

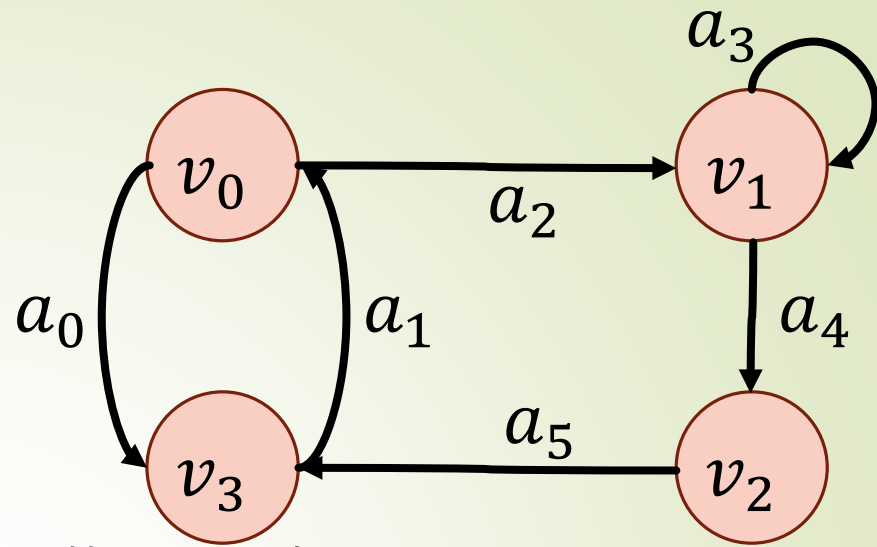


# グラフを記述する

2018年度

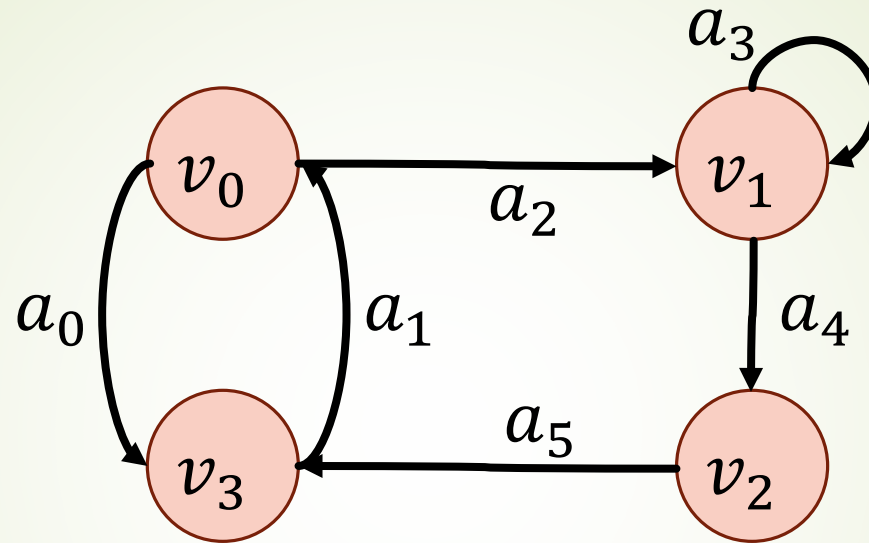
担当：只木進一（理工学部）

# 今日のテーマ



- グラフを数学の言葉で記述する
  - 対象を表す記号とその関係式
  - 図形表記と式表記の関係
  - アルゴリズムの対象となる
- グラフに関する基本用語の導入
  - グラフの構成要素に名前をつける
  - グラフ、頂点、弧

# グラフの要素



弧(枝、辺)  
Arc (Edge)

