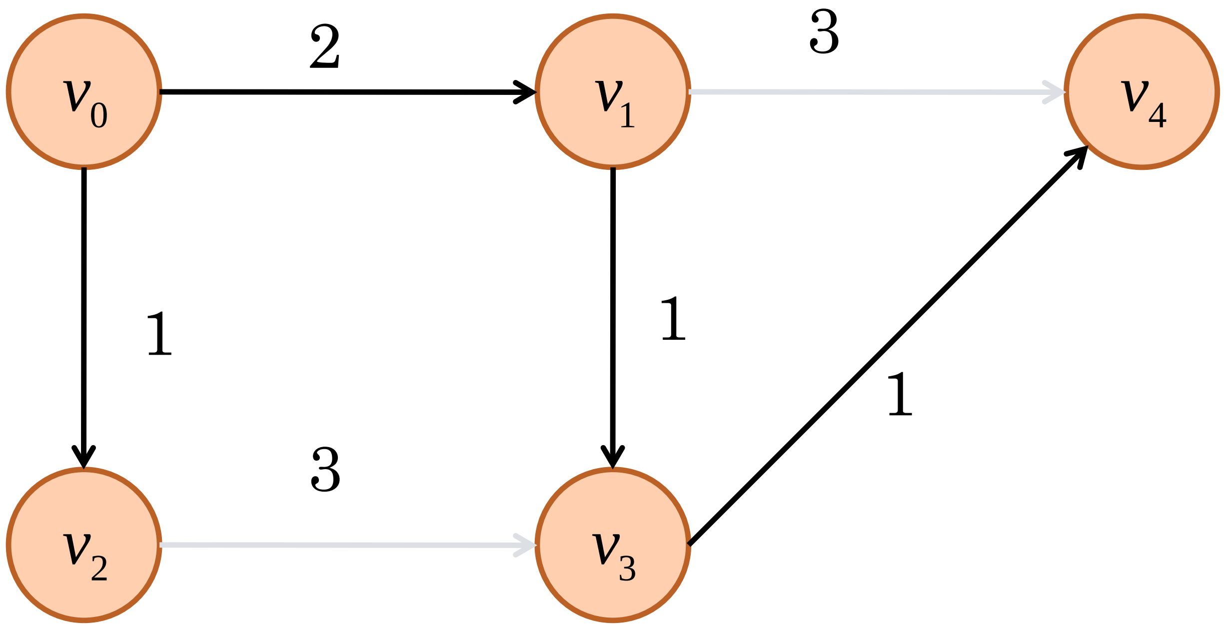
$p(v_1) = 2$

$q(v_1) = v_0$

$p(v_4) = 4$

$q(v_4) = v_3$

$p(v_0) = 0$



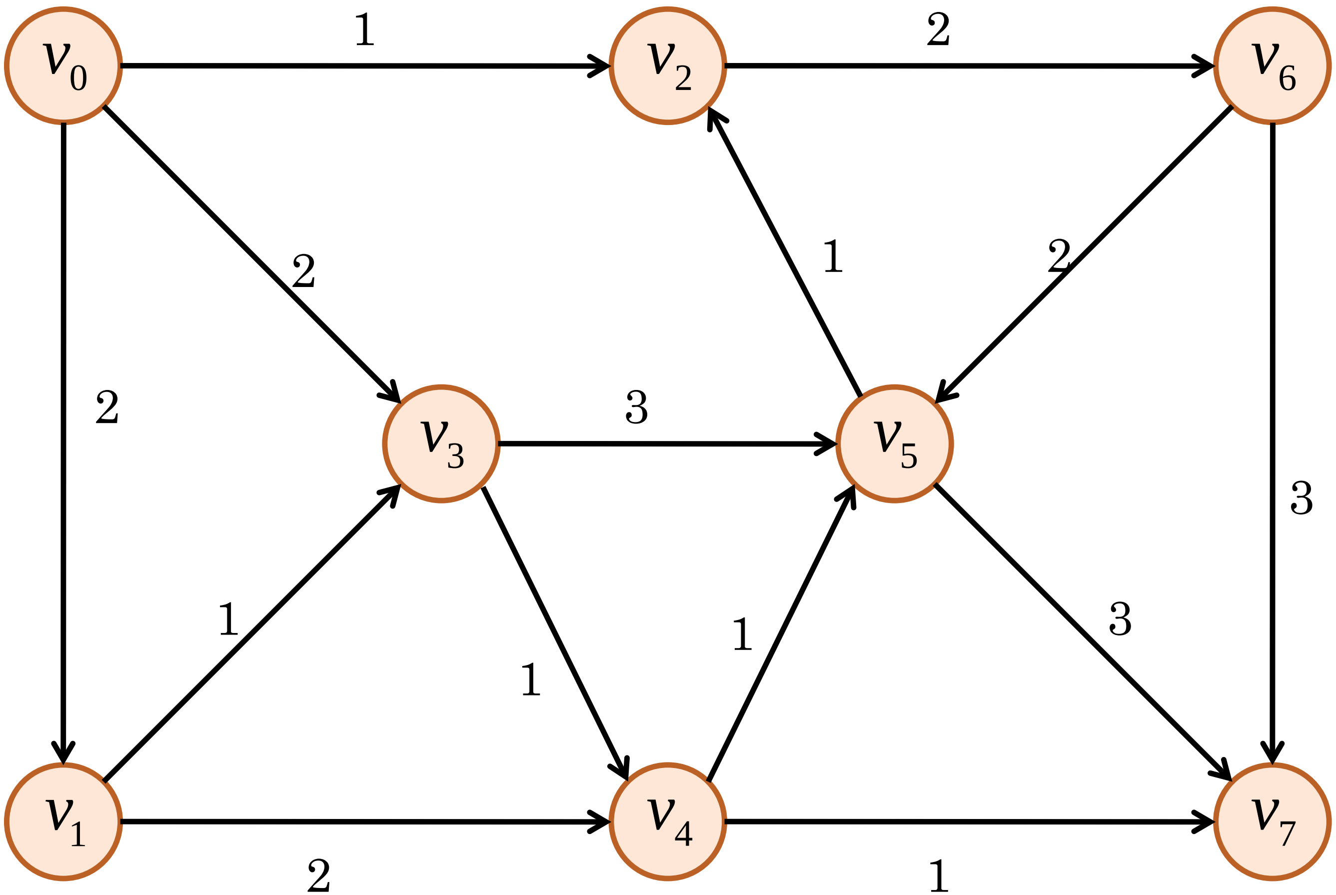

$p(v_2) = 1$

$q(v_2) = v_0$

