フローとカット
Flow and Cut

2018年度

担当：只木進一（理工学部)

ネットワーク中のフロー　(流量、flow)

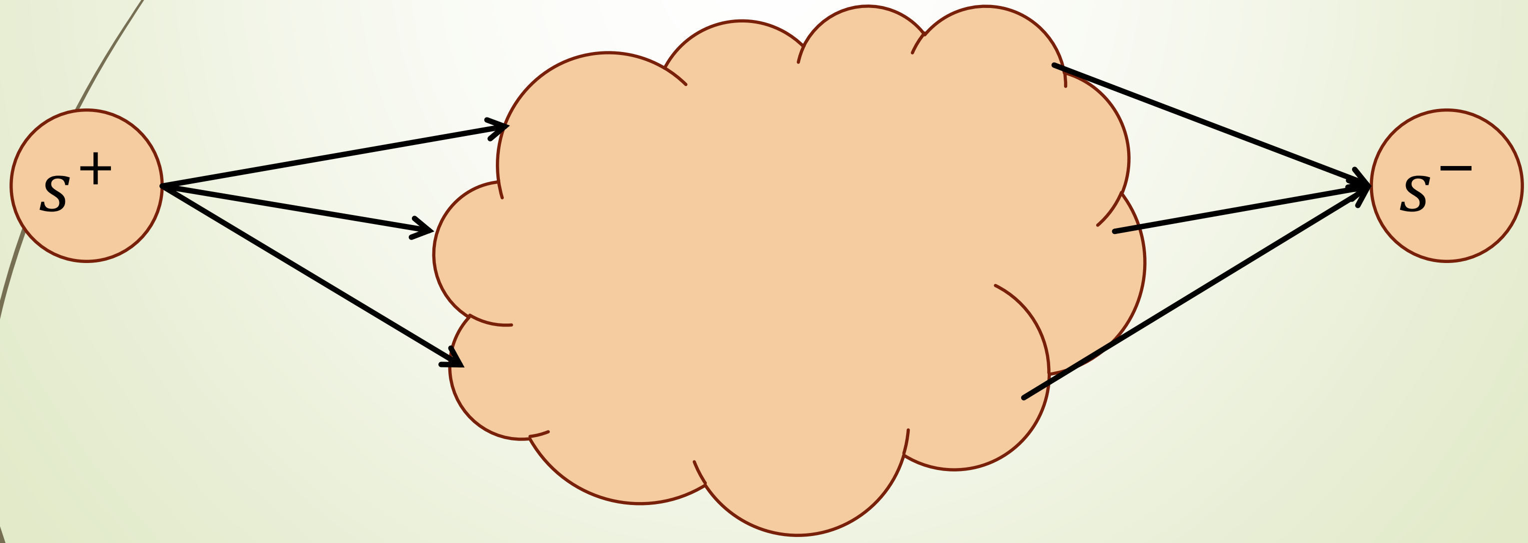
- 交通網中の流れ
  - 都市間を流れる車両の数、及びその上限
  - 都市間を結ぶ航空路線が輸送する人数とその上限
- 物流
  - 倉庫間を移動している商品の数とその上限
- 作業
  - 各工程間のコストとその上限

容量と流れ

- 各弧に容量（上限）が存在する
  - 交通機関の輸送能力
  - 通信速度
- 各弧に実際に流れる流量
  - 容量以下
- 二点間に最大流量を実現する方法？

2端子フロー

- 入口s^+と出口s^-
- 入口から出口まで有向道がある
- 各弧に容量と流量が定義できる



2端子フロー

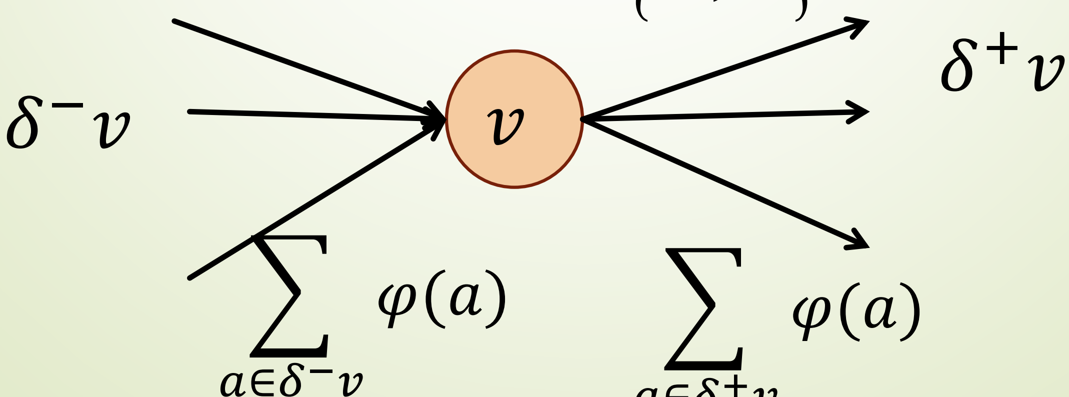
- グラフ$G = (V, A)$
- 入り口$s^+ \in V$と出口$s^- \in V$が定義され、s^+からs^-への有向道がある。
- $\forall a \in A$に、流量上限(capacity)$c(a) \geq 0$が定義されている。
- $\forall a \in A$に、流量(flow)$c(a) \geq \varphi(a) \geq 0$が設定される。
- $N = (G(V, A), s^+, s^-, c)$

流量に対する制約

- 容量制約：$0 \leq \varphi(a) \leq c(a)$
- 流量保存則：頂点vで「湧きだし」、「吸い込み」がない

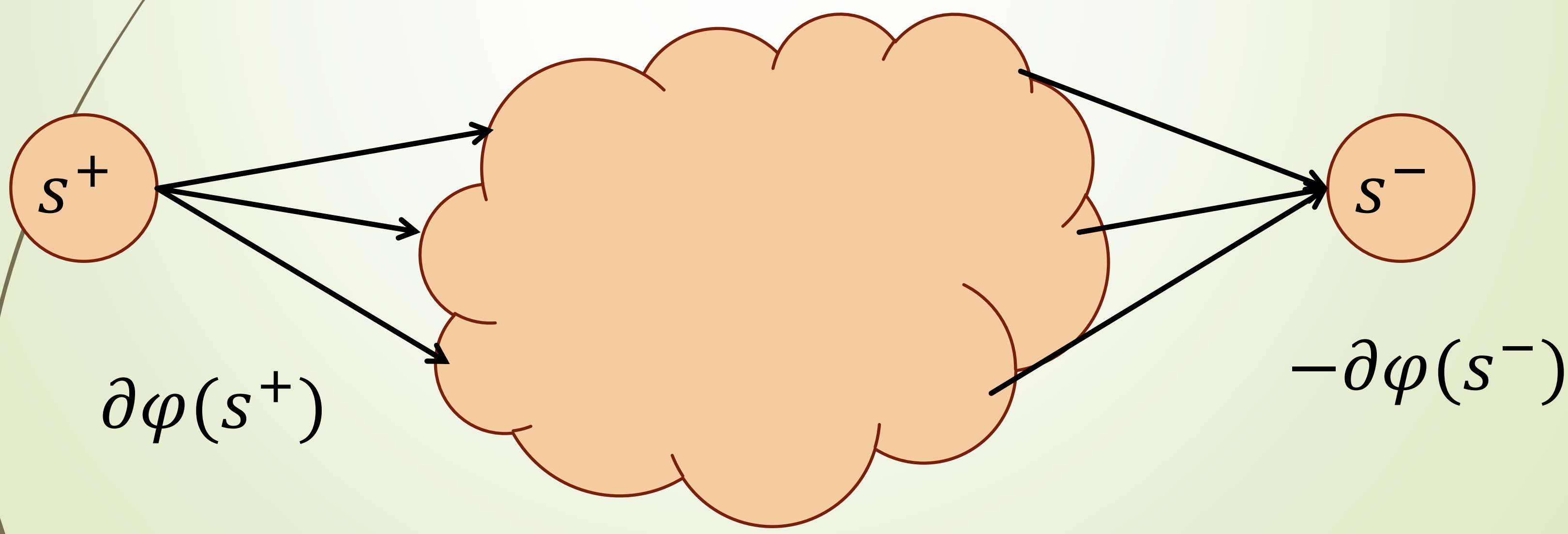
$$\partial\varphi(v) \equiv \sum_{a \in \delta^+ v} \varphi(a) - \sum_{a \in \delta^- v} \varphi(a) = 0$$

$$\forall v \in V \setminus \{s^+, s^-\}$$



ネットワークフローのイメージ

- ネットワークの流量：
  - $Q(\varphi) = \partial\varphi(s^+) = -\partial\varphi(s^-)$
- s^+で出た流れは全てs^-へ至る



カット(cut)

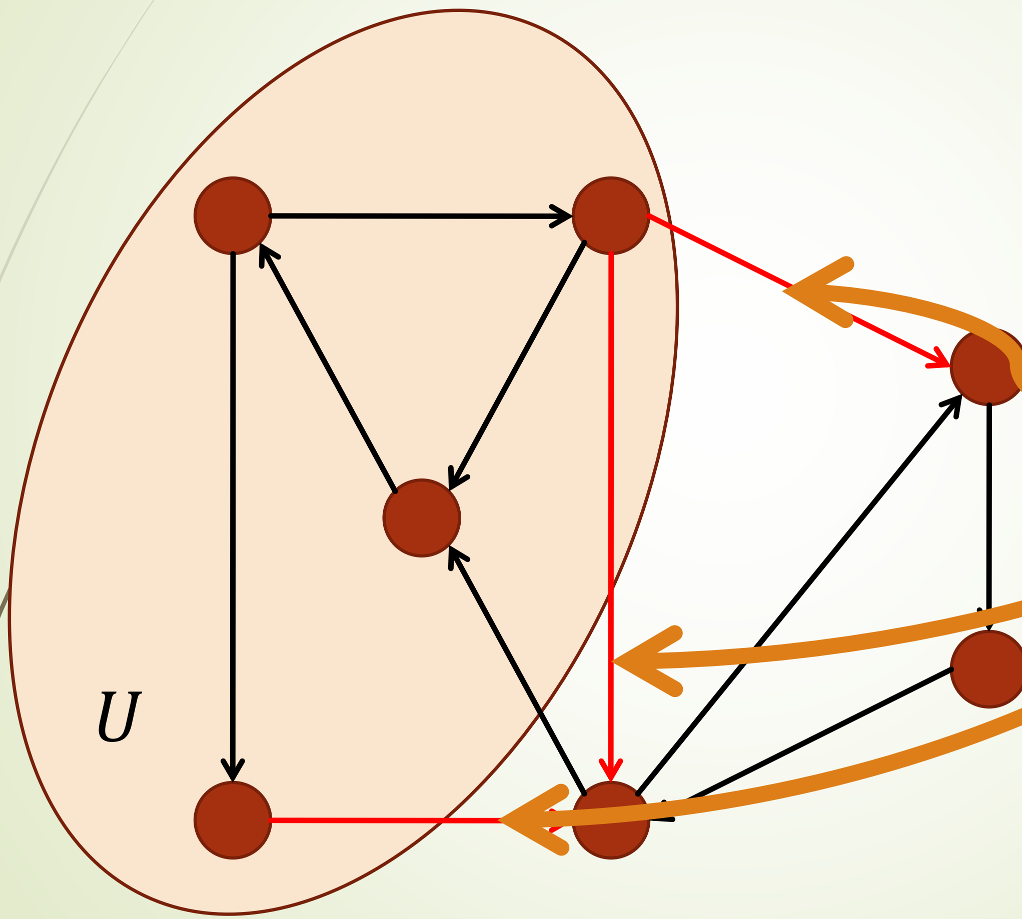
- ネットワークのカット：$U \subset V$
  - $(s^+ \in U) \wedge (s^- \notin U)$となる点の集合
  - s^+を含み、s^-を含まない点の集合
- カットの容量
  - $\Delta^+ U$：Uから出て、$U \setminus V$へ入る弧の全体の容量の和

$$\kappa_{\mathrm{C}}(U) = \sum_{a \in \Delta^+ U} c(a)$$

カットとその境界

→ Δ^+U

$$\kappa_{\mathrm{C}}(U) = \sum_{a\in\Delta^+U} c(a)$$



→ Δ^-U

流量とカット

- N 中の任意のフロー φ と任意のカット U に対して次が成り立つ。
  - $Q(\varphi) \leq \kappa_{\mathrm{C}}(U)$
- 直観的には、湧きだしと吸い込みの途中のボトルネックで流量の上限が抑えられていること。

$U \setminus V$からUへ向かう弧の容量の和

- 証明

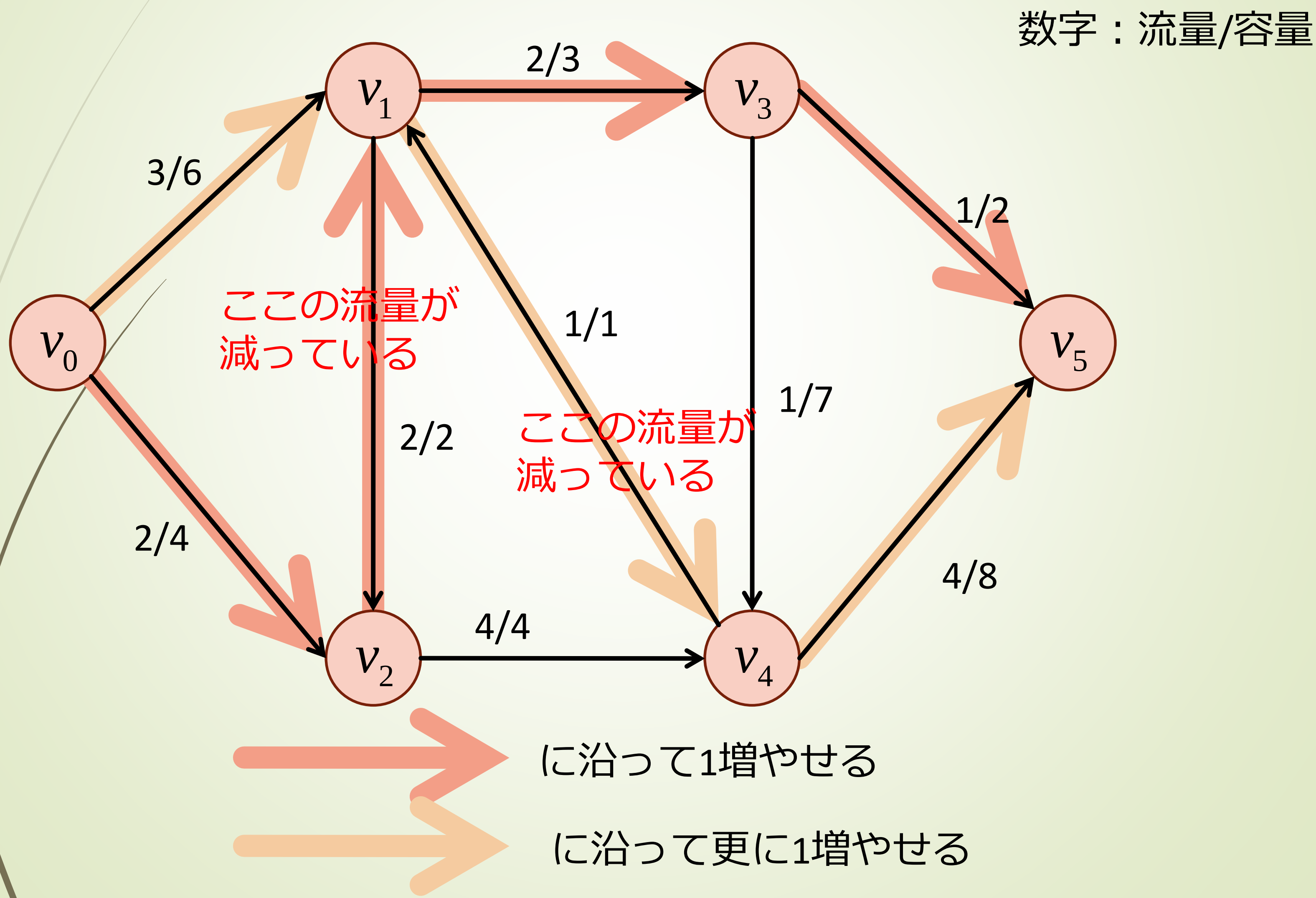
$$Q(\varphi) = \sum_{a \in \Delta^{+}U} \varphi(a) - \sum_{a \in \Delta^{-}U} \varphi(a) \leq \sum_{a \in \Delta^{+}U} c(a) - 0 = \kappa_{\mathrm{C}}(U)$$