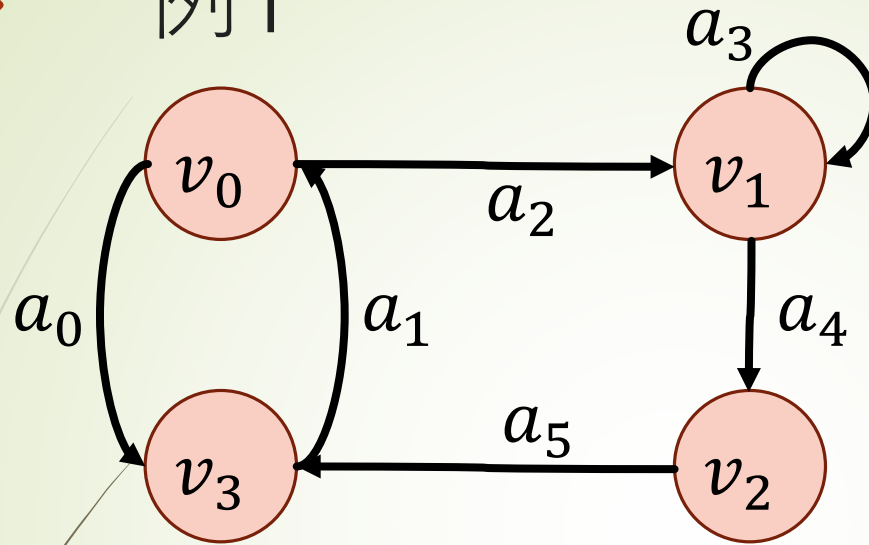
頂点(点)  
Vertex (Node)

# グラフの定義

- 頂点(点)の集合  $V$  : Vertex, Node
- 弧(枝、辺)の集合  $A$  : Arc, Edge
- 弧からその始点への写像 :  $\partial^+ : A \rightarrow V$
- 弧からその終点への写像 :  $\partial^- : A \rightarrow V$
- グラフの定義  $G = (V, A, \partial^+, \partial^-)$ 
  - 頂点の集合、弧の集合、弧から頂点への写像により定義