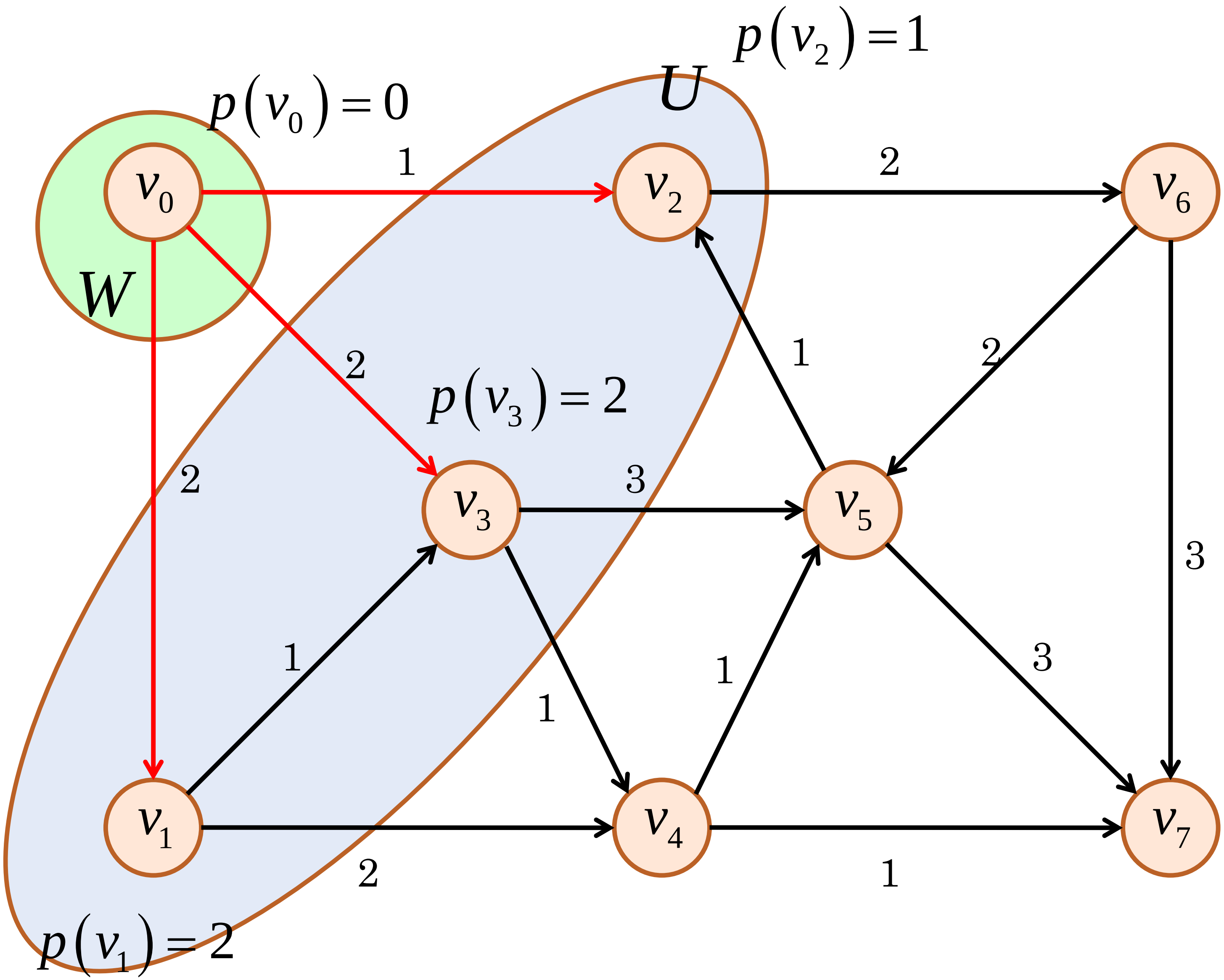
$p(v_3) = 3$

$q(v_3) = v_1$

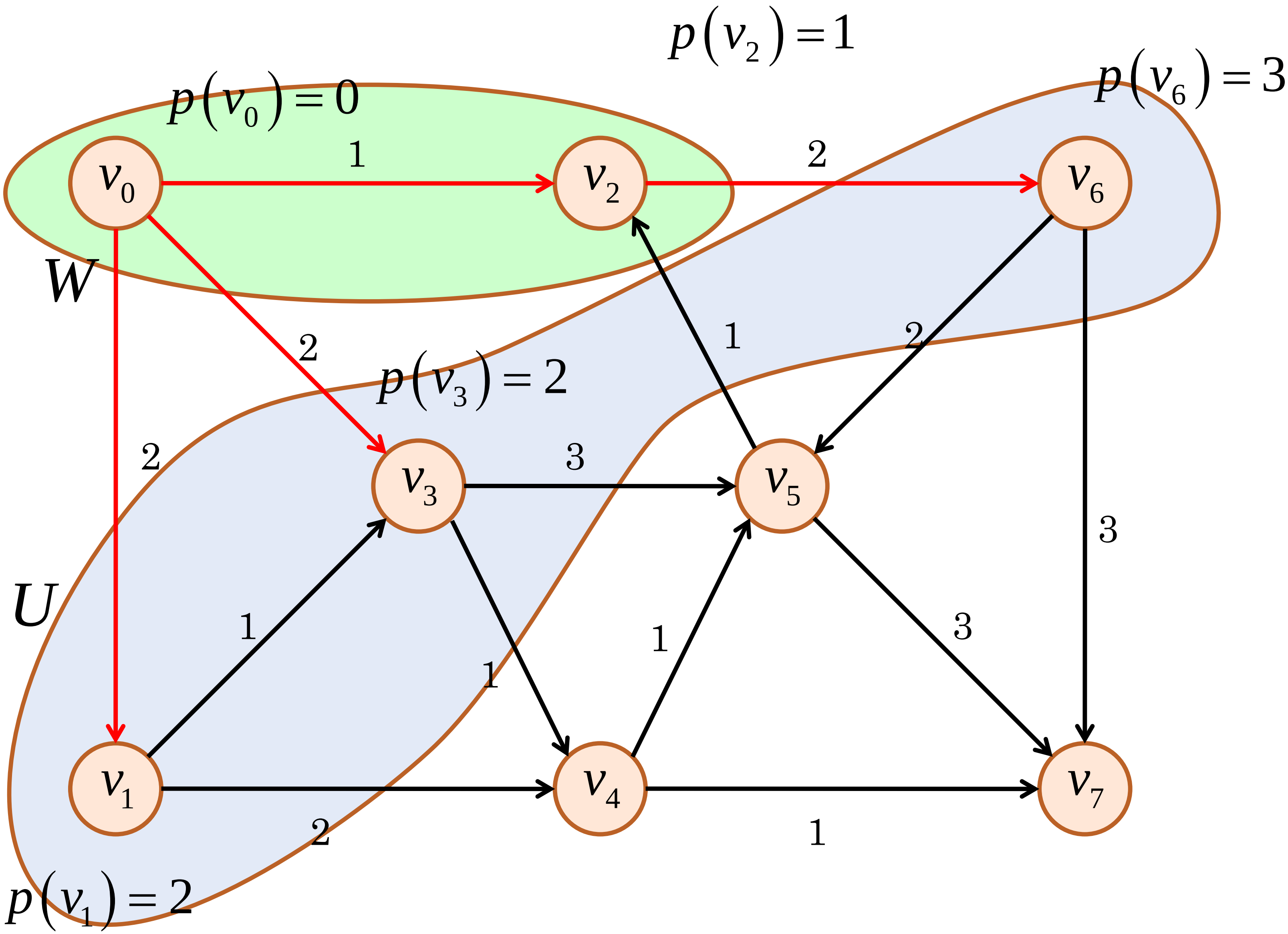
# 例2



$q$は省略

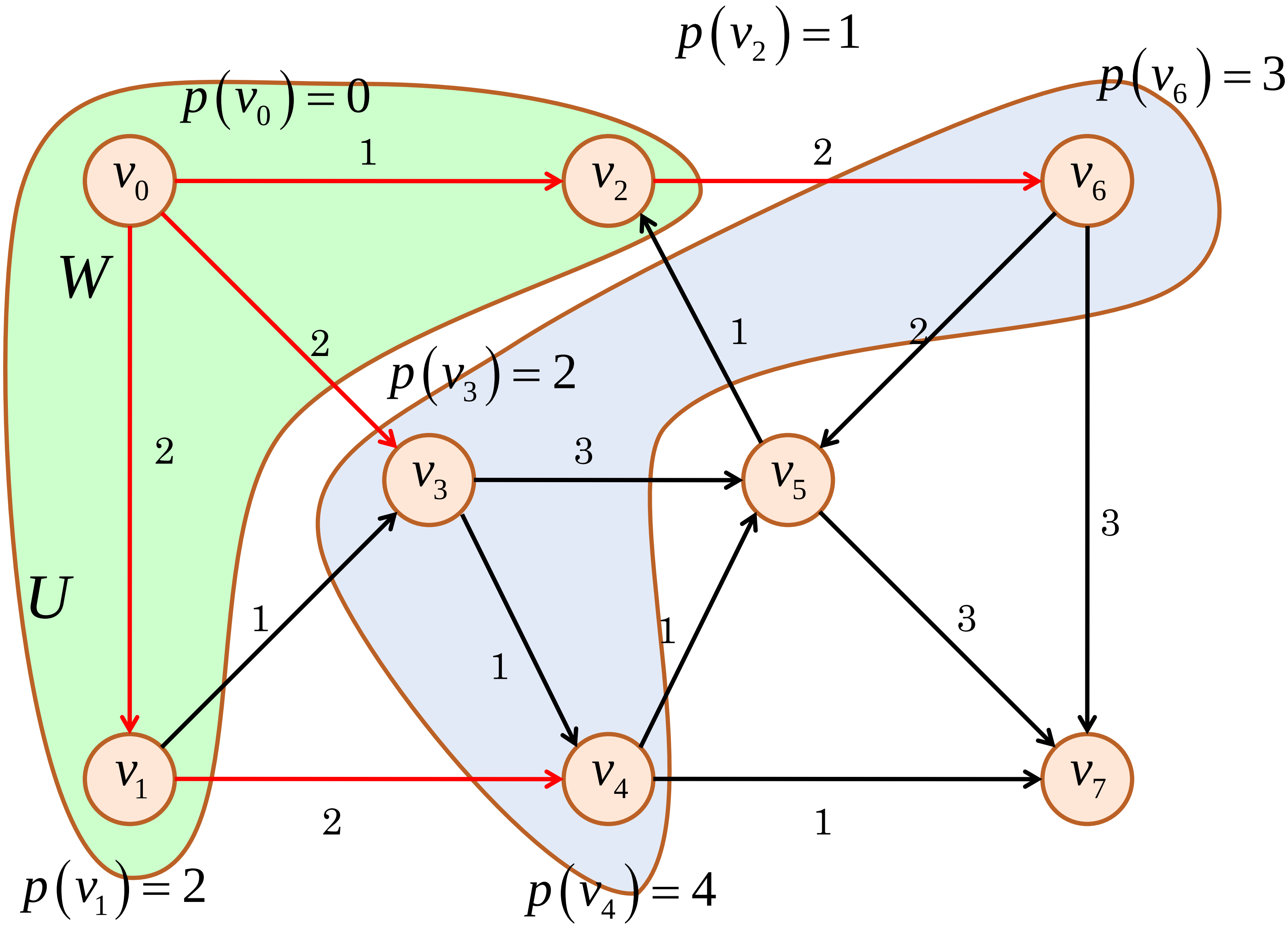


$q$は省略