最大流量と最小カット

$$\max\{Q(\varphi)\} \leq \min\{\kappa_{\mathrm{C}}(C)\}$$

- 実は、等号が成り立つ（後述）
  - ようするに、ボトルネックで最大流量が決まるということ

最大フローを見付ける考え方



補助ネットワーク(Auxiliary Network)

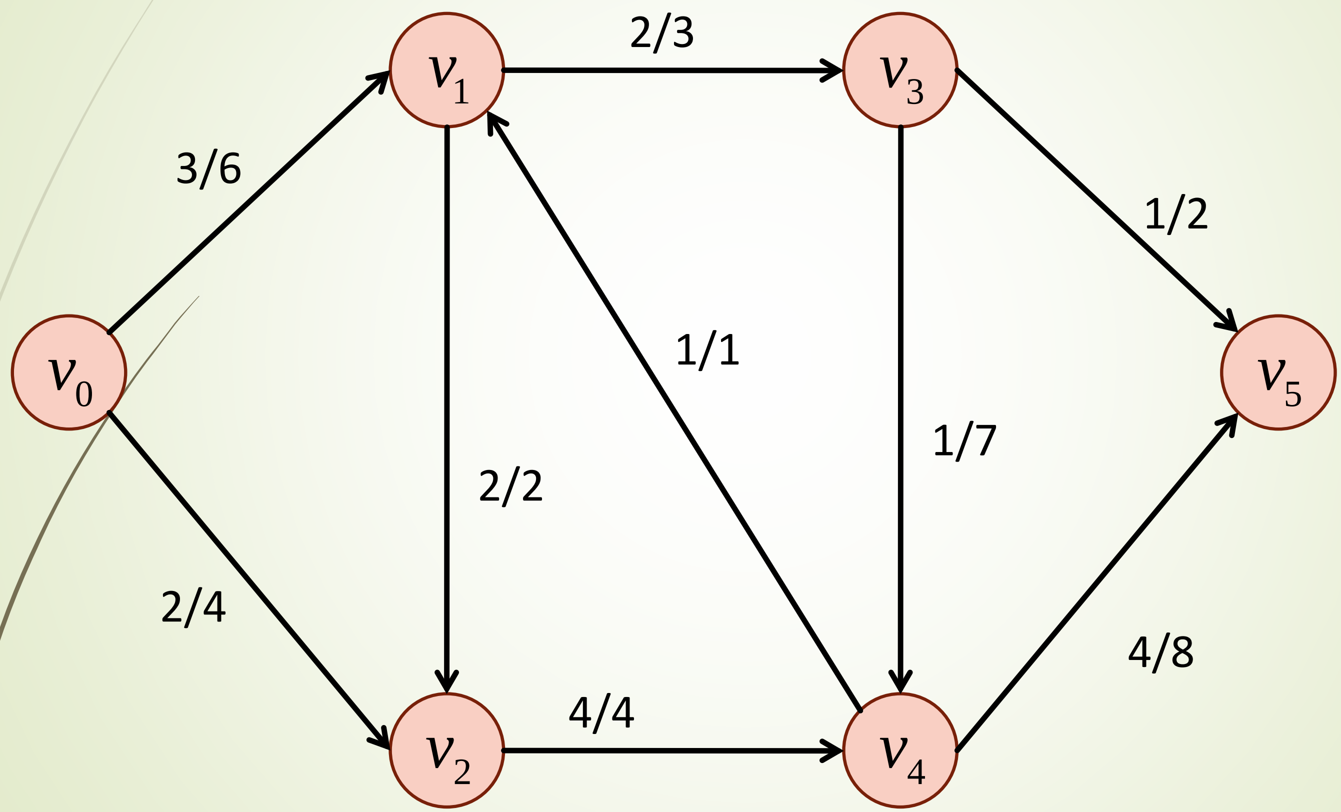
- $N_A = \left(G_\varphi\left(V, A_\varphi\right), s^+, s^-, c_\varphi\right)$
- $A_\varphi = A_\varphi^+ \cup A_\varphi^-$
  - A_φ^+ ：元のネットワークと順方向の容量に余裕のある弧の集合
  - A_φ^- ：元のネットワークと逆方向の弧の集合。ただし、流量0の弧を除く。

補助ネットワークの構成

- 元のネットワークGの$\forall a \in A$に対して、$\varphi(a) < c(a)$ならば
  - $A_\varphi^+ \leftarrow A_\varphi^+ \cup \{a\}$：弧の追加
  - $c_\varphi(a) \leftarrow c(a) - \varphi(a)$：容量の設定：残りの容量
  - $\varphi(a) = c(a)$である弧はA_φ^+に追加されないことに注意
- $0 < \varphi(a)$ならば
  - $A_\varphi^- \leftarrow A_\varphi^- \cup \{b\}$：$a$と逆向きの弧$b$を追加
  - $c_\varphi \leftarrow \varphi(a)$：容量設定：削減可能流量
  - 容量が0の弧以外は全て含まれる
  - 元のグラフと逆向きの弧である

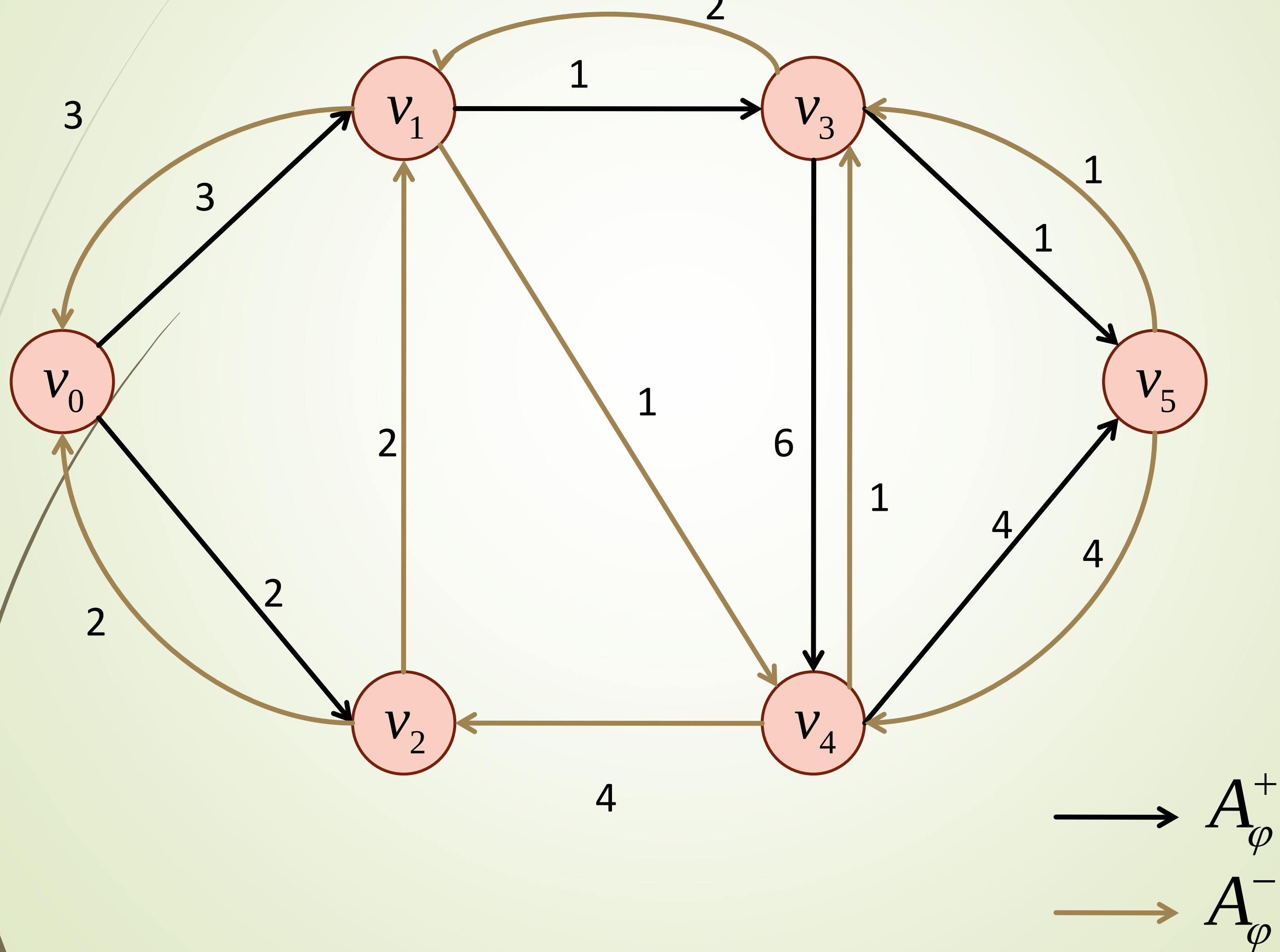
補助ネットワークの構成

数字：流量/容量



補助ネットワークの構成

数字：容量



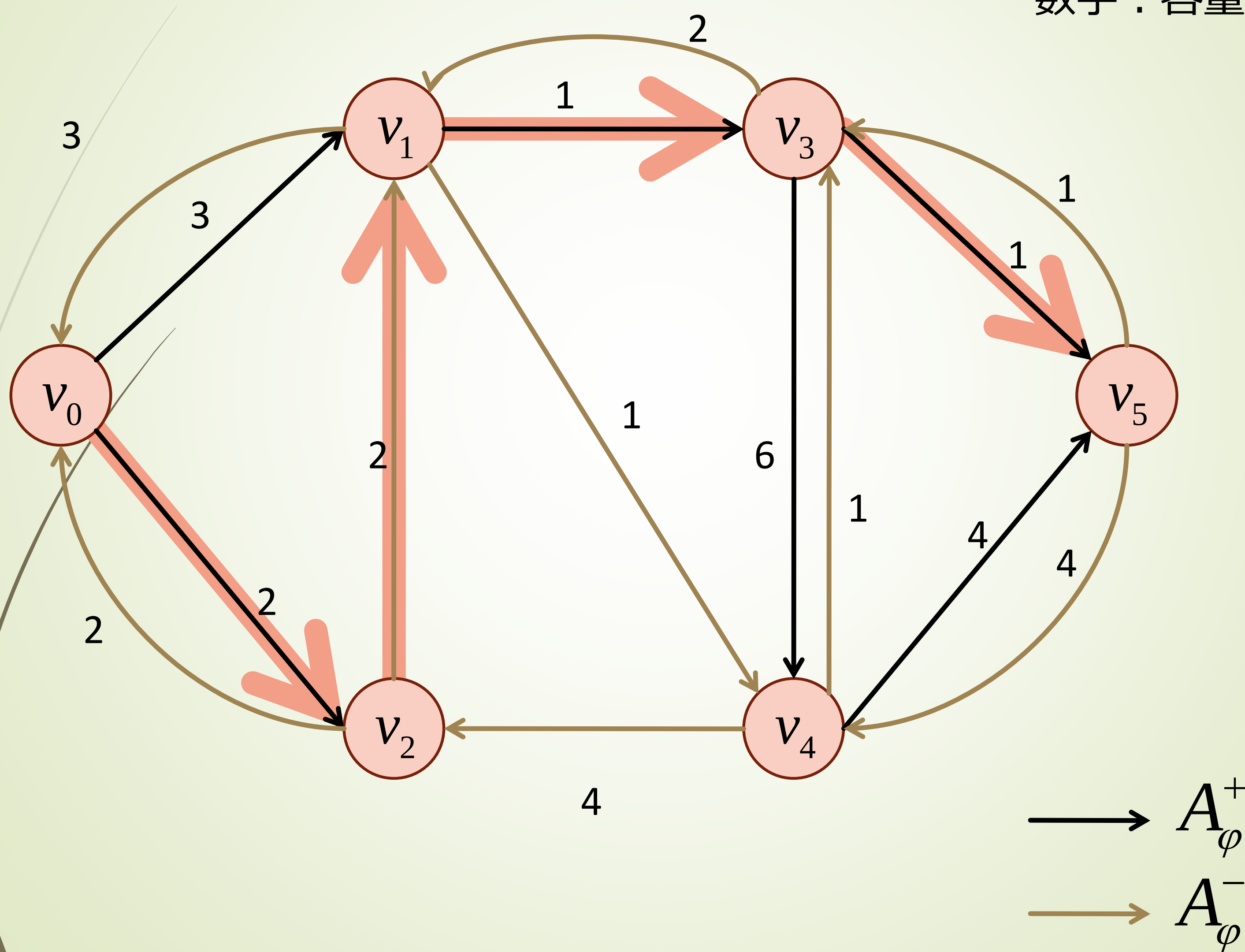
- 補助ネットワーク中にs^+からs^-への有向道Pがあれば$d = \min(c_\varphi(a) | a \in P)$　だけ流量を増やすことができる。
  - Pを「増加道」と呼ぶ
- このときの補助ネットワーク中の新しい流量

$$\varphi'(a) = \begin{cases} \varphi(a) + d & \text{for } a \in A_\varphi^+ \wedge a \in P \\ \varphi(a) - d & \text{for } a \in A_\varphi^- \wedge a \in P \\ \varphi(a) & \text{otherwise} \end{cases}$$