註：向きがある場合に弧(arc)、無い場合に辺(edge)と、区別することもある。

## 例1



$$V = \{v_0, v_1, v_2, v_3\}$$

$$A = \{a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$$

$$\partial^+ a_0 = v_0 \quad \partial^- a_0 = v_3$$

$$\partial^+ a_1 = v_3 \quad \partial^- a_1 = v_0$$

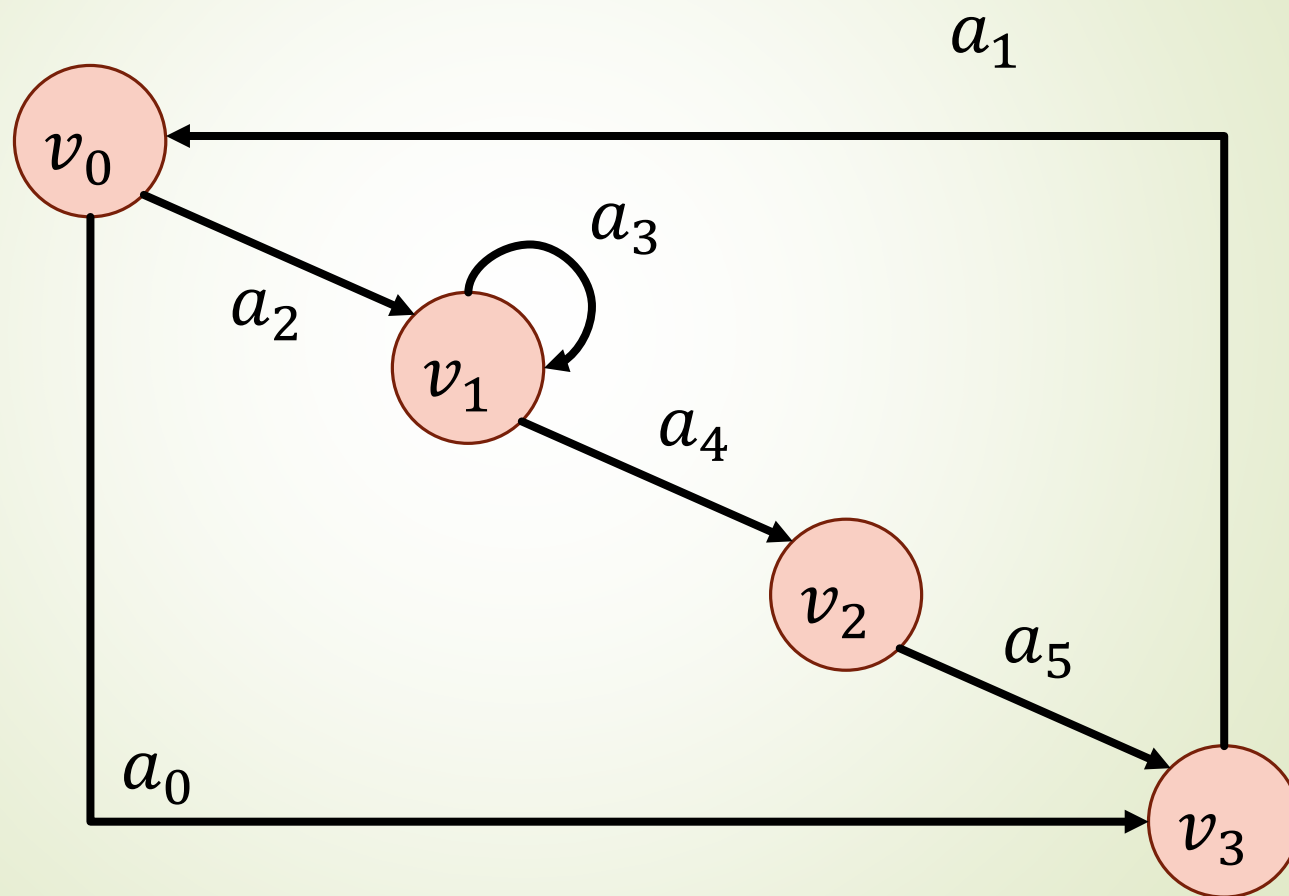
$$\partial^+ a_2 = v_0 \quad \partial^- a_2 = v_1$$

$$\partial^+ a_3 = v_1 \quad \partial^- a_3 = v_1$$

$$\partial^+ a_4 = v_1 \quad \partial^- a_4 = v_2$$

$$\partial^+ a_5 = v_2 \quad \partial^- a_5 = v_3$$

## 別の幾何学的表現



## 例2

$$V = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$$

$$A = \{a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}\}$$

$$\partial^+ a_0 = v_0 \quad \partial^- a_0 = v_1 \quad \partial^+ a_1 = v_0 \quad \partial^- a_1 = v_2$$