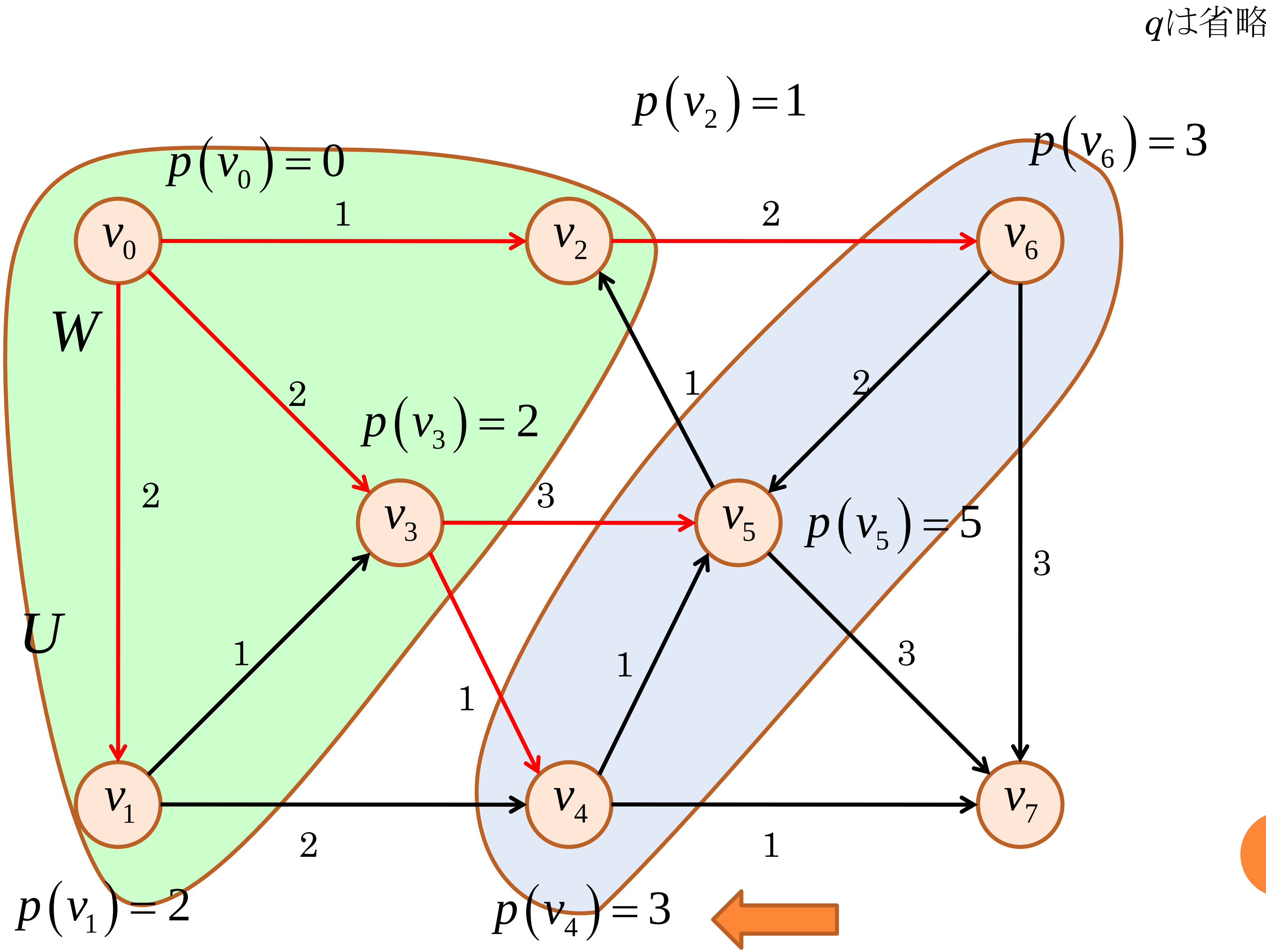


$p(v_2)=1$
$p(v_6)=3$
$p(v_0)=0$
$v_0$
$v_2$
$v_6$
$W$
$p(v_3)=2$
$v_3$
$v_5$
$U$
$v_1$
$v_4$
$v_7$
$p(v_1)=2$
1
2
2
2
1
2
2
3
3
1
1
1
3
2
1

