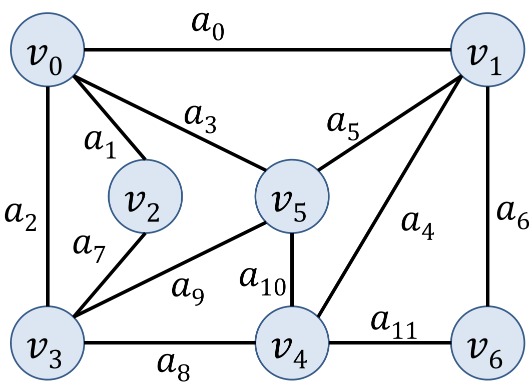
「グラフと組み合わせ」課題 3 （解答例)

2018/4/26

1　Euler 閉路

次のグラフ中の Euler 閉路 (一筆描き) を見つけなさい。



解答例　一つの例だけを示す。

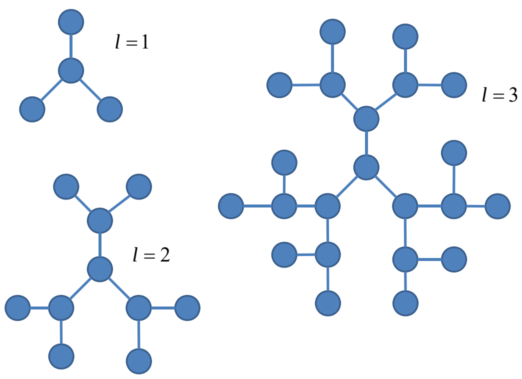
$$a_0 a_5 a_3 a_1 a_7 a_9 a_{10} a_{11} a_6 a_4 a_8 a_2$$

2　Cayley 木内の点間の距離

次数 $k > 2$ の Cayley 木を以下の手順で構成することにする。下の図は $k = 3$ の場合である。

1. 頂点の数が $k+1$ の最小の Cayley 木を作る（図中の $l = 1$ の場合）。ここで は、中心からの距離となる。
2. 外側の k 個のそれぞれの頂点から、新たに $k-1$ 本の弧を伸ばして新しい頂点を接続する（図中の $l = 2$ の場合）。
3. 上記ステップを $l = L$ まで繰り返す。

このとき頂点の数 N を L で表しなさい。また、その表式が正しいことを証明しなさい。



解答例

- $L = 1$ の場合、頂点数は $N = k + 1$ である。
- $L = 2$ の場合、外側の k 個の頂点からそれぞれ $k-1$ 本の弧が伸びる。従って、総頂点数は
$$N = 1 + k + k(k-1)$$
となる。
- $L = 3$ の場合、$L = 2$ の Cayley 木の外側の頂点数は $k(k-1)$ であり、そこからそれぞれ $k-1$ 本の弧が伸びる。従って、総頂点数は以下のようになる。
$$N = 1 + k + k(k-1) + k(k-1)^2$$

- 上記の手順を繰り返すことで次式を得る。

$$N(L) = 1 + k\sum_{j=0}^{L-1}(k-1)^j = 1 + k\frac{1-(k-1)^L}{1-(k-1)} = \frac{2-k(k-1)^L}{2-k} \tag{2.1}$$

数学的帰納法による証明数学的帰納法を用いて、式 (2.1) を証明する。準備として、中心からの距離が L である Cayley 木の葉の数 $H(L)$ と L の関係を証明する。上記の推論より

$$H(L) = k(k-1)^{L-1} \tag{2.2}$$

となる。まず、これを証明する。

- $L=1$ の場合、$H(1)=k$ であり、式 (2.2) が成り立つ。
- ある L で式 (2.2) が成り立つと過程する。距離 L の Cayley 木の葉の数 $H(L)$ のそれぞれから、$k-1$ 個の葉が出て、距離 $L+1$ の Cayley 木が構成される。従って、距離 $L+1$ の Cayley 木の葉の数は次式で与えられる。

$$H(L+1) = H(L)\times(k-1) = k(k-1)^{L-1}\times(k-1) = k(k-1)^L$$

従って、任意の $L \in N$ に対して、式 (2.2) が成り立つ。

次に、式 (2.1) を証明する。

- $L=1$ の場合、$N(1)=1+k$ であり、式 (2.1) が明らかに成り立つ。
- ある L に対して、式 (2.1) が成り立つと仮定する。この時の葉の数は $H(L)$ である。$L+1$ の Cayley 木を構成するには、$H(L)$ 個の葉からそれぞれ $k-1$ 個の葉が新たに生成する。従って、頂点総数は次式となる。

$$\begin{aligned}
N(L+1) &= N(L) + H(L)\times(k-1) = N(L) + k(k-1)^L \\
&= \frac{2-k(k-1)^L}{2-k} + k(k-1)^L \\
&= \frac{1}{2-k}\left[2-k(k-1)^L + k(2-k)(k-1)^L\right] \\
&= \frac{1}{2-k}\left[2+k(k-1)^L - k^2(k-1)^L\right] \\
&= \frac{2-k(k-1)^{L+1}}{2-k}
\end{aligned}$$

よって、任意の $L \in N$ に対して式 (2.1) が成り立つ。