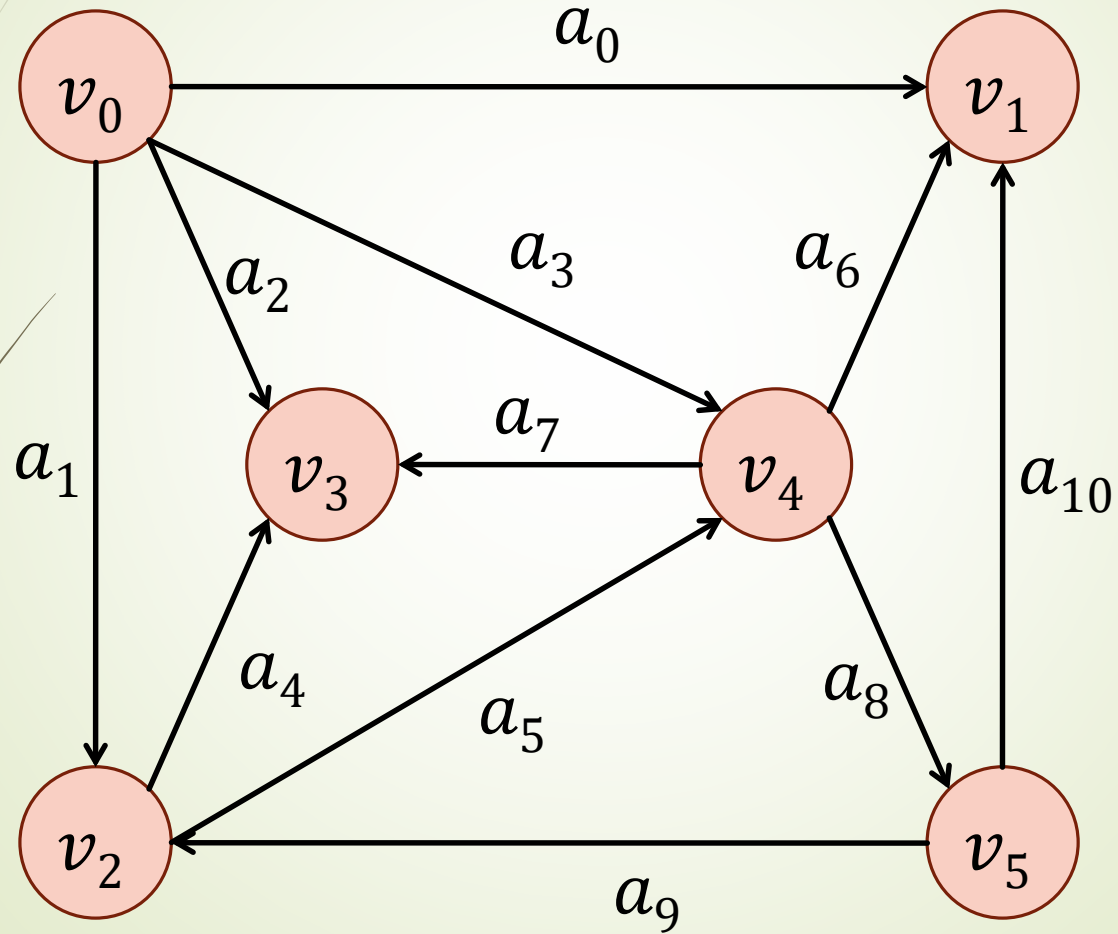
$$\partial^+ a_2 = v_0 \quad \partial^- a_2 = v_3 \quad \partial^+ a_3 = v_0 \quad \partial^- a_3 = v_4$$

$$\partial^+ a_4 = v_2 \quad \partial^- a_4 = v_3 \quad \partial^+ a_5 = v_2 \quad \partial^- a_5 = v_4$$

$$\partial^+ a_6 = v_4 \quad \partial^- a_6 = v_1 \quad \partial^+ a_7 = v_4 \quad \partial^- a_7 = v_3$$

$$\partial^+ a_8 = v_4 \quad \partial^- a_8 = v_5 \quad \partial^+ a_9 = v_5 \quad \partial^- a_9 = v_2$$