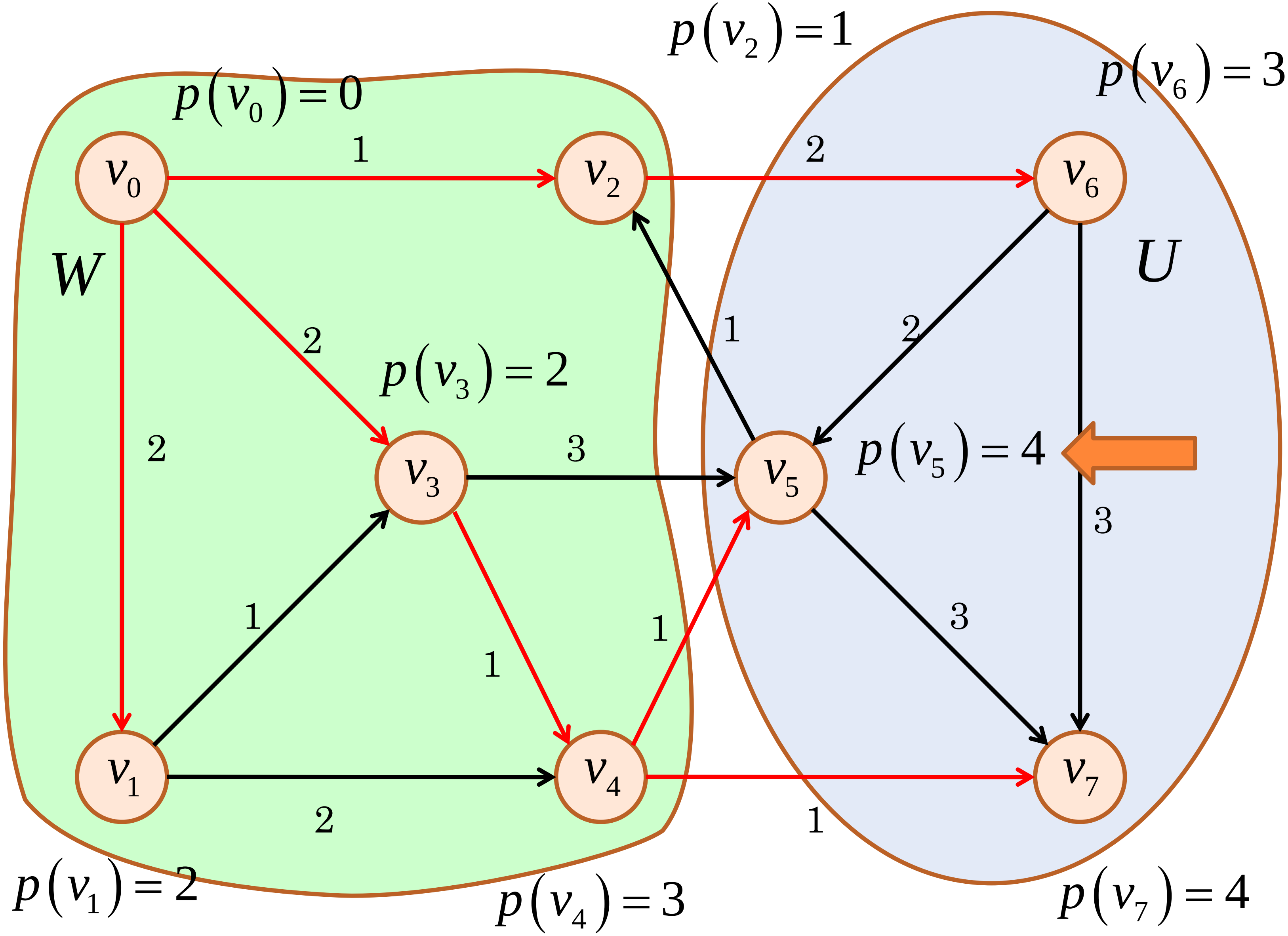
$q$は省略



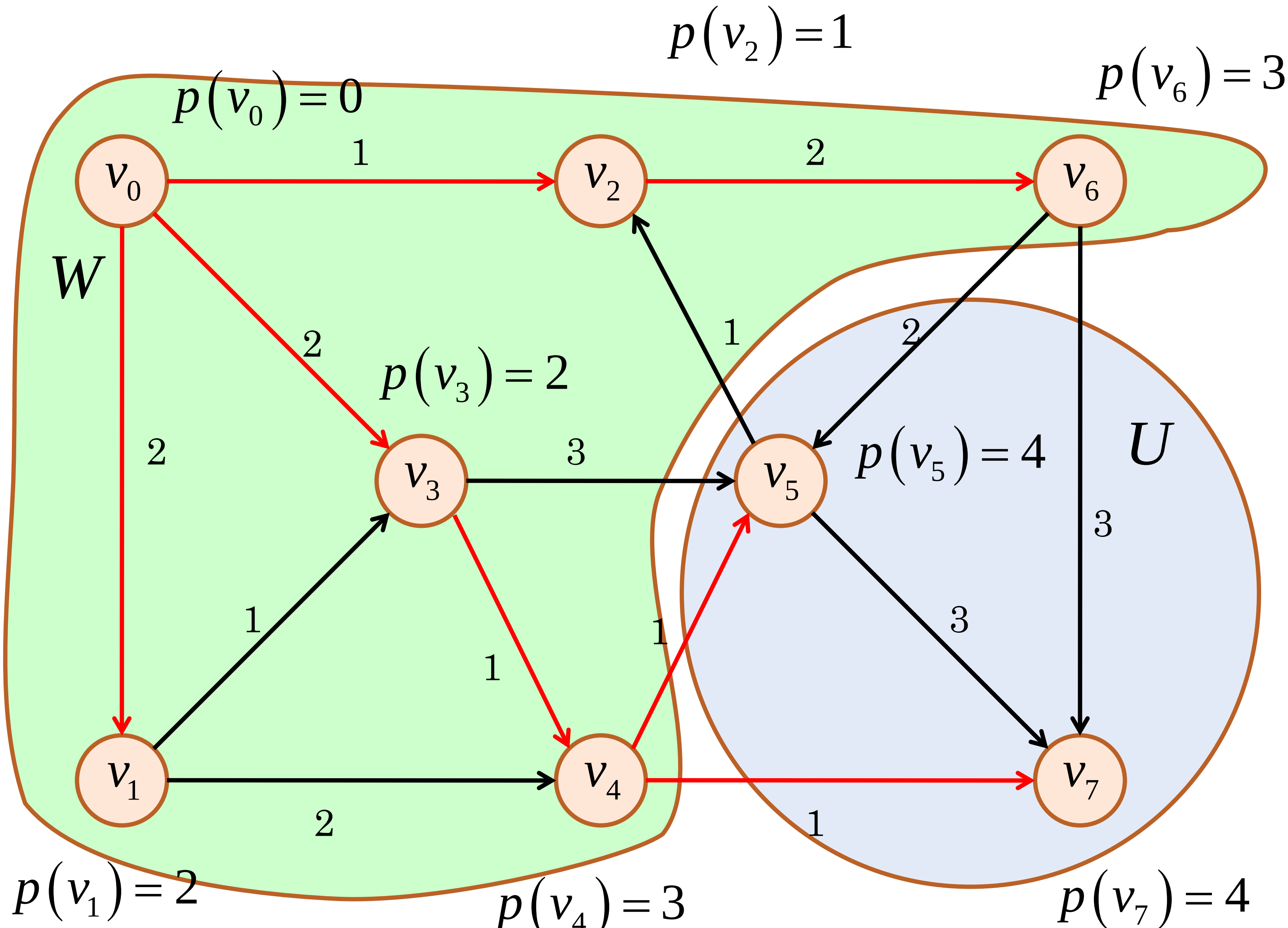
$p(v_0) = 0$
$p(v_2) = 1$
$p(v_6) = 3$
$p(v_3) = 2$
$p(v_1) = 2$
$p(v_4) = 4$
$W$
$U$
$v_0$
$v_1$
$v_2$
$v_3$
$v_4$
$v_5$
$v_6$
$v_7$
1
2
2
2
2
1
1
3
1
2
3
1
3
2
1


$q$は省略
$p(v_2)=1$
$p(v_6)=3$
$p(v_0)=0$
1
2
$v_0$
$v_2$
$v_6$
$W$