- 容量cが整数関数ならば、流量は整数

補助ネットワーク内の増加道

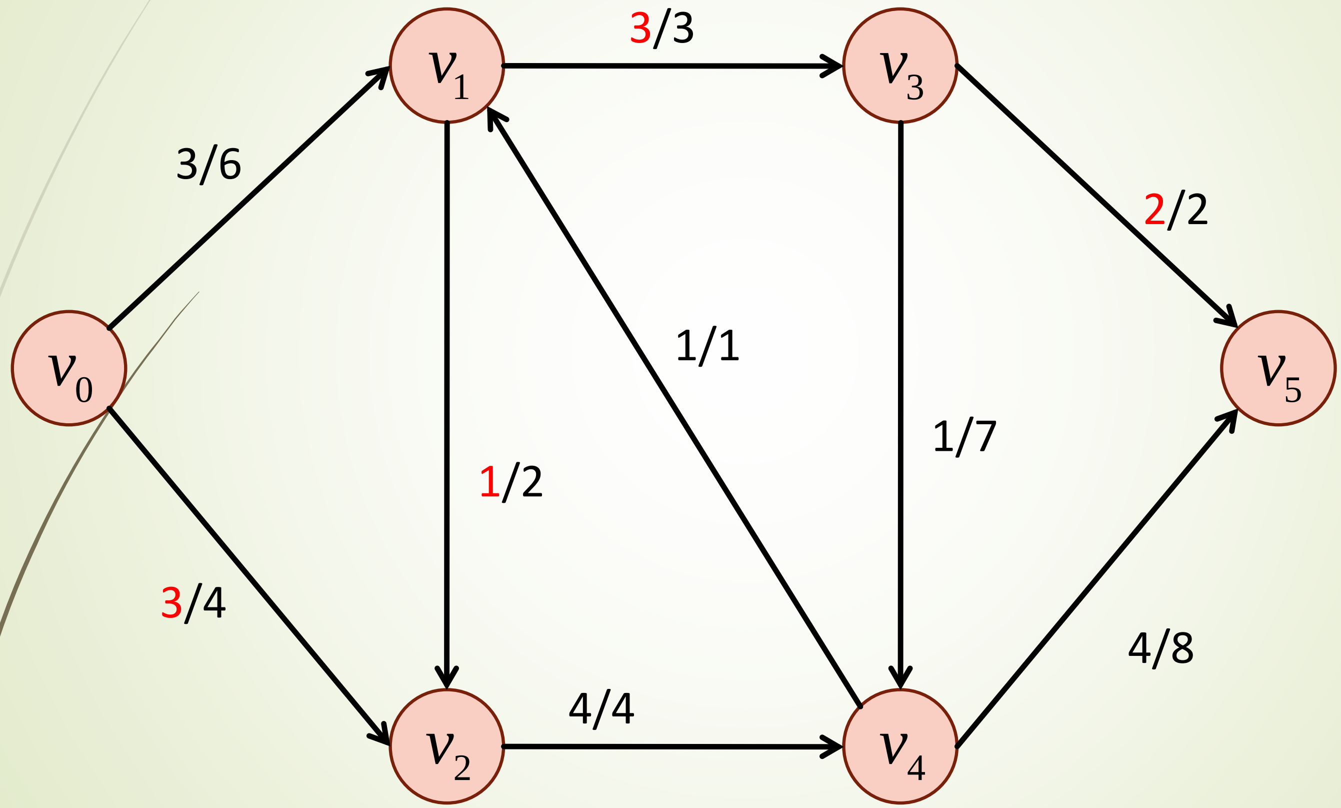
数字：容量



$$d = 1$$

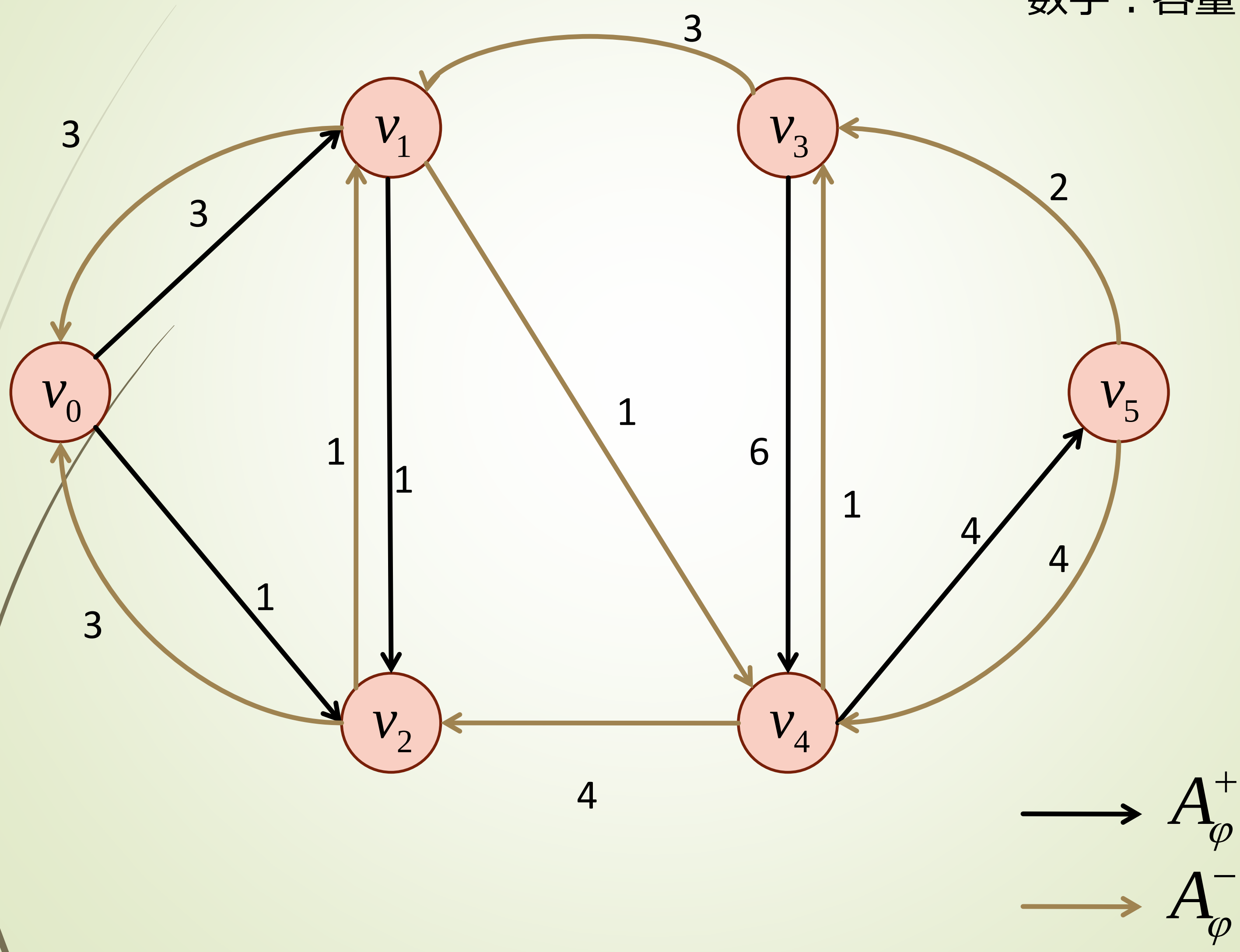
流量增加

数字：流量/容量



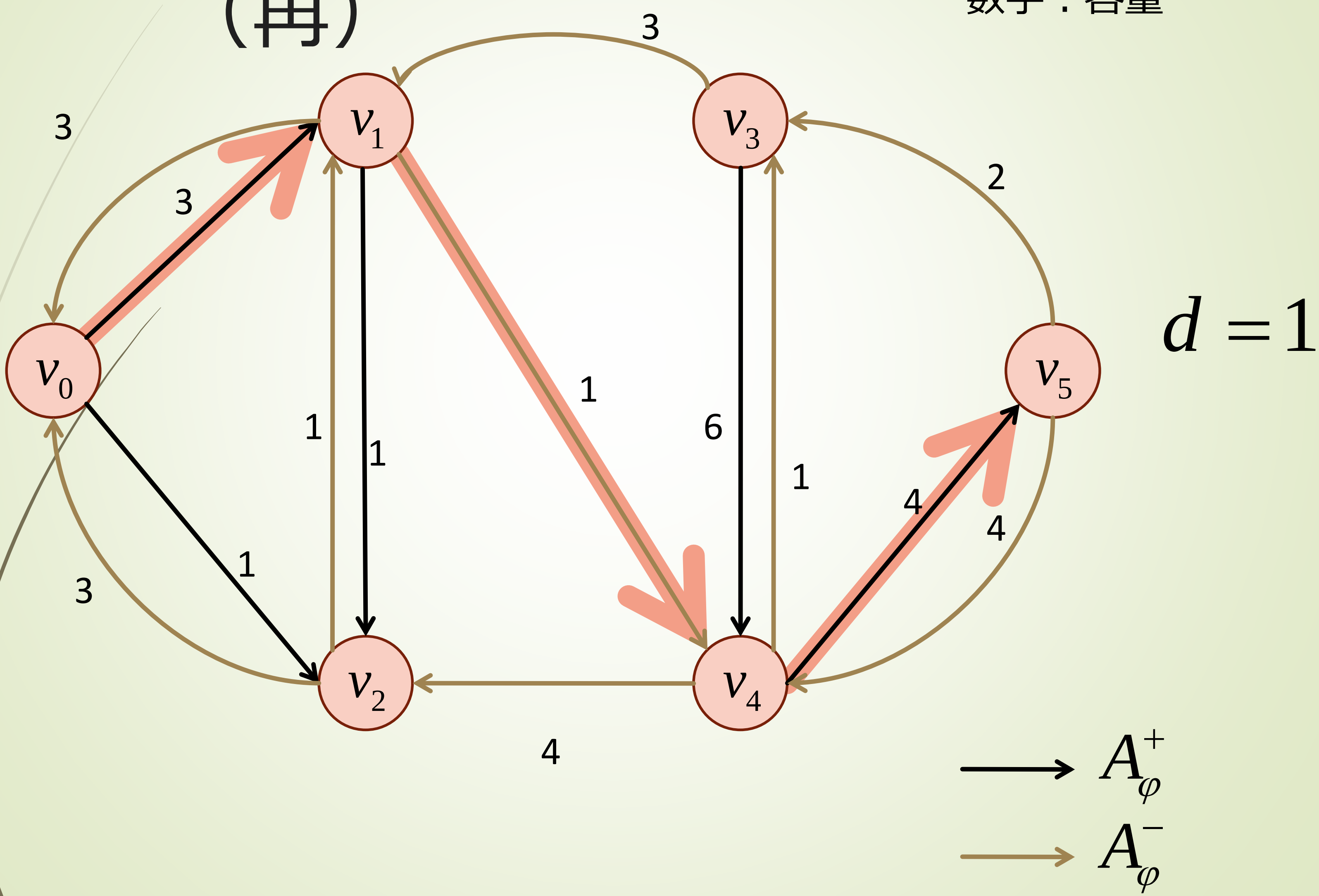
補助ネットワークの更新

数字：容量



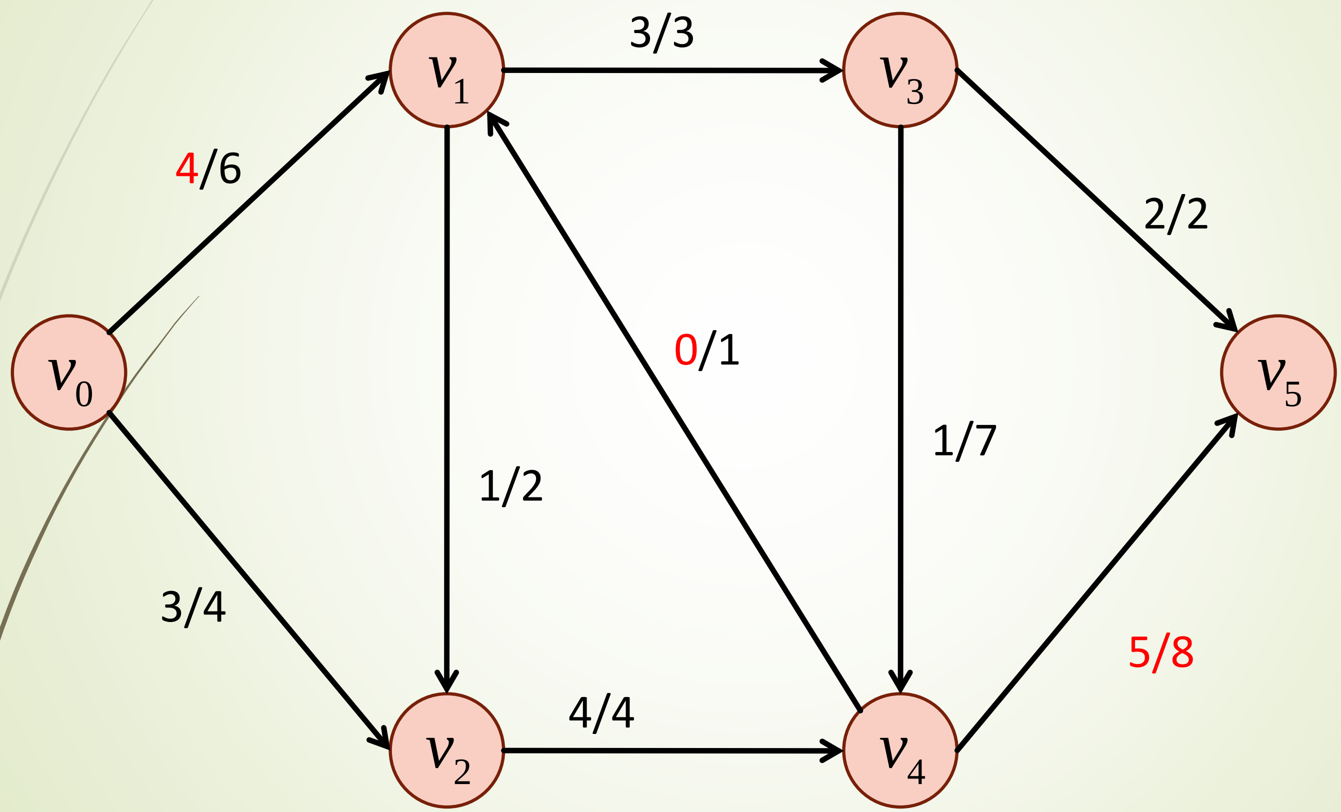
補助ネットワーク内の増加道（再）

数字：容量



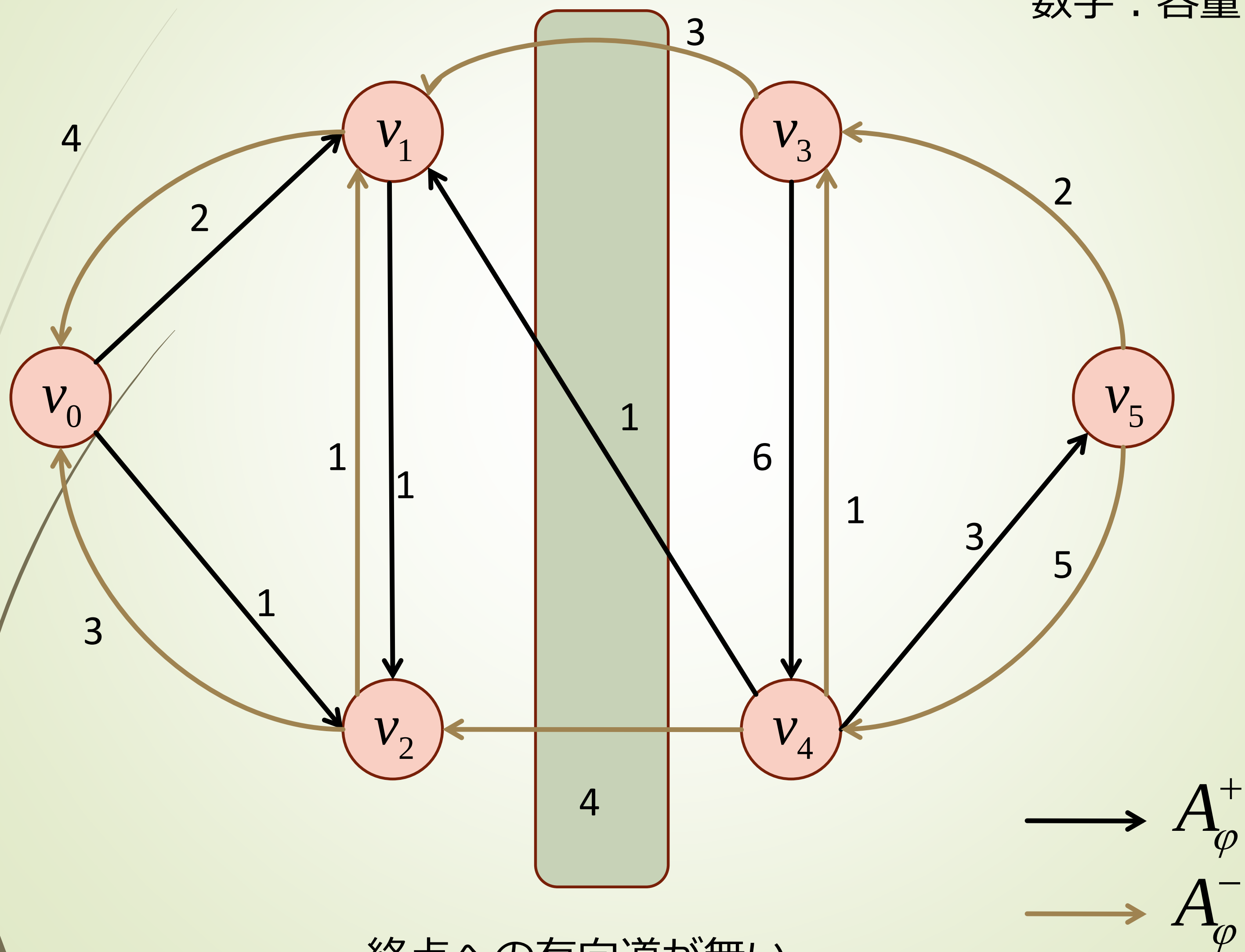
流量增加

数字：流量/容量



補助ネットワークの更新（再）

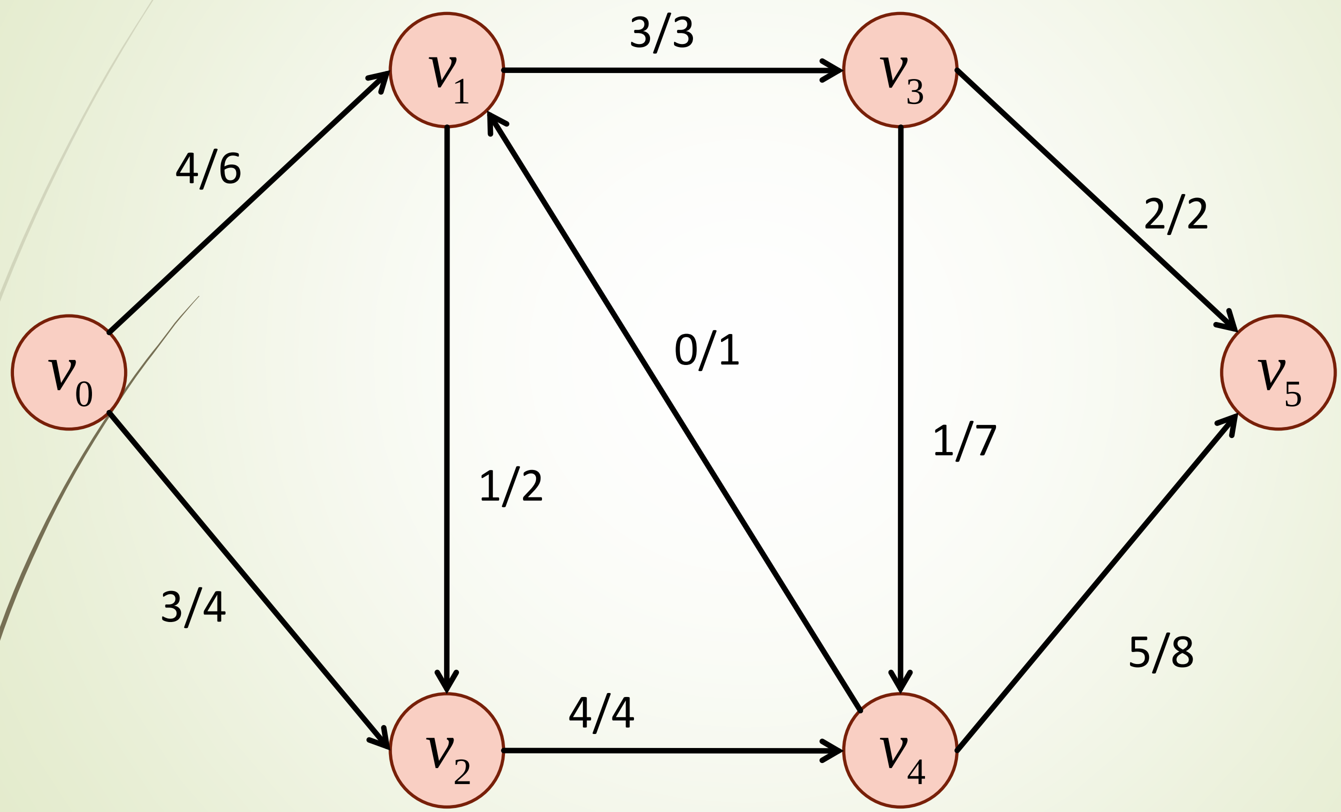
数字：容量



終点への有向道が無い

最大流量の実現

数字：流量/容量



アルゴリズムとしての整理

補助ネットワークN_Aを作る
幅優先探索で始点から終点への道Pを得る
while($P \neq \mathrm{null}$){
    $d = \min(c_{\varphi}(a) | a \in P)$
    update(N_A, P, d)：補助ネットワークを更新
    幅優先探索で始点から終点への道Pを得る
}
deploy(N_A)：元のネットワークへ反映

補助ネットワーク更新アルゴリズム

update(N_A, P, d){
　foreach($a \in P$){
　　$c_\varphi(a) \to c_\varphi(a) - d$
　　if($c_\varphi(a)$ == 0){aを削除}
　　b : $a \in A_\varphi^{\pm}$ならば対応する弧$b \in A_\varphi^{\mp}$