$$\partial^+ a_{10} = v_5 \quad \partial^- a_{10} = v_1$$



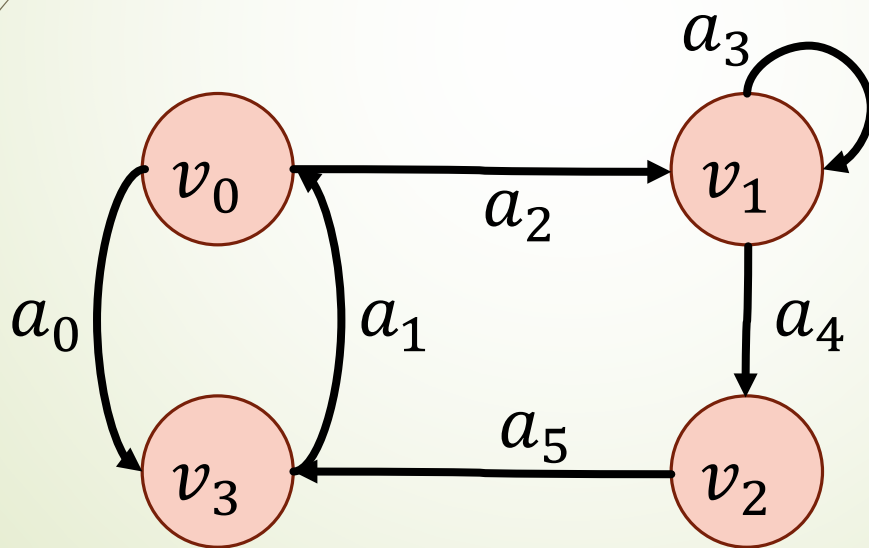


# グラフの幾何学表現

- ▶ グラフの幾何学的表現 (Geometrical Representation)
  - ▶ 唯一ではない：頂点の位置を変えることで、見た目は変わる
  - ▶ 頂点間の繋がり 具合が問題
    - ▶ トポロジー (Topology) を問題にする
- ▶ 同形(Isomorphic)なグラフ
  - ▶ 頂点や弧の名前の付替で同じになるグラフ
  - ▶ iso：同一、類似、等しい
  - ▶ morphism：形

# 頂点から弧への写像

- ➡  $\delta^+: V \rightarrow 2^A$  : 指定された頂点を始点とする弧の集合



$$\delta^+ v_0 = \{a_0, a_2\}$$

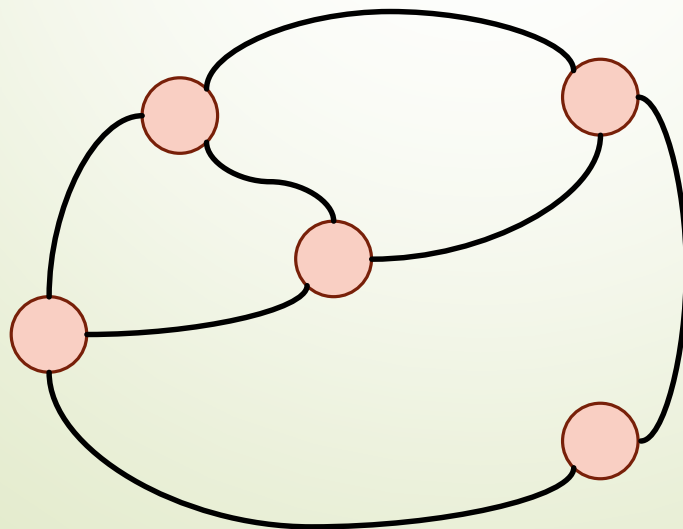
$$\delta^+ v_1 = \{a_3, a_4\}$$

$$\delta^+ v_2 = \{a_5\}$$

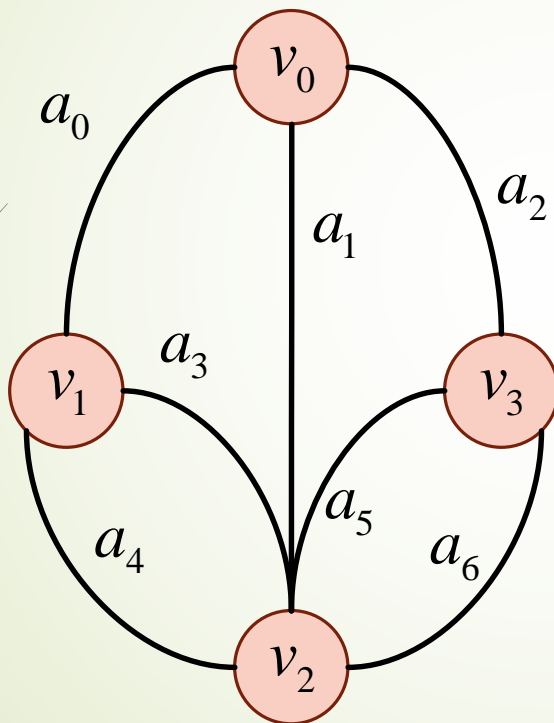
$$\delta^+ v_3 = \{a_1\}$$

# 有向グラフと無向グラフ

- 有向グラフ (directed graph)
  - 弧に向きがある
- 無向グラフ (undirected graph)
  - 弧に向きが無い
- 有向グラフ
  - Webページのリンク
  - 作業フロー
- 無向グラフ
  - インターネット接続
  - 鉄道網 (例外あり)