2
1
2
$p(v_3)=2$
2
3
$v_3$
$v_5$
$p(v_5)=5$
3
$U$
1
1
3
1
$v_1$
$v_4$
$v_7$
2
1
$p(v_1)=2$
$p(v_4)=3$

$q$は省略

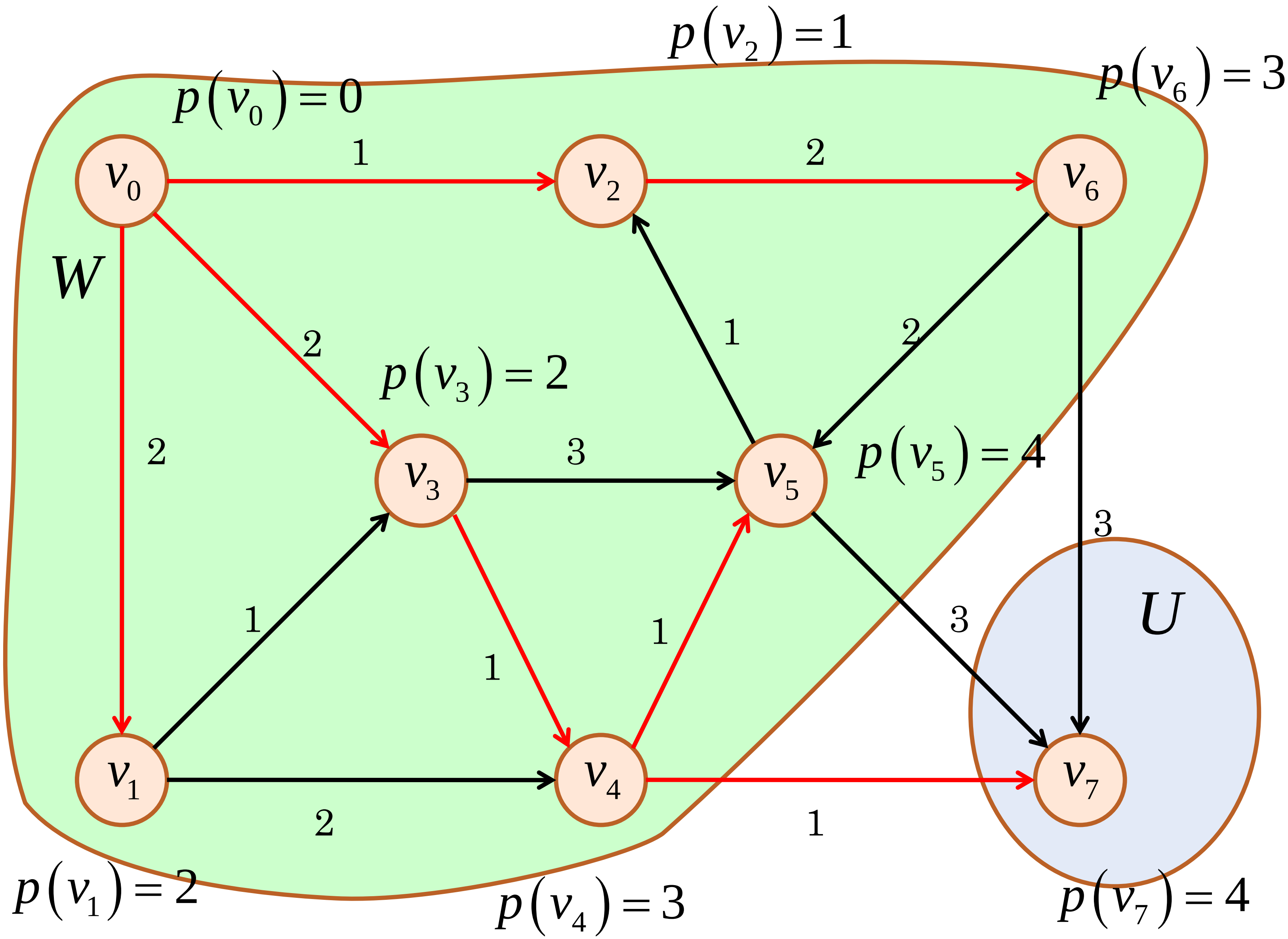

$p(v_2)=1$
$p(v_6)=3$
$p(v_0)=0$
1
2
$v_0$
$v_2$
$v_6$
$W$
$U$
2
1
2
$p(v_3)=2$
2
3
$v_3$
$v_5$
$p(v_5)=4$
3
1
3
1
1
$v_1$
$v_4$
$v_7$
2
1
$p(v_1)=2$
$p(v_4)=3$
$p(v_7)=4$