　if(bが存在しない) {bを生成し、$c_\varphi(b) = d$}
　else { $c_\varphi(b) \to c_\varphi(b) + d$}
　}
}

元のネットワークへの反映アルゴリズム

N_A：補助ネットワーク
N：元のネットワーク
deploy(N_A){
　　foreach ($a \in A$){//AはNの弧
　　　　$b \in A_{\varphi}^{-}$：aに対応する弧
　　　　$\varphi(a) = c(b)$
　　}
}

最大流量と最小カット：等号が成り立つこと

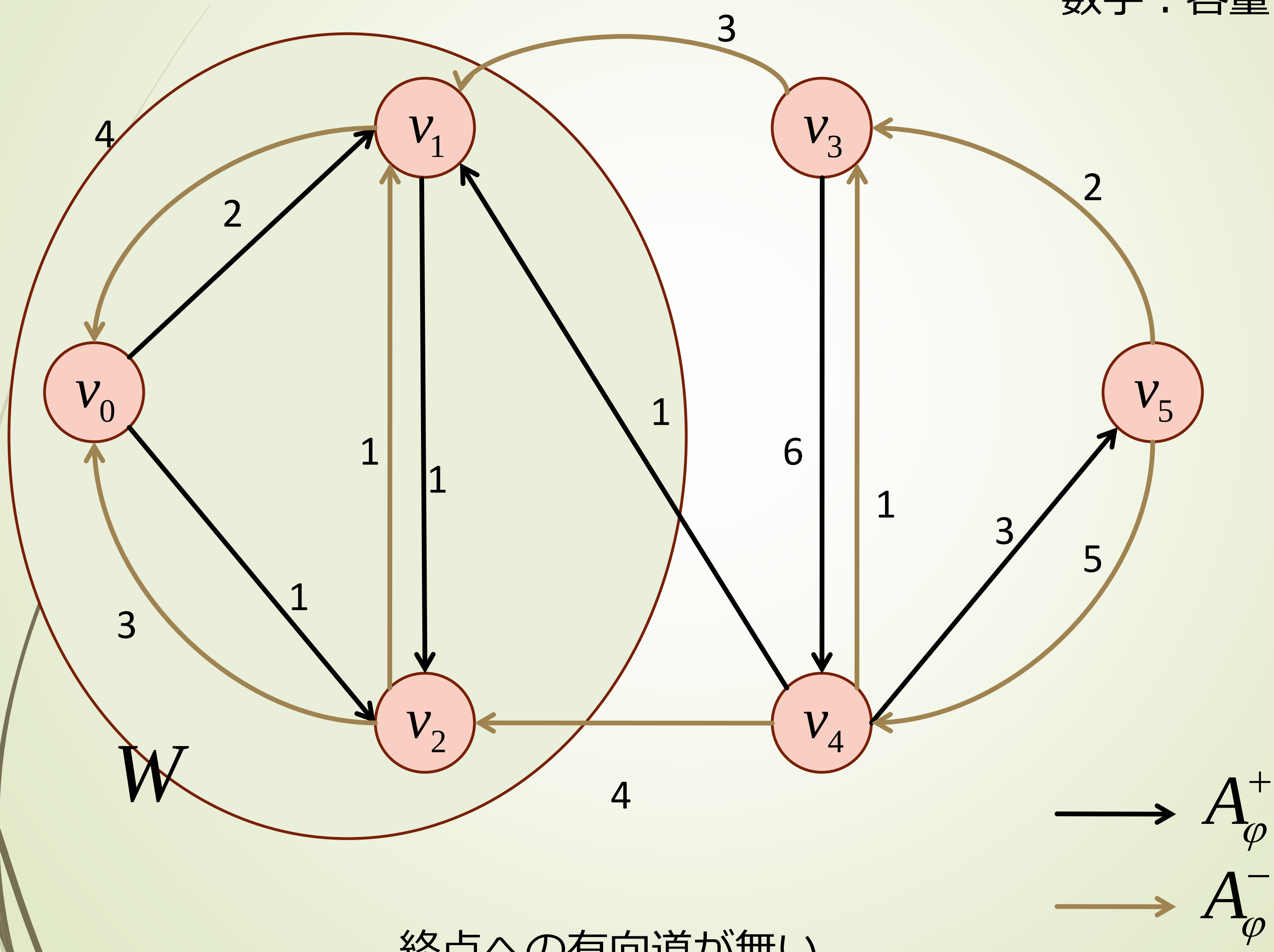
- ネットワークNの最大流量φが実現しているならば
  - 補助ネットワークN_Aにはs^+からs^-への有向道は存在しない
- $W \subset V$：補助ネットワークN_A中の、s^+から到達可能な頂点の集合、つまり補助ネットワーク中のカットの一つ

- N_A中にはWから外向きの弧は存在しない。Wへの内向きの弧aは、以下のいずれかである。
  - $\forall a \in A_\varphi^-$：対応する$N$中の弧の容量を使い切っている
    - つまり、N中の外向きの弧において$\varphi(a) = c(a)$
  - $\forall a \in A_\varphi^+$：対応する$N$中の弧の流量はゼロ
    - つまり、 N中の内向きの弧において$\varphi(a) = 0$

$$Q(\varphi) = \sum_{a \in \Delta^+ W} \varphi(a) - \sum_{a \in \Delta^- W} \varphi(a) \leq \sum_{a \in \Delta^+ W} c(a) - 0 = \kappa_{\mathrm{C}}(W)$$