# 例：Königsberg Bridges



$$V = \{v_0, v_1, v_2, v_3\}$$

$$A = \{a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$$

$$\partial a_0 = (v_0, v_1) \quad \partial a_1 = (v_0, v_2)$$

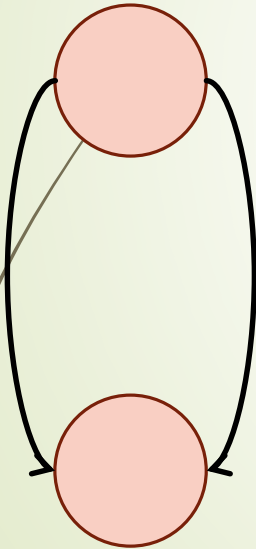
$$\partial a_2 = (v_0, v_3) \quad \partial a_3 = (v_1, v_2)$$

$$\partial a_4 = (v_1, v_2) \quad \partial a_5 = (v_2, v_3)$$

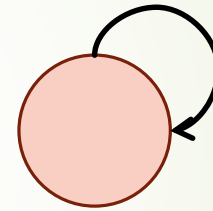
$$\partial a_6 = (v_2, v_3)$$

# 並列弧と孤立弧

➤ 並列弧



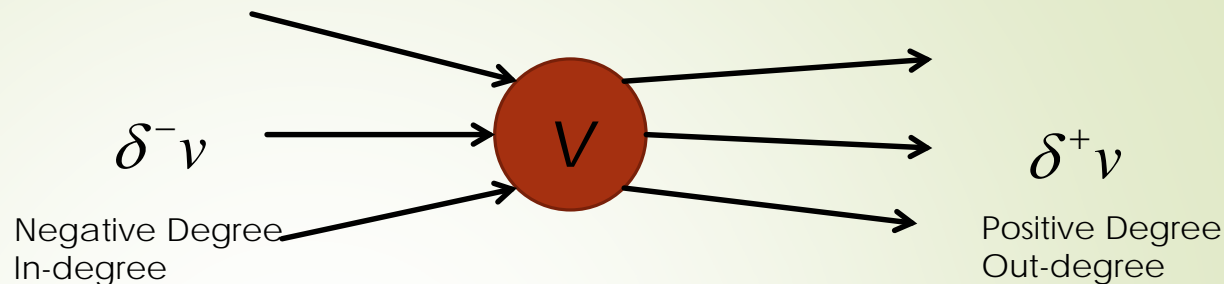
➤ 孤立弧



➤ 単純なグラフ

➤ 並列弧と孤立弧が無い

# 次数 (degree)



- 頂点  $v$  から出る弧の全体:  $\delta^+ = \{a \mid v = \partial^+ a\}$
- 頂点  $v$  の正の次数: 頂点  $v$  から出る弧の数  $|\delta^+ v|$
- 頂点  $v$  に入る弧の全体:  $\delta^- = \{a \mid v = \partial^- a\}$
- 頂点  $v$  の負の次数: 頂点  $v$  に入る弧の数  $|\delta^- v|$

# 部分グラフ (Sub-graph)

- グラフ  $G$  のうち、頂点及び弧の一部から構成されるグラフを  $G$  の部分グラフと呼ぶ
- 部分グラフの構成
  - グラフ  $G$  からいくつかの弧を開放除去する
  - グラフ  $G$  からいくつかの孤立点を除去する

