グラフと組合せ：まとめ

2016年度

担当：只木進一（工学系研究科）

数学的背景

- 集合とその演算
  - 集合の演算記号を理解していること
  - 注意:
    - 集合の差:$A \setminus B$
    - べき集合:2^A
- 数学的帰納法
  - 初期値(例えば$n = 1$)に対して成り立つ
  - ある値nに対して成り立つことを仮定して$n + 1$でも成り立つことを示す。
  - 具体的に運用できること
  - 「・・・」を使わない

グラフの記述$G = (V, A)$

- V: 頂点の集合
- A: 弧の集合
- 弧からその始点と終点への写像
  - $\partial^+ : A \to V,\ \partial^- : A \to V$
- 頂点から、そこを始点(終点)とする弧への写像
  - $\delta^+ : V \to 2^A,\ \delta^- : V \to 2^A$

特殊なグラフ

- 完全グラフ (complete graphs)
- 二部グラフ (bipartite graphs)

- 道 (paths)
- 閉路 (circles)

- 木 (trees)

- 極大木 (spanning trees)

二つの探索アルゴリズム

- 深さ優先探索
  - 再帰的アルゴリズム
  - 注目している頂点
  - これまで探索を終えた頂点のリスト
- 幅優先探索
  - 探索すべき頂点の待ち行列
  - 再帰ではないことに注意

閉路探索

- Euler閉路
  - 一筆描き
  - 全ての弧を一度ずつ経由する閉路
- Hamilton閉路
  - 全ての頂点と一度ずつ経由する閉路

- 再帰的アルゴリズム
- 閉路を列挙する

ネットワーク

- 弧に重み (実数) が定義されている
  - 距離
  - 費用
  - 容量
- 最適化問題
  - 最小木
  - 最短経路

最小木

- 弧の重みの和が最小になる極大木

- Kruskalアルゴリズム
  - 重みの小さい弧を順に採用
  - 閉路ができないように
- Jarník-Primアルゴリズム
  - 始点を定める
  - 木に取り込まれた頂点とそれ以外の頂点を結ぶ弧のうち、最小の重みの弧を追加

最短経路

- 二つの頂点を結ぶ距離最小の有向道
- 始点を定め、全頂点への最短経路を求める

- Dijkstraアルゴリズム
  - $p: V \to R$:ポテンシャル関数
  - W :ポテンシャルが確定した頂点の集合
  - U :ポテンシャルを計算したが、未確定の頂点の集合
  - $q: V \to V$:最短距離に沿った直前の頂点

最大フロー

- 弧に容量とフローが定義されている
- アルゴリズム:頂点v_0から頂点v_d への最大流量

```
流量を初期化する
補助ネットワークN_Aを作る
while (N_A中にv_0からv_dへの有向道がある){
    有向道に沿った増分dを求める
    N_Aを更新
}
```