補助ネットワークでのカット

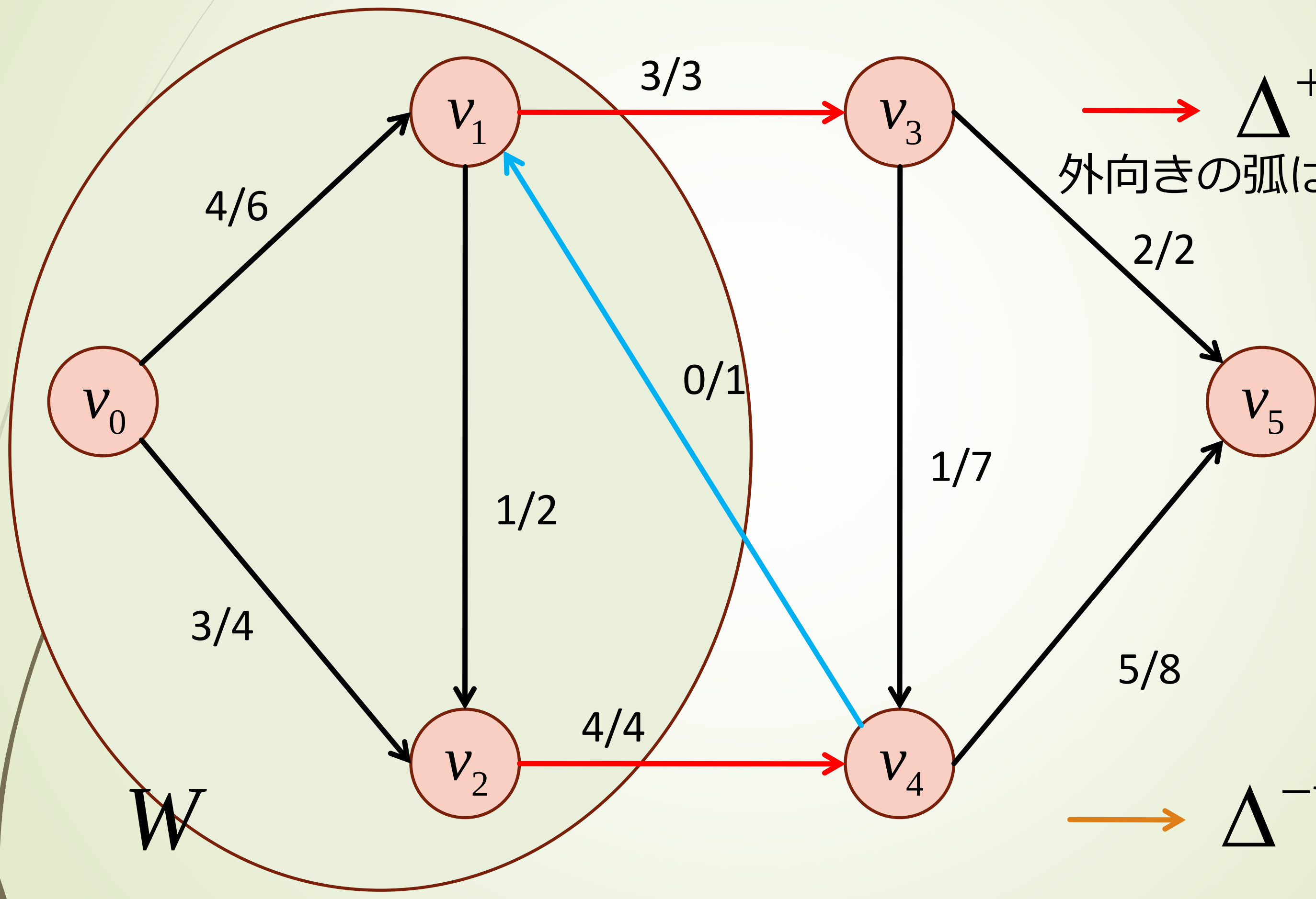
数字：容量



終点への有向道が無い

元のネットワークでのカット

数字：流量/容量



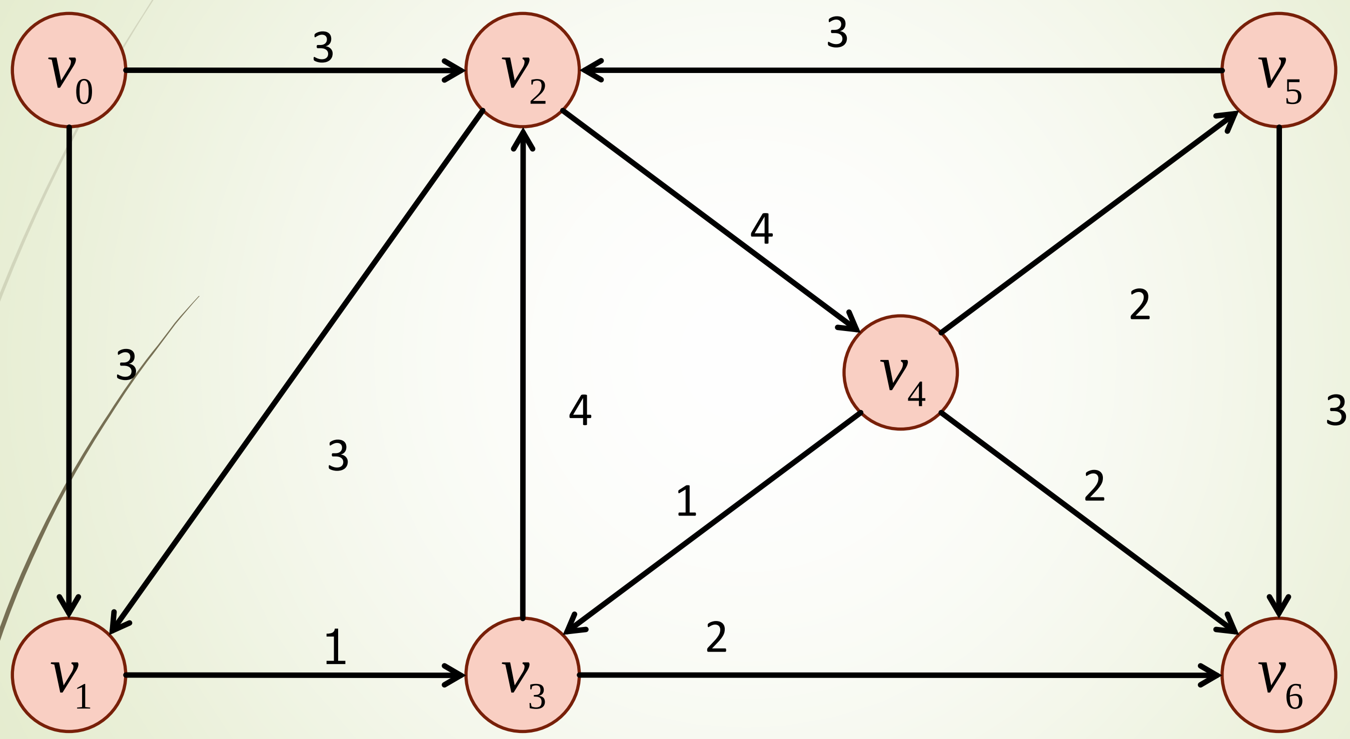
$\Delta^{+}W$

外向きの弧は容量いっぱい

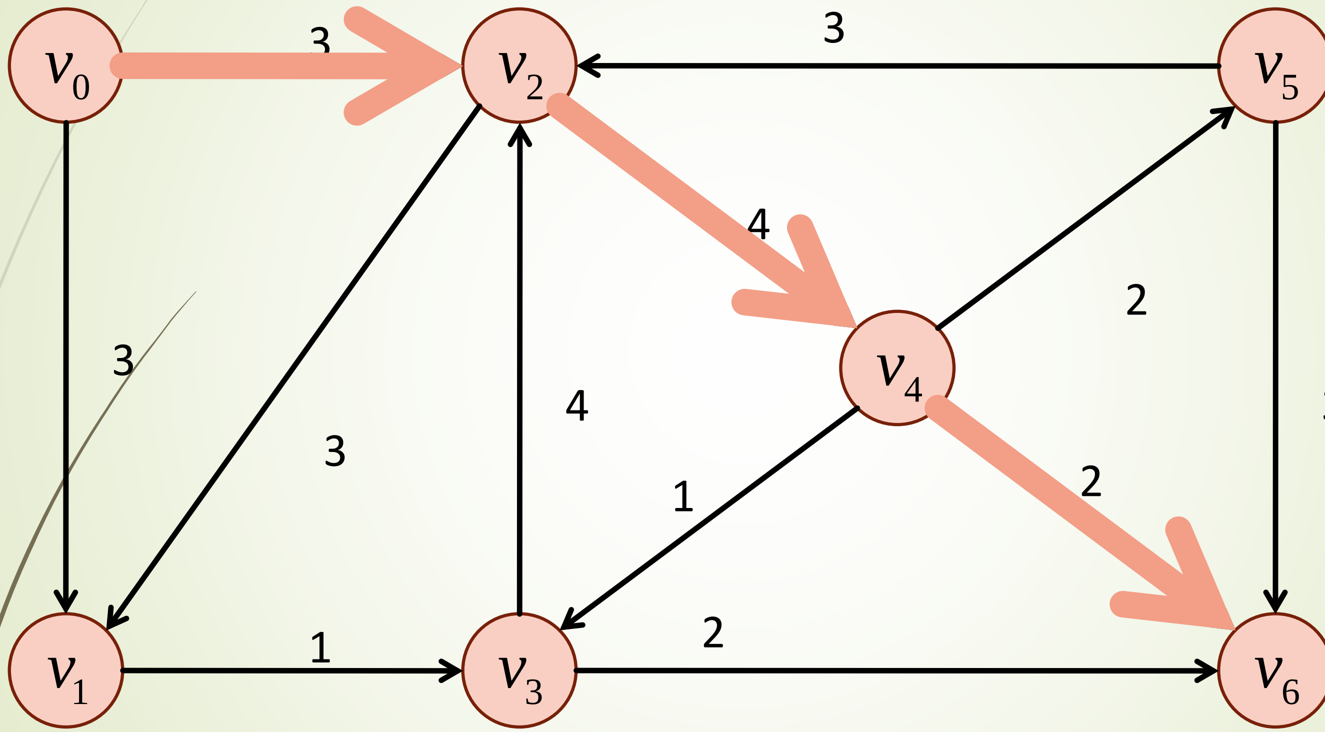
$\Delta^{-}W$

内向きの弧は流量なし

例2：$v_0 \rightarrow v_6$



例2 ：増加道探索



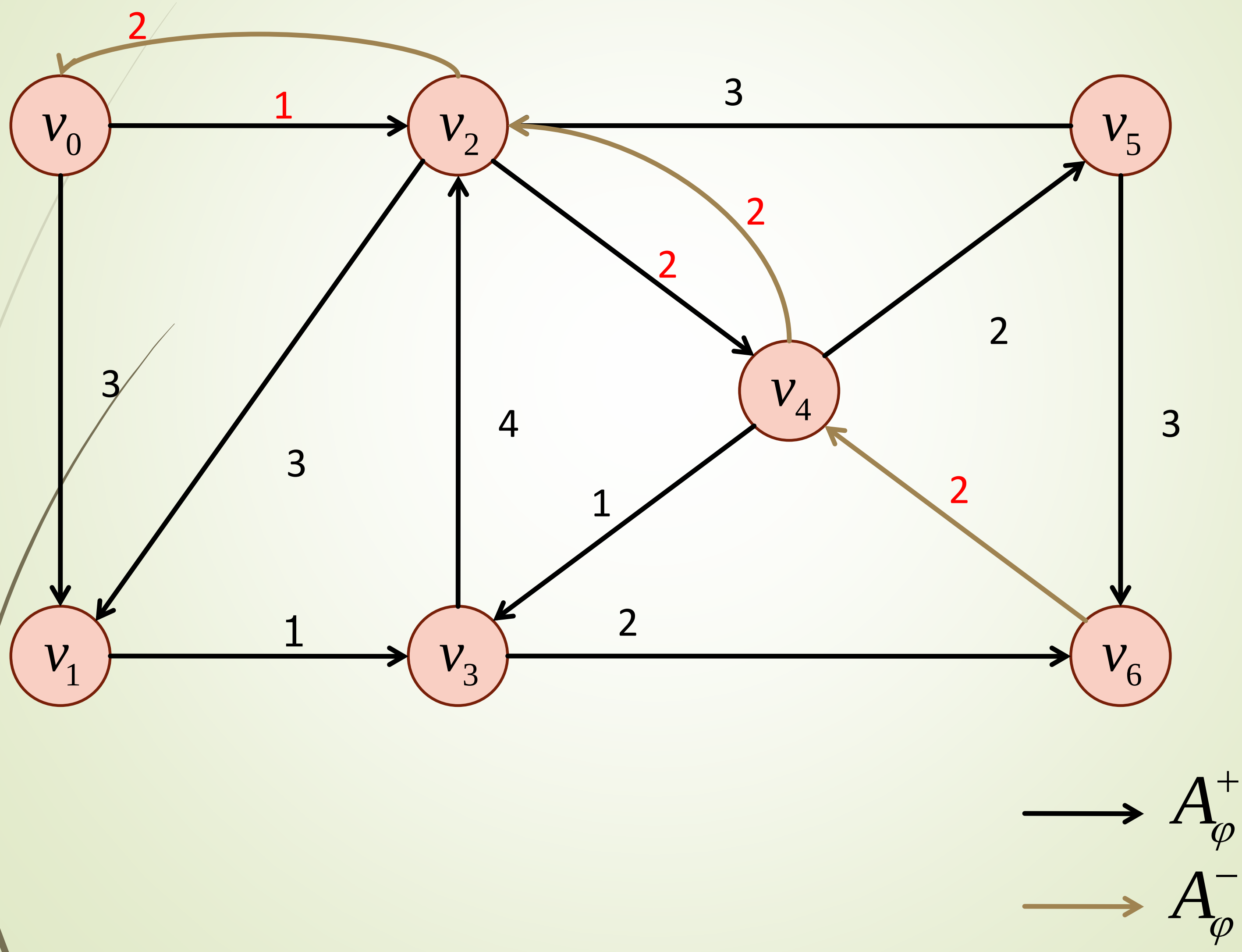