$q$は省略



$p(v_0)=0$
$p(v_2)=1$
$p(v_6)=3$
$p(v_3)=2$
$p(v_5)=4$
$p(v_1)=2$
$p(v_4)=3$
$p(v_7)=4$
$W$
$U$
$v_0$
$v_1$
$v_2$
$v_3$
$v_4$
$v_5$
$v_6$
$v_7$
1
2
2
2
1
2
3
1
1
2
3
3
1
1
1

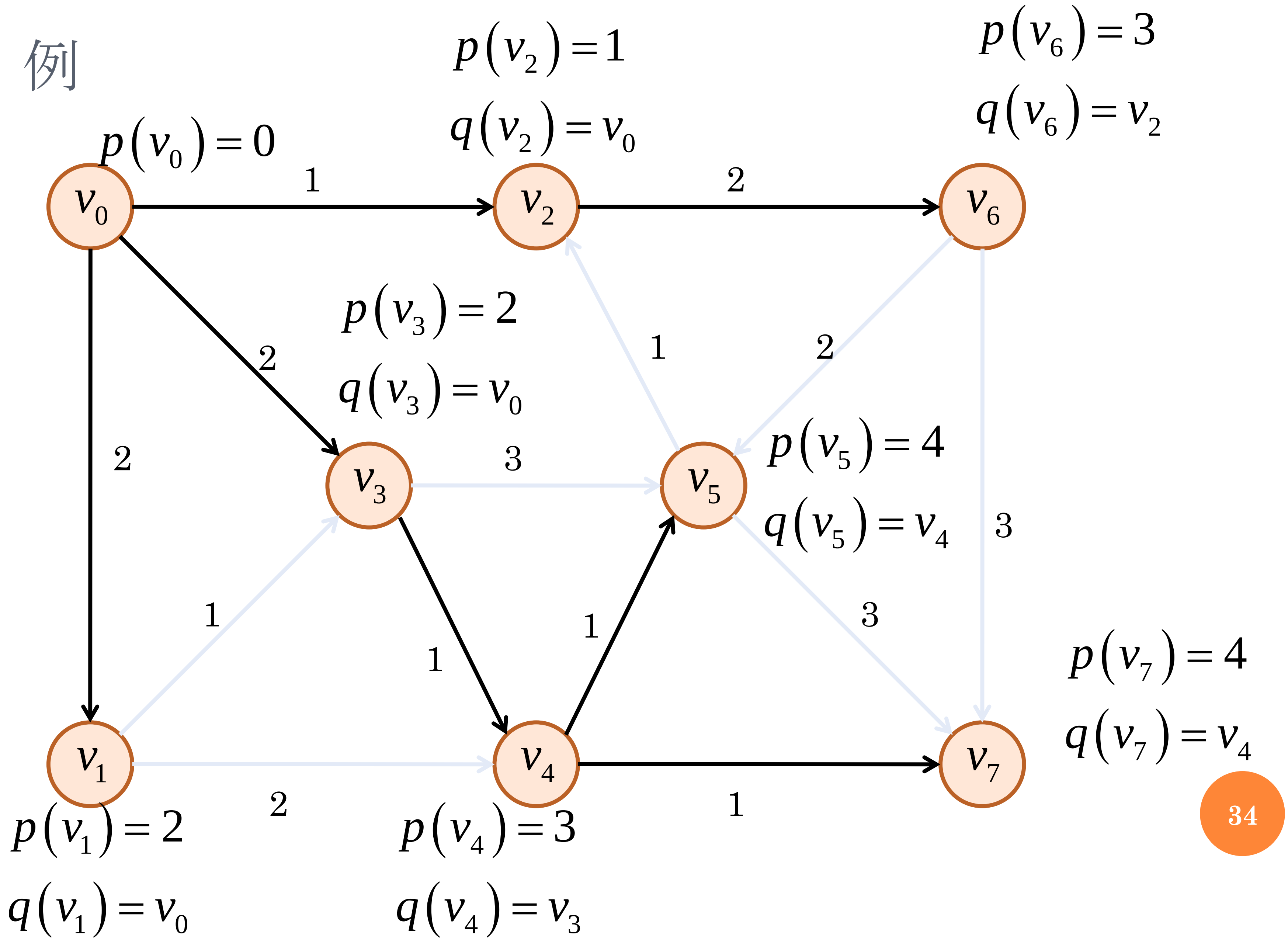
$q$は省略



$p(v_2) = 1$
$p(v_6) = 3$
$p(v_0) = 0$
$v_0$
$v_2$
$v_6$
$W$
$p(v_3) = 2$
$v_3$
$v_5$
$p(v_5) = 4$
$U$
$v_1$
$v_4$
$v_7$
$p(v_1) = 2$
$p(v_4) = 3$
$p(v_7) = 4$
1
2
2
2
1
2
3
3
1
1
1
3
2
1

| | 注目している頂点 | $W$ | $U$ | $p$ | $q$ | 変更を受けた手順 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | $\emptyset$ | $\{v_0\}$ | $p(v_0) = 0$ | | |
| 1 | $v_0$ | $\{v_0\}$ | $\{v_1, v_2, v_3\}$ | $p(v_1) = 2$ | $q(v_1) = v_0$ | |
| | | | | $p(v_2) = 1$ | $q(v_2) = v_0$ | |
| | | | | $p(v_3) = 2$ | $q(v_3) = v_0$ | |
| 2 | $v_2$ | $\{v_0, v_2\}$ | $\{v_1, v_3, v_6\}$ | $p(v_6) = 3$ | $q(v_6) = v_2$ | |
| 3 | $v_1$ | $\{v_0, v_1, v_2\}$ | $\{v_3, v_4, v_6\}$ | $p(v_4) = 4$ | $q(v_4) = v_1$ | 4 |
| 4 | $v_3$ | $\{v_0, v_1, v_2, v_3\}$ | $\{v_4, v_5, v_6\}$ | $p(v_4) = 3$ | $q(v_4) = v_3$ | |
| | | | | $p(v_5) = 5$ | $q(v_5) = v_3$ | 5 |
| 5 | $v_4$ | $\{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4\}$ | $\{v_5, v_6, v_7\}$ | $p(v_5) = 4$ | $q(v_5) = v_4$ | |
| | | | | $p(v_7) = 4$ | $q(v_7) = v_4$ | |
| 6 | $v_6$ | $\{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_6\}$ | $\{v_5, v_7\}$ | | | |
| 7 | $v_5$ | $\{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ | $\{v_5\}$ | | | |
| 8 | $v_7$ | $\{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ | $\emptyset$ | | | |