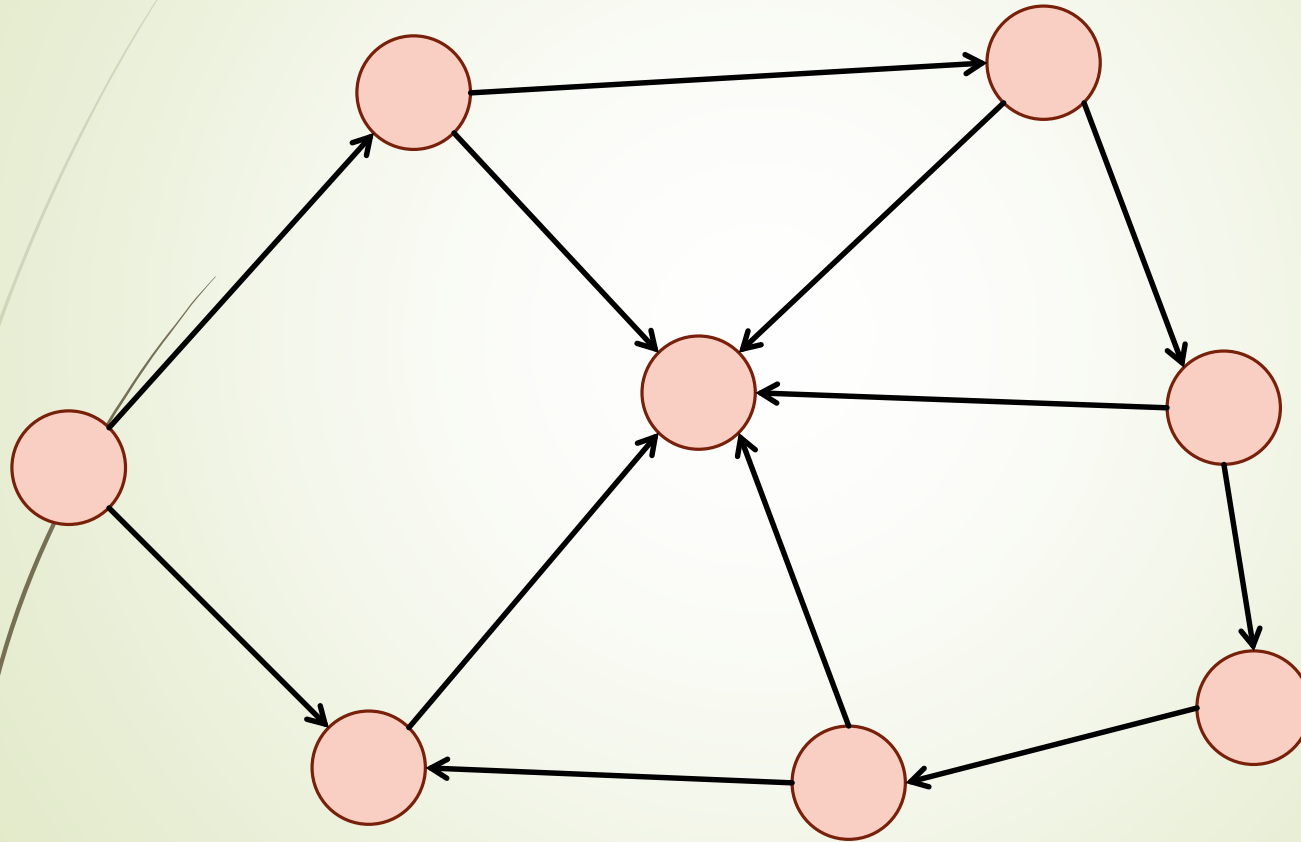


## 部分グラフの種類

- ▶  $G$  の全域部分グラフ (spanning sub-graph)
  - ▶  $G$  と同じ頂点集合を持つ  $G$  の部分グラフ  $H$
- ▶  $G$  の誘導部分グラフ (induced sub-graph)
  - ▶  $G$  の頂点集合  $V$  の部分集合  $U$  に対して、両端点が  $U$  に属する弧の全体集合を  $A(U)$  とするとき、 $U$  と  $A(U)$  からなるグラフ。



# Spanning Tree



# Induced Subgraph