$$d = 2$$

流量0なので、逆向きは存在しない

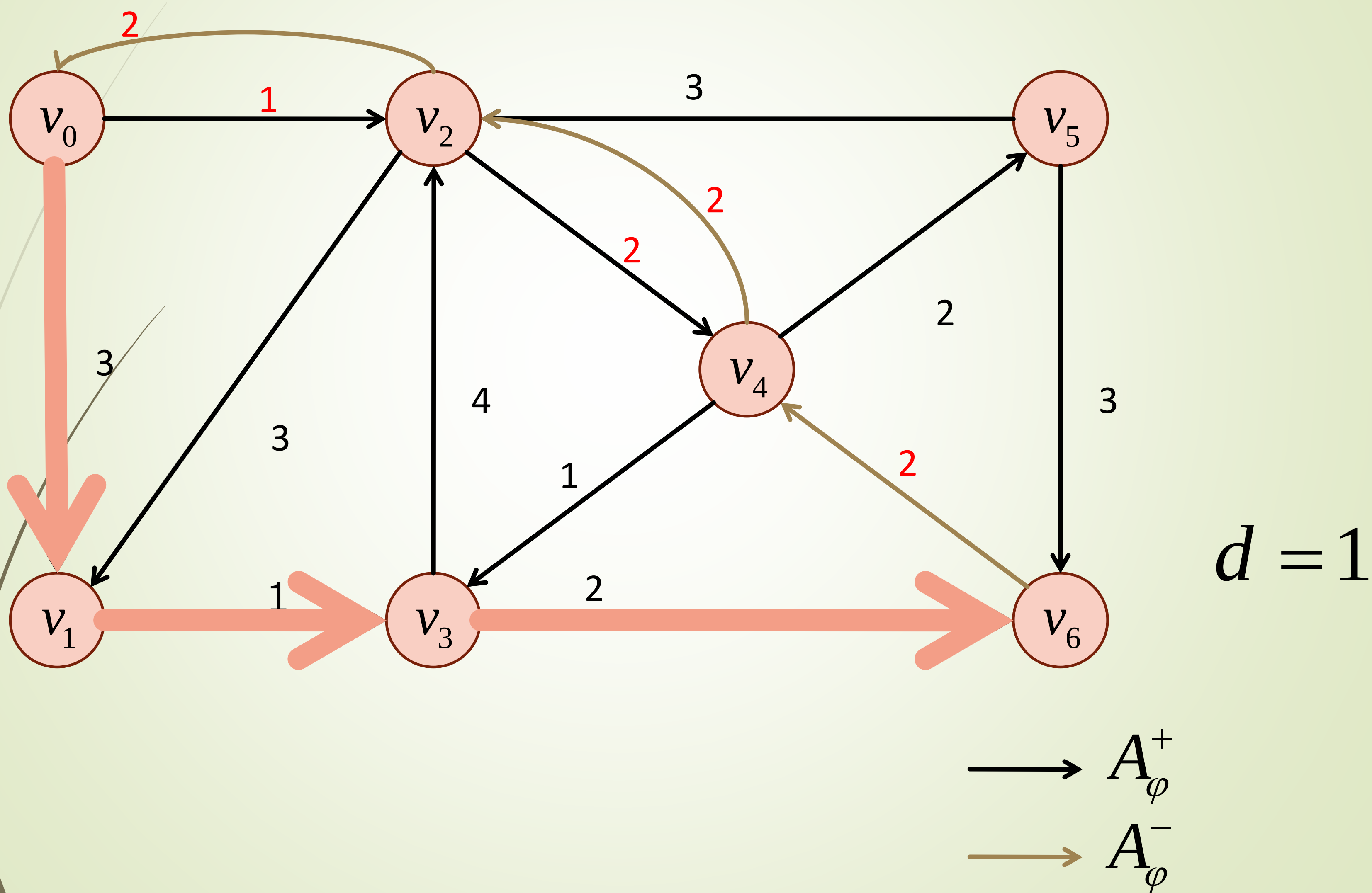
$\longrightarrow A_{\varphi}^{+}$

$\longrightarrow A_{\varphi}^{-}$

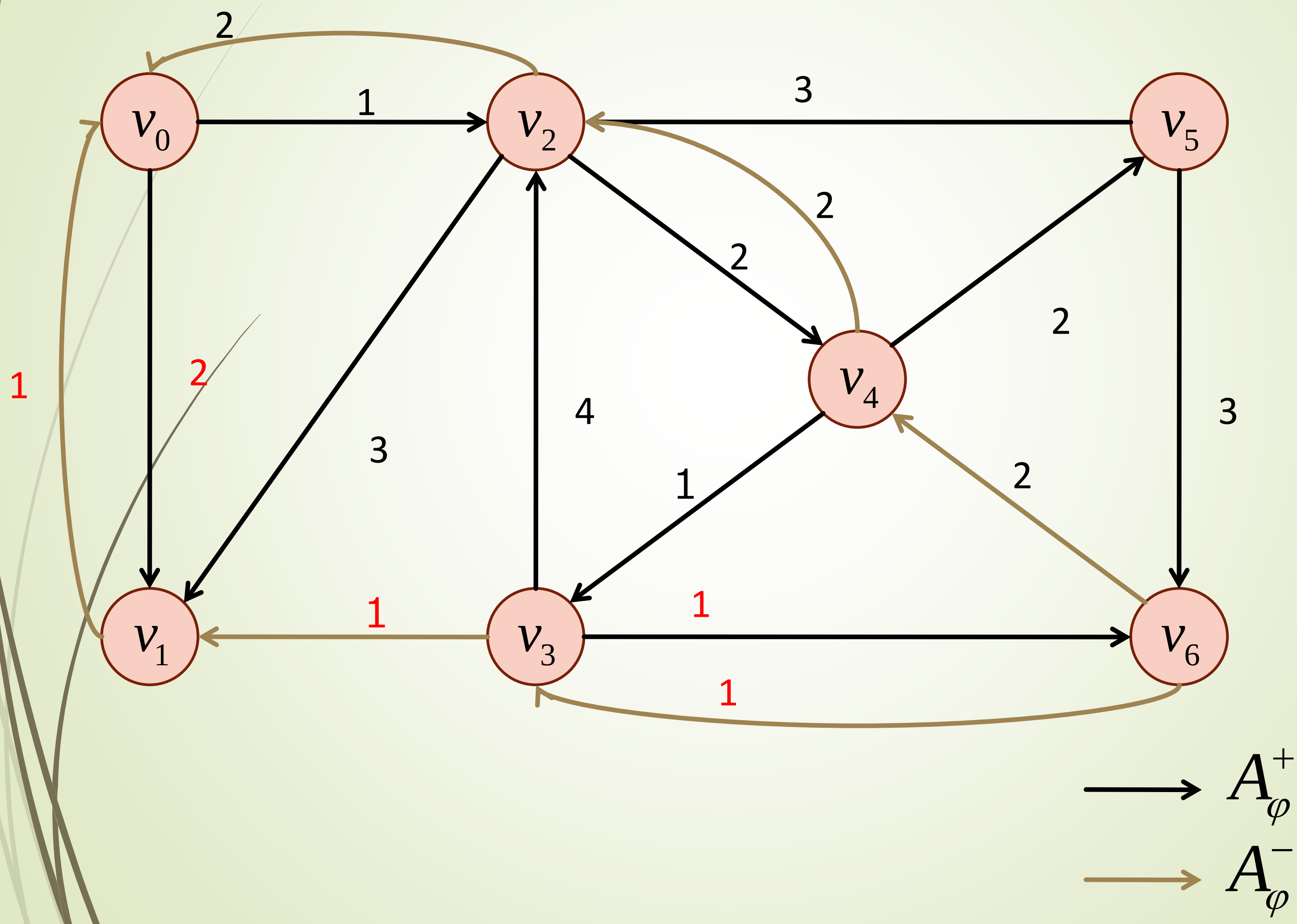
例2：補助ネットワーク更新



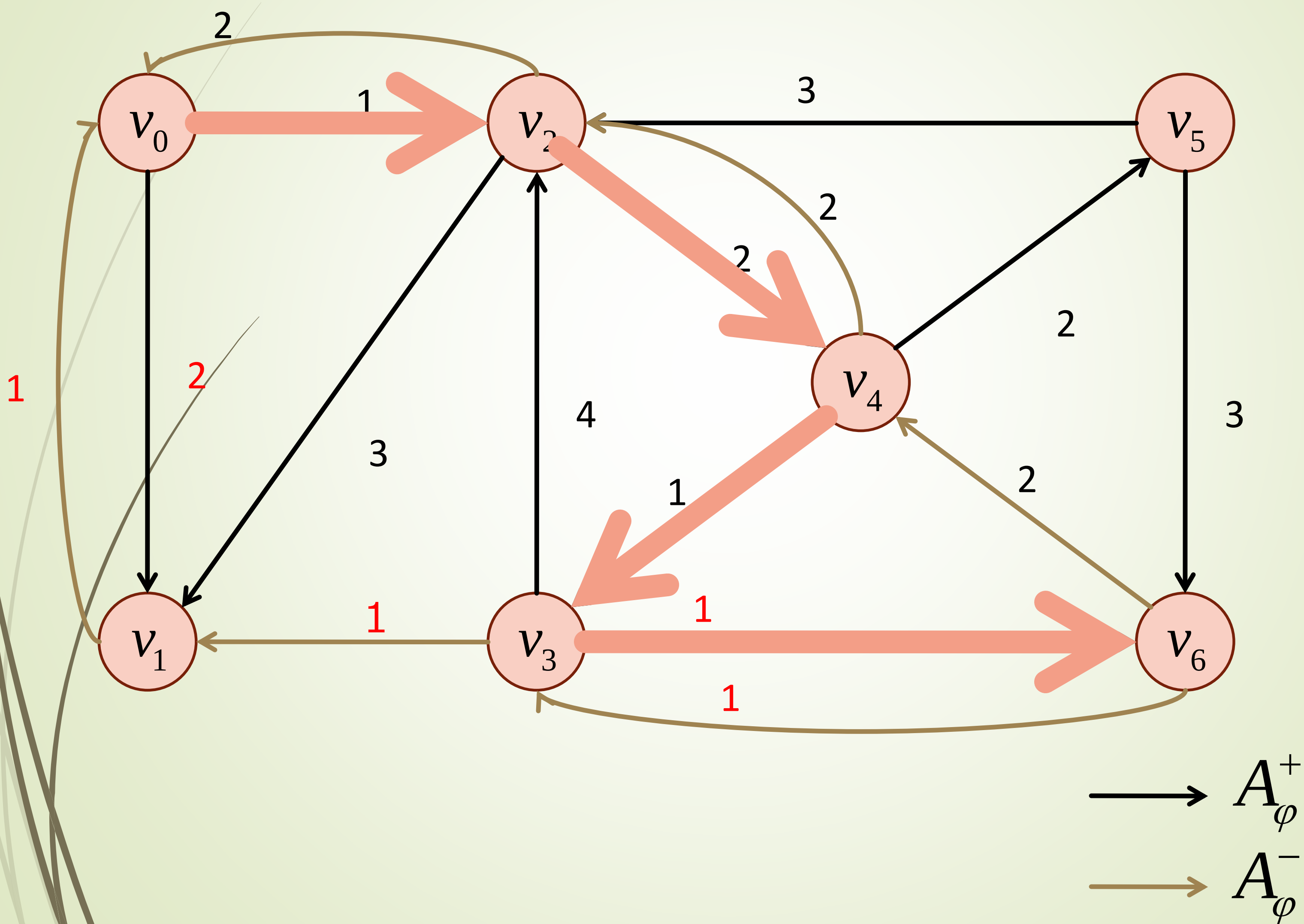
例2：增加道探索



例2：補助ネットワーク更新

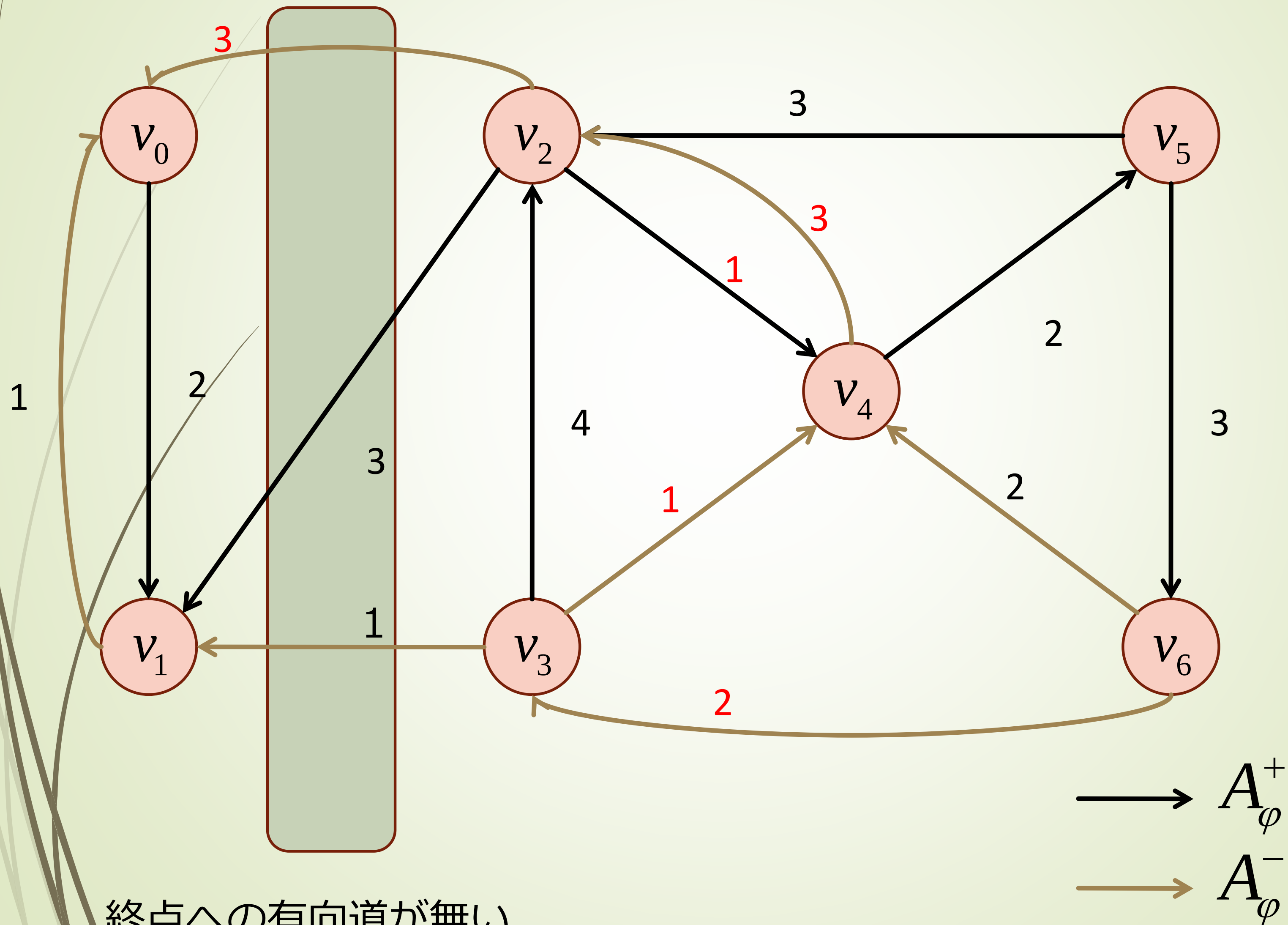


例2：補助ネットワーク更新