例



$p(v_0)=0$
$p(v_2)=1$
$q(v_2)=v_0$
$p(v_6)=3$
$q(v_6)=v_2$
$p(v_3)=2$
$q(v_3)=v_0$
$p(v_5)=4$
$q(v_5)=v_4$
$p(v_7)=4$
$q(v_7)=v_4$
$p(v_1)=2$
$q(v_1)=v_0$
$p(v_4)=3$
$q(v_4)=v_3$
$v_0$
$v_1$
$v_2$
$v_3$
$v_4$
$v_5$
$v_6$
$v_7$
1
2
2
2
3
1
2
1
1
1
3
3
3
2
1

# DIJKSTRA法が正しいことの証明

- 補題1
  - 頂点集合$W$に入った頂点までの距離は、後から更新されることはない
- 補題2
  - $W$及び$U$の要素の頂点は、一意に直前の頂点があり、始点を根とする有向木の一部である
  - この木に沿って$l_p = 0$である
  - この木以外の道では$l_p \geq 0$となる
  - つまり、発見した経路の中で最短である
- 以上から、$W = V$となることで、すべての最短経路が見つかる

# Dijkstra法の妥当性：補題1

- Dijkstra法の実行に伴って、頂点が $v_0, v_1, v_2, \cdots$の順に集合$W$に追加されるとする
  - 頂点名は、元のネットワークの頂点名でないことに注意
- このとき

$$0 \le p(v_0) \le p(v_1) \le p(v_2) \le \ldots \le p(v_i) \le p(v_{i+1}) \le \ldots$$

- つまり$W$には、距離の小さい頂点から順に追加されていく。従って、$W$に入った頂点のポテンシャルが後から更新されることはない。

# 補題1証明

- Dijkstra法の実行中に、以下が常に成り立つことを示す
  - $W$に追加された頂点のポテンシャルは、$W$に含まれない任意の頂点のポテンシャルより大きいことはない

$$\max\left\{ p(u) \mid u \in W \right\} \le \min\left\{ p(u) \mid u \in V \setminus W \right\}$$

# 補題1証明

- 一回目のループ実行後: 自明
  - $W = \{v_o\}, p(v_0) = 0$
- あるステップで成り立つと仮定
  - 次に選ばれる頂点: $w \in U \subseteq V \setminus W$
    - $V \setminus W$ の中でポテンシャルが最小
  - ポテンシャルの更新前

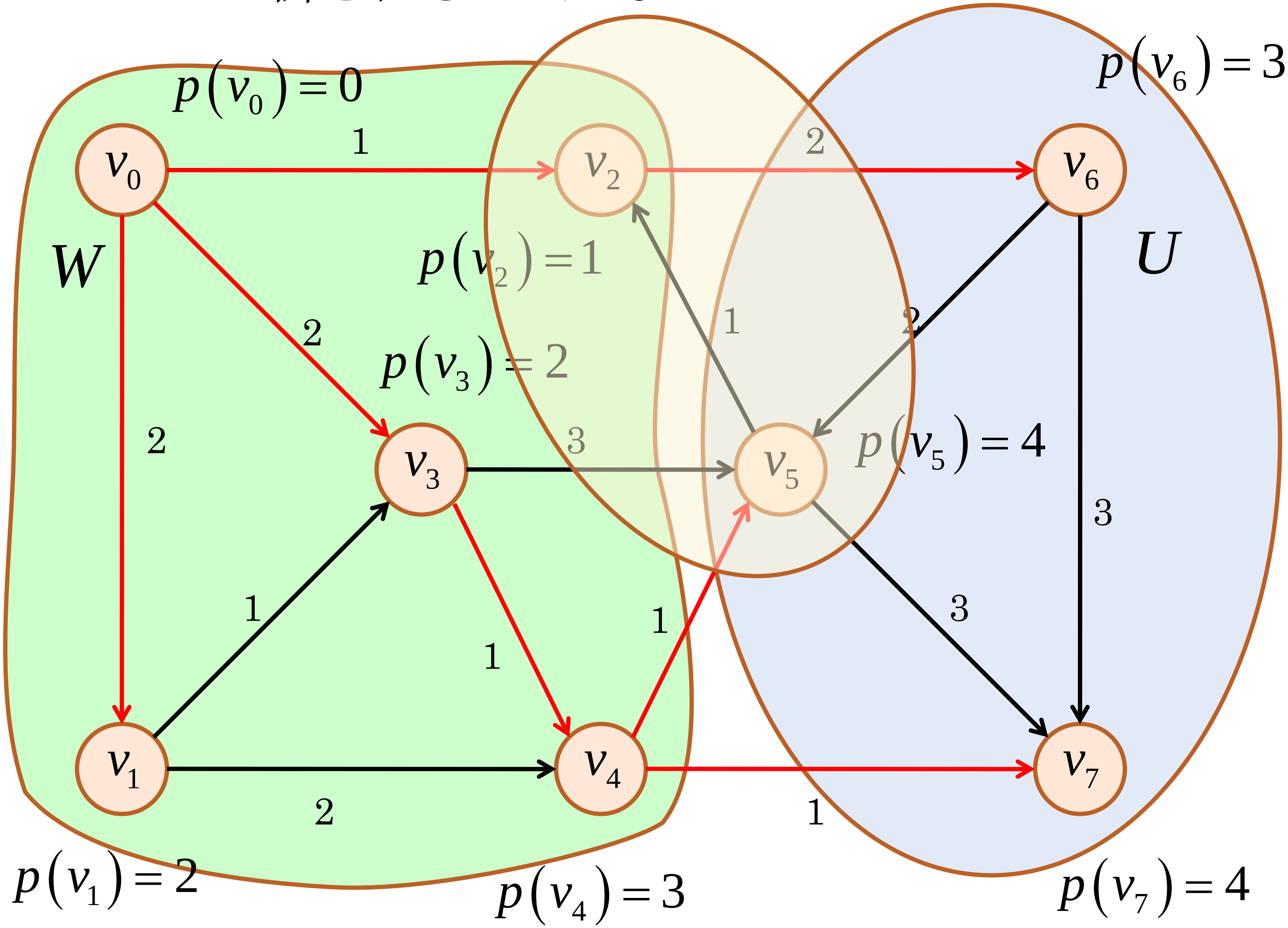
$$\max\left\{p(u)\middle|u \in W\right\} \le \boxed{p(w)} \le \min\left\{p(u)\middle|u \in V \setminus \left(W \cup \{w\}\right)\right\}$$

