

# 「グラフと組み合わせ」課題1 (解答例)

2018/4/12

## 1 集合の演算

二つの集合

$$X = \{x \mid x \in N, x \leq 12\} \quad (1.1)$$

$$Y = \{x \mid x = 3n + 2, n \in N, n \leq 3\} \quad (1.2)$$

に対して、以下の集合を求め、要素を列挙することで答えなさい。

1.  $X \cup Y$
2.  $X \cap Y$
3.  $X \setminus Y$

解答例 まず、それぞれの集合を要素を列挙することで表現する。

$$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

$$Y = \{5, 8, 11\}$$

これらを使って演算結果を求める。

1.  $X \cup Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$
2.  $X \cap Y = \{5, 8, 11\}$
3.  $X \setminus Y = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 10, 12\}$

## 2 数学的帰納法

自然数  $n$  に対する以下の公式を、数学的帰納法を用いて証明しなさい。

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \quad (2.1)$$

### 解答例

- $n = 1$  の場合

$$\text{LHS} = 1, \quad \text{RHS} = \frac{1}{6} \times 1 \times 2 \times 6 = 1$$

となり、等号が成り立つ。

- ある  $n$  に対して式 (??) が成り立つと仮定する。

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^n k^2 + (n+1)^2$$

と分け、式 (??) を用いる。

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2 \\ &= \frac{1}{6}(n+1)[2n^2 + n + 6n + 6] \\ &= \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2(n+1)+1) \end{aligned}$$

つまり、 $n+1$  に対しても等号が成り立つ。

以上、数学的帰納法により、式 (??) は任意の自然数  $n$  に対して成り立つ。