$$d = 1$$

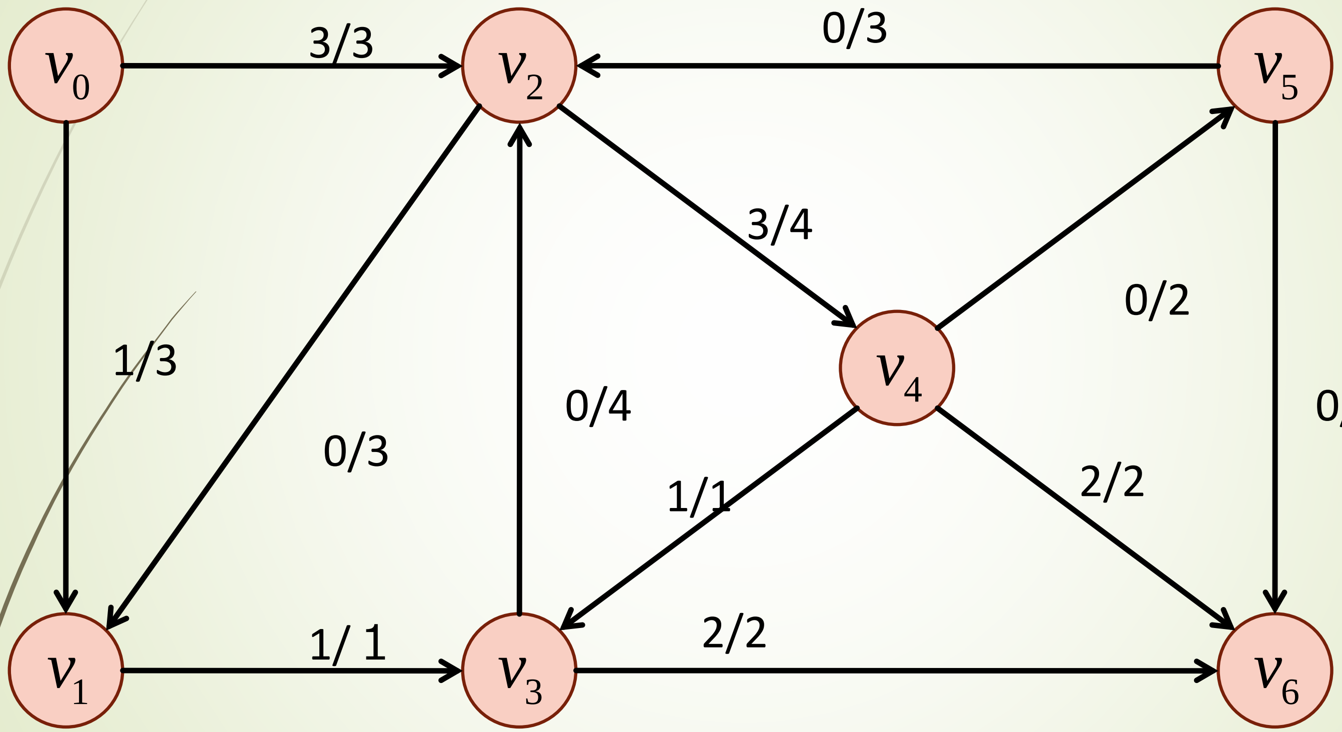
例2：補助ネットワーク更新



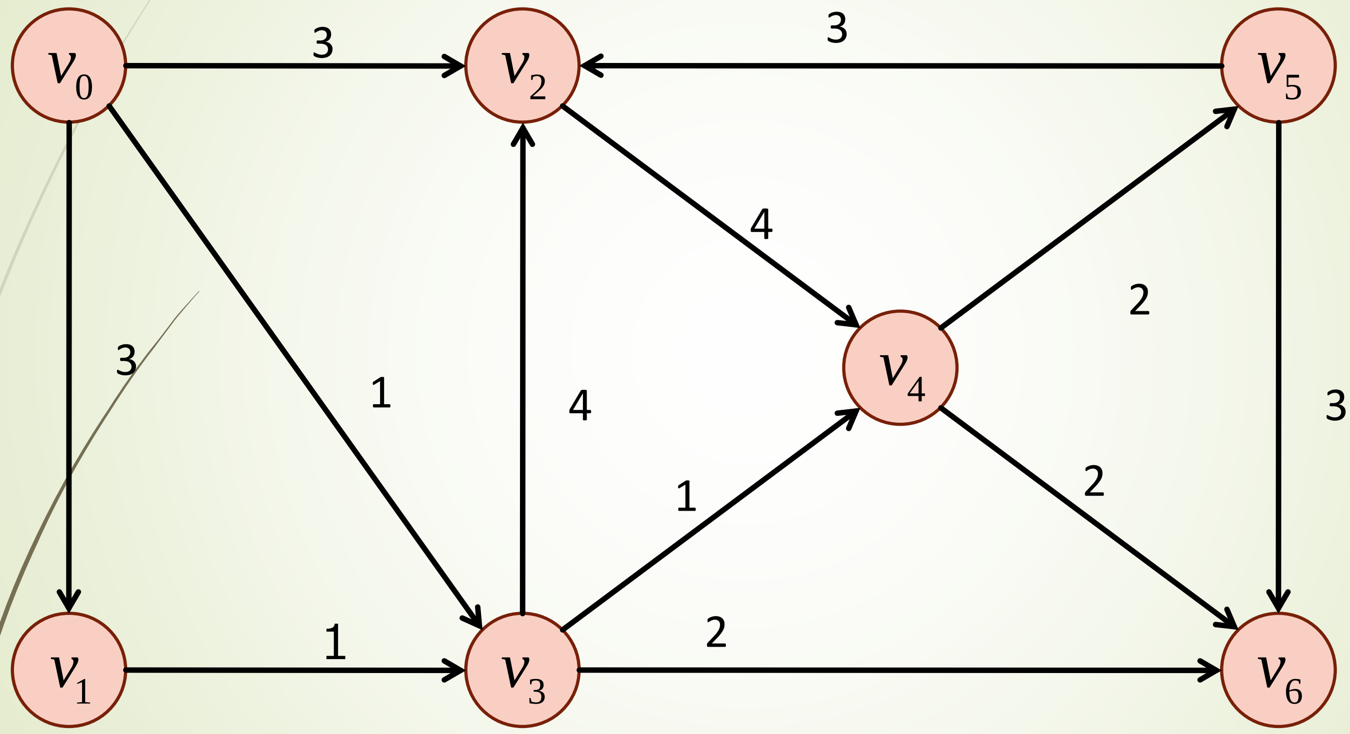
終点への有向道が無い

例2：最大流量の実現

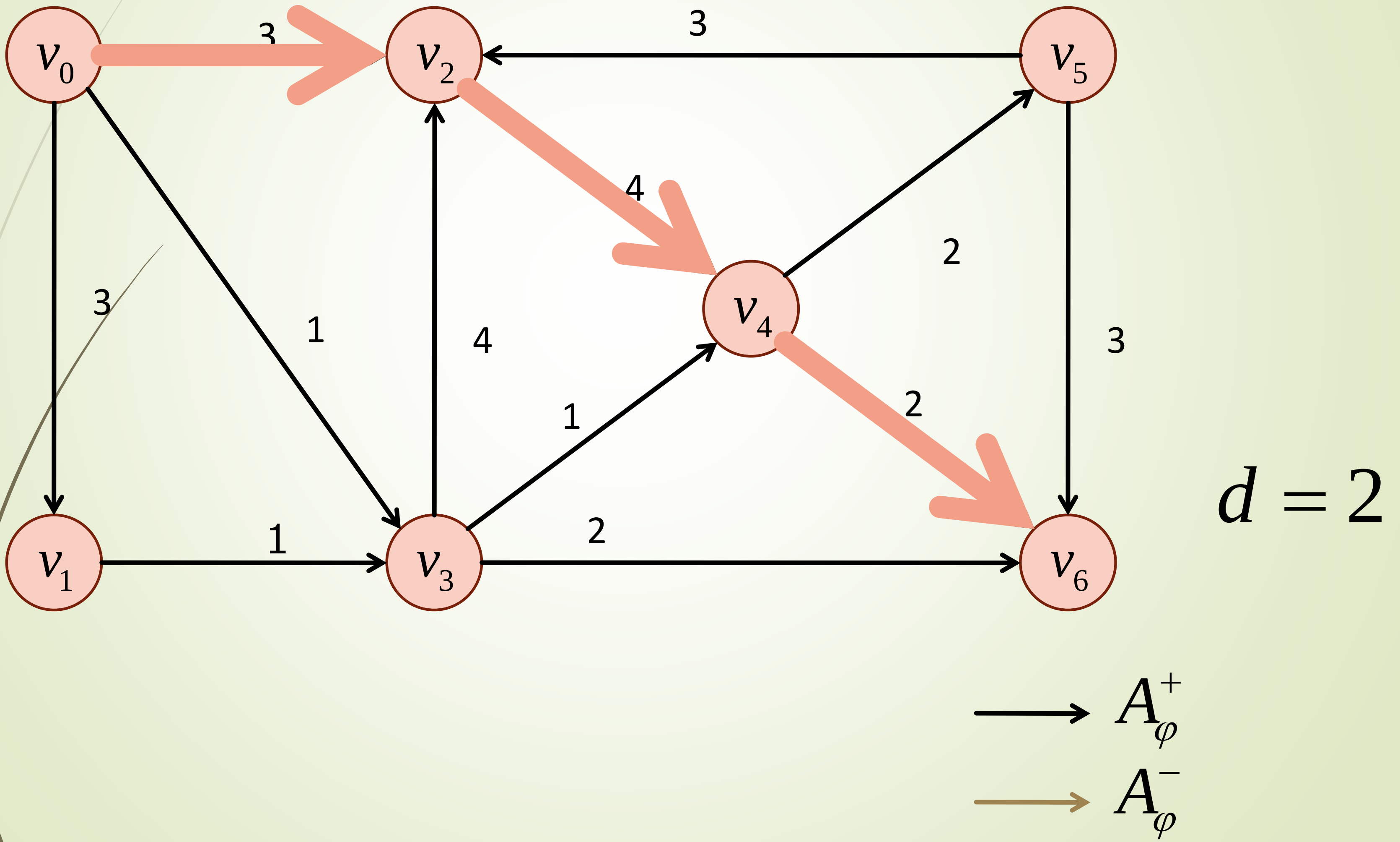
数字：流量/容量



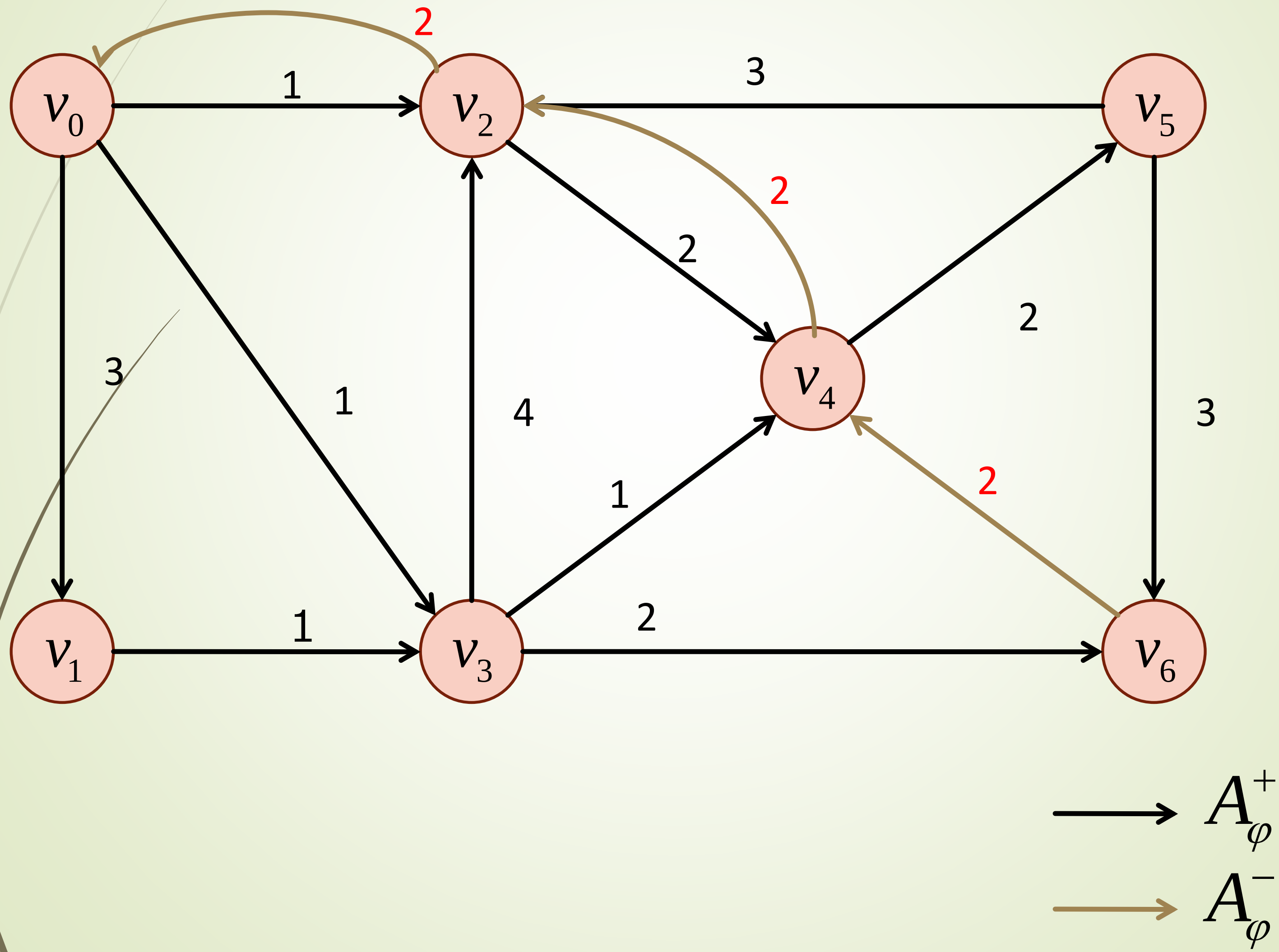
例3：$v_0 \rightarrow v_6$



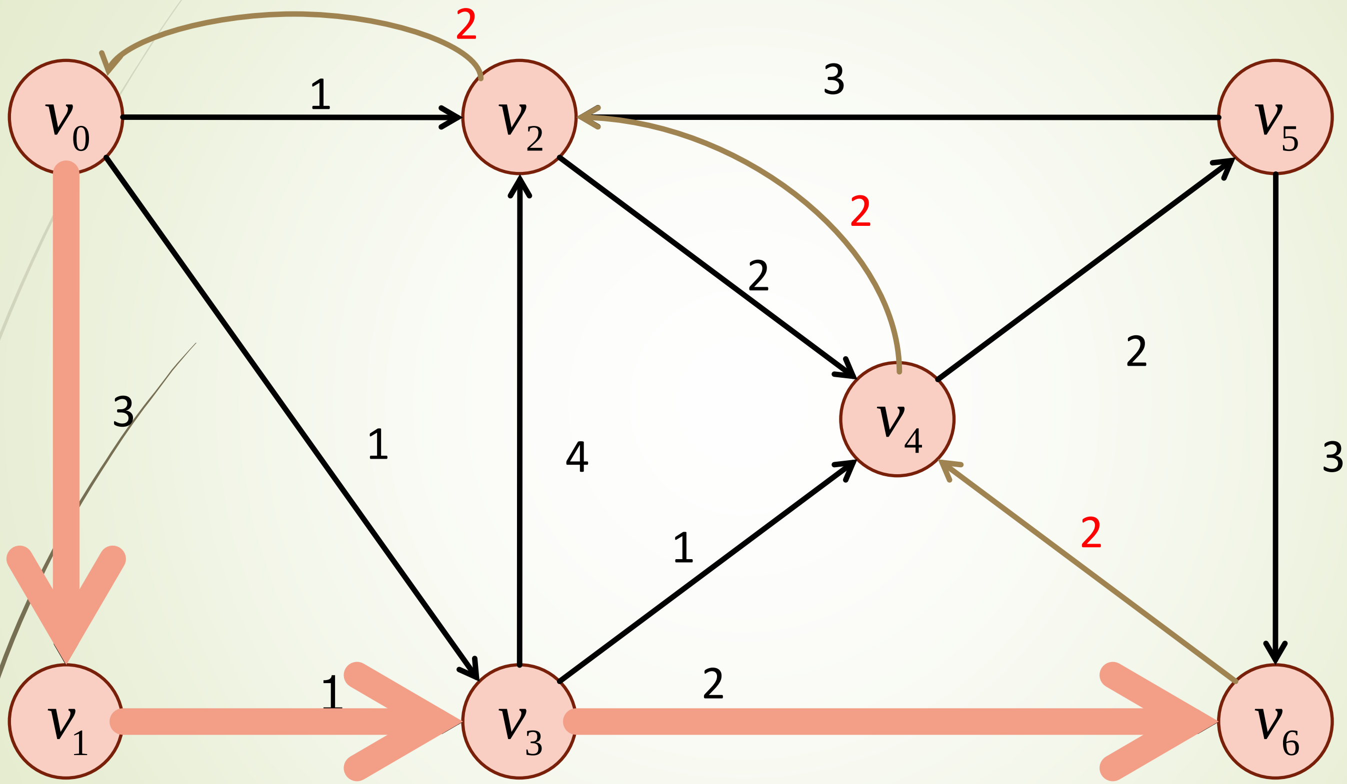
例3：增加道探索



例3：補助ネットワーク更新