  - ポテンシャルの更新後

$$\max\left\{p(u)\middle|u \in W\right\} \le \min\left\{p(u)\middle|u \in V \setminus W\right\}$$

$v_2$のポテンシャルが更新されることはない

$q$は省略



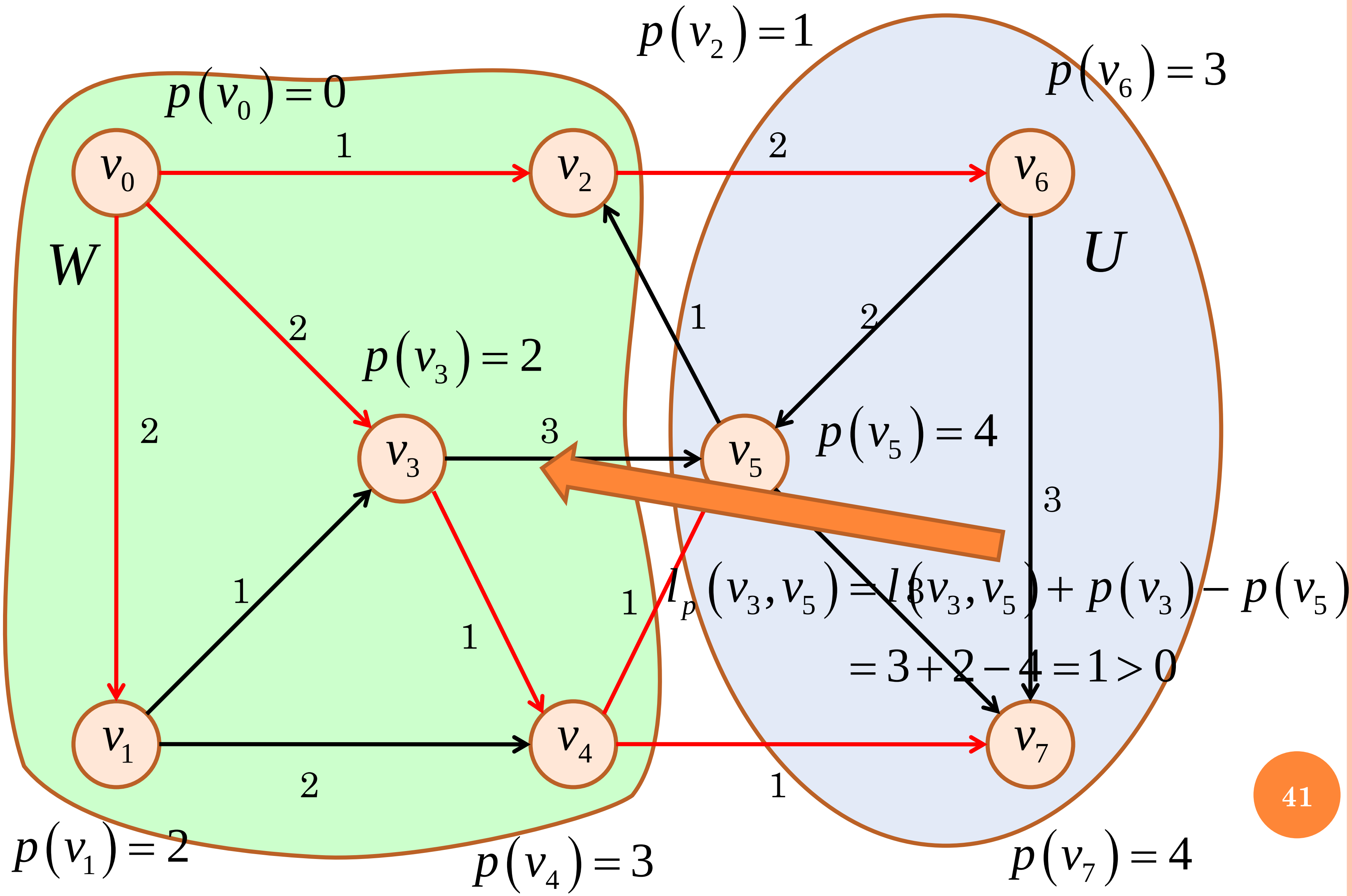
# Dijkstra法の妥当性：補題2

- $W$に始点を持つ$G$の弧の集合$\delta^+W$
  - $G_W = (W \cup U, \delta^+ W)$に対して
    - $l_p(a) \geq 0 (\forall a \in \delta^+ W)$
- 経路がわかっているならば

$$l_p(q(u), u) = 0 \left(\forall u \in (W \cup U) \setminus \{v_0\}\right)$$

- $\forall u \in (U \cup W) \setminus \{v_0\}$に対して定まる弧$(q(u), u)$の全体は、$v_0$を根とする有向木である。
- つまり、経路が指定されると、頂点$u$は$v_0$を根とする有向木の一部となり、その経路に沿って$l_p(v_0, u) = 0$となる

$q$は省略




$$l_p(v_3, v_5) = l(v_3, v_5) + p(v_3) - p(v_5)$$
$$= 3 + 2 - 4 = 1 > 0$$

# 補題2証明

- Dijkstra法の手順から、$a \in \delta^+ W$に対して

$$p\left(\partial^- a\right) \leq p\left(\partial^+ a\right) + l\left(a\right)$$

$$\Downarrow$$

$$l_p\left(a\right) = l\left(a\right) + p\left(\partial^+ a\right) - p\left(\partial^- a\right) \geq 0$$

- $\forall a \in U$に対して

$$p\left(u\right) = p\left(q\left(u\right)\right) + l\left(q\left(u\right), u\right)$$

$$\Downarrow$$

$$l_p\left(q\left(u\right), u\right) = l\left(q\left(u\right), u\right) + p\left(q\left(u\right)\right) - p\left(u\right) = 0$$

# 補題2証明

- 補題1より、$W$の要素は順序付けられている
- $\forall v_j \in W$に対して、$q(v_i) = v_j$ならば、$j < i$
  - $v_i$に対して、一意に親の頂点が定まる
- $\forall v \in U$に対して、$q(v) = w \in W$
  - 一意に親が定まる
- $v_0$を根とした有向木が定まる

# Dijkstra法で最短経路が求まるのは

- 始点$u$から各頂点$v$への道$P(u,v)$が定まる
- その経路に沿って、$l_p\big(P(u,v)\big) = 0$となる

$$l\big(P(u,v)\big) = p(v) - p(u) \overset{l}{=} 0$$

- 他の経路$P'(u,v)$に対しては、その経路長が$P(u,v)$よりも長い

$$l\big(P'(u,v)\big) = p(v) - p(u) + l_p\big(P'(u,v)\big) \geq p(v) - p(u)$$