例3：增加道探索

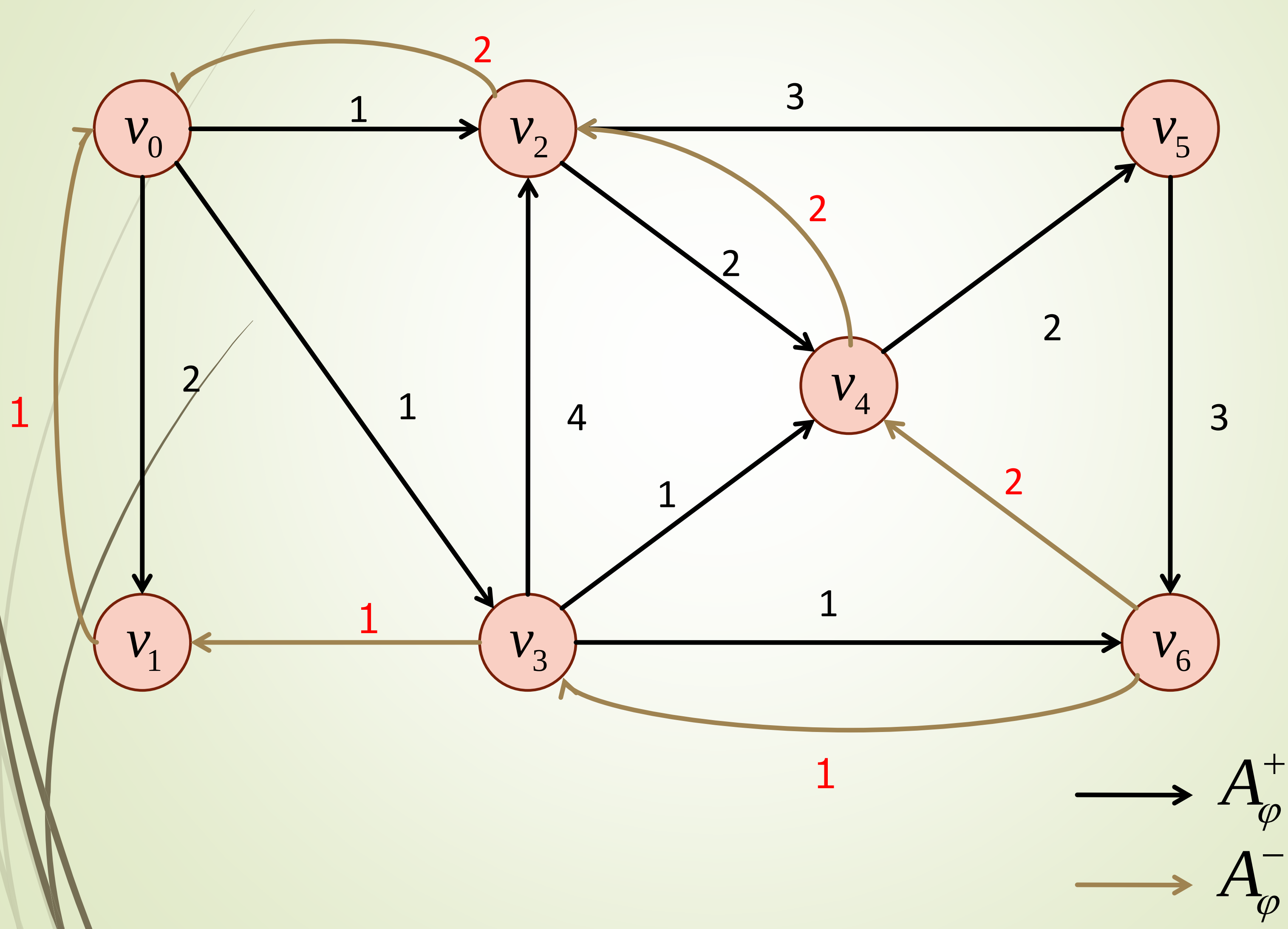


$$d = 1$$

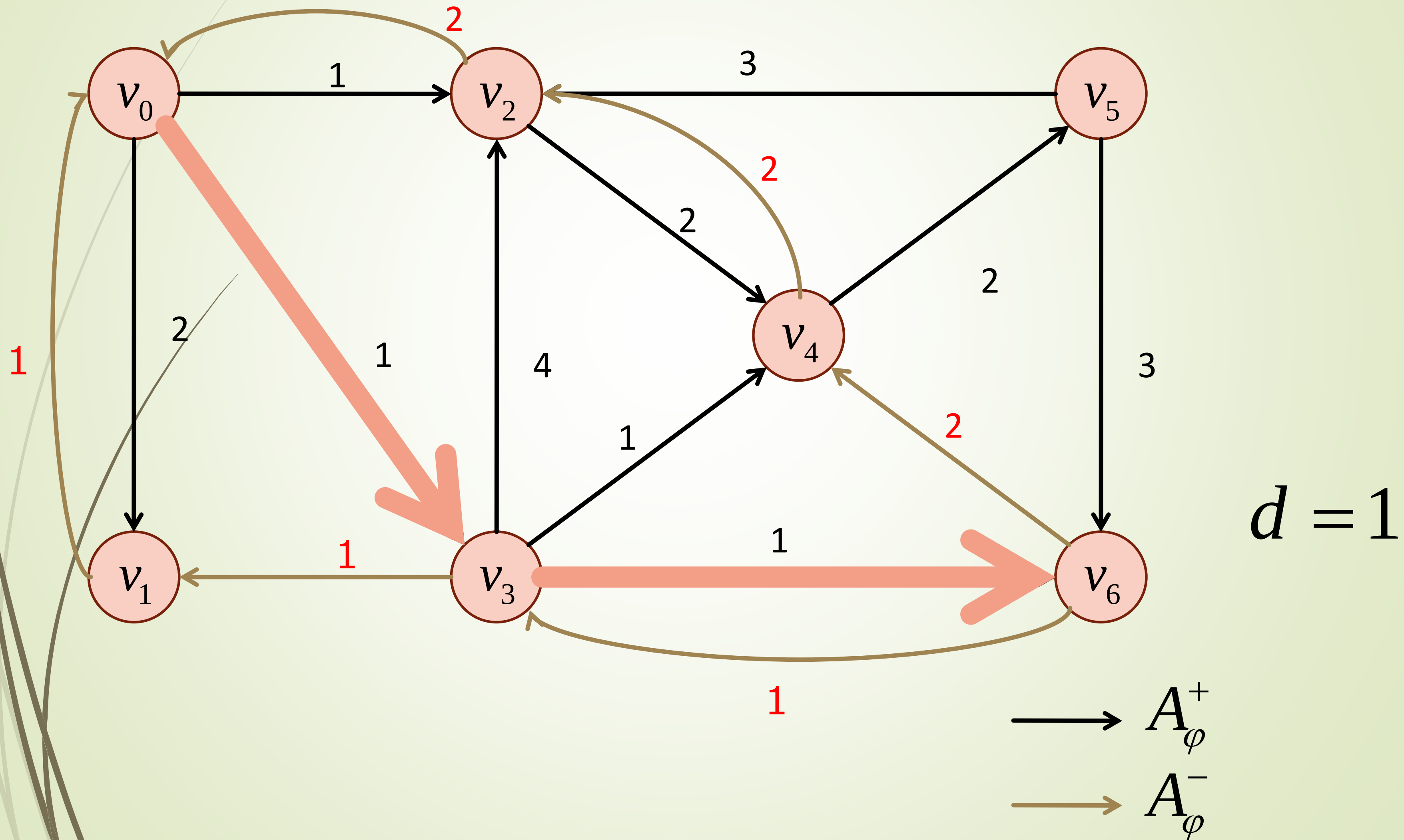
$\longrightarrow A_\varphi^+$

$\longrightarrow A_\varphi^-$

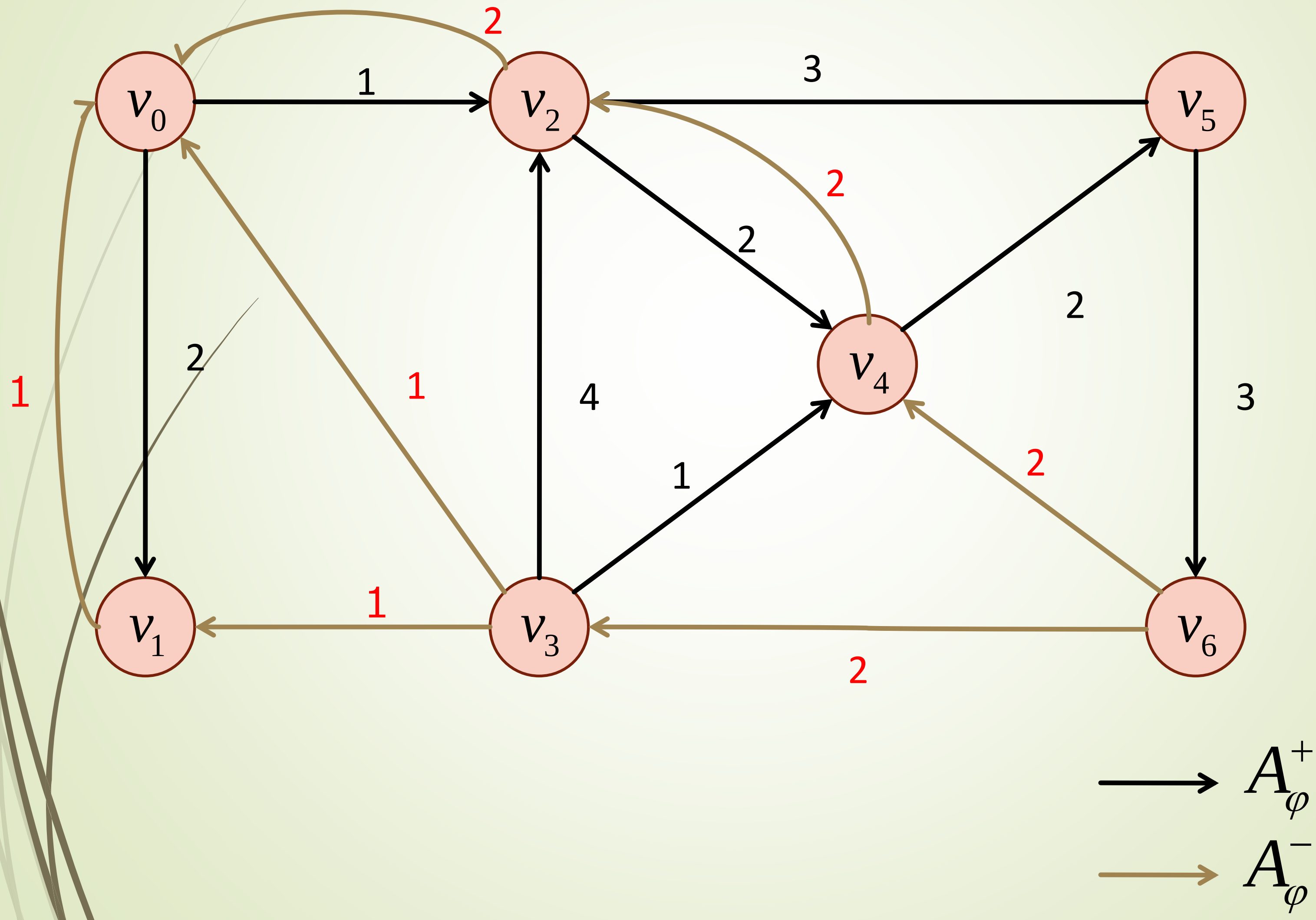
例3：補助ネットワーク更新



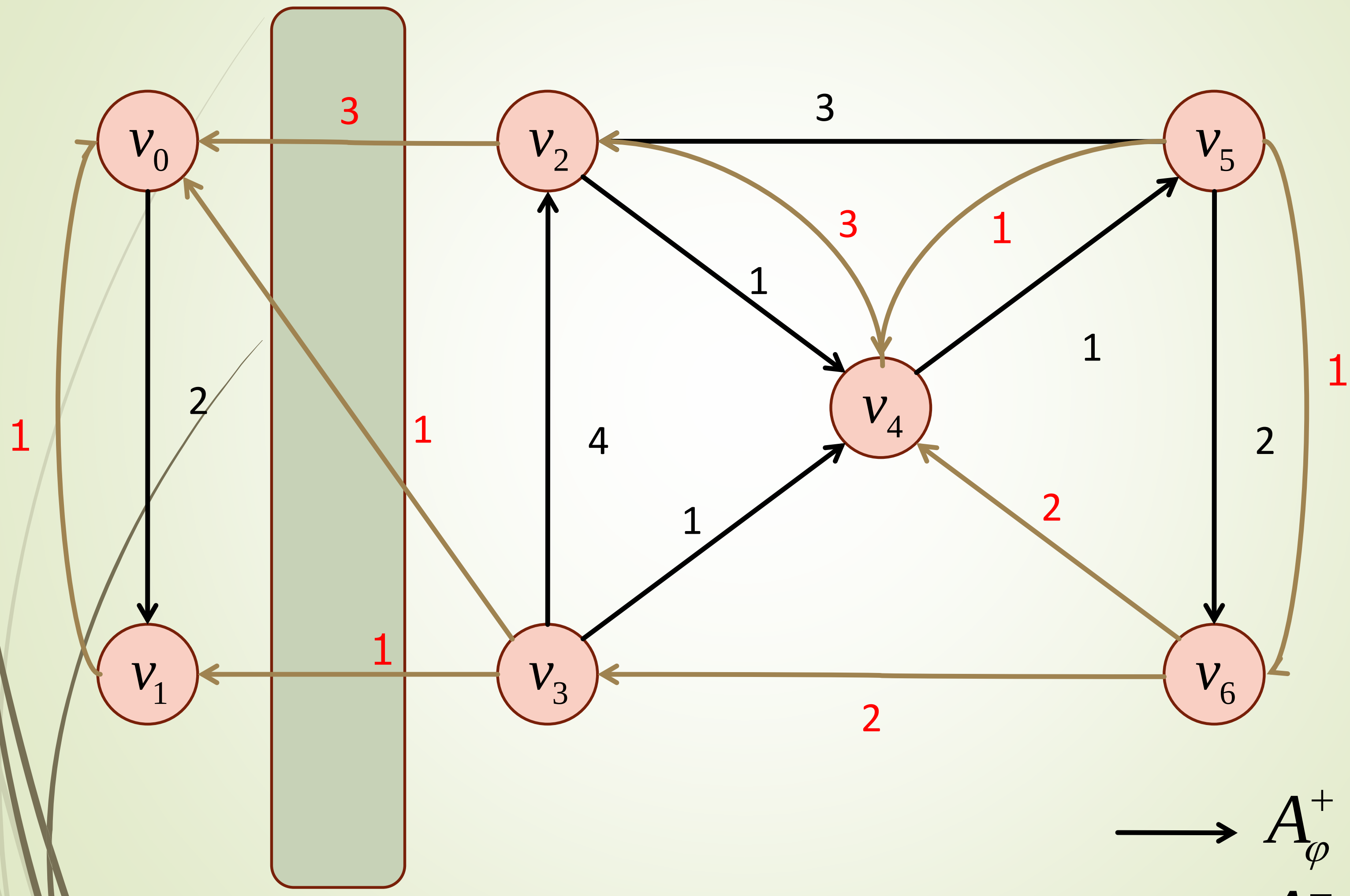
例3：增加道探索



例3：補助ネットワーク更新



例3：増加道探索



終点への有向道が無い

例3：最大流量