序論：この講義の目的

2018年度　グラフと組み合わせ

担当：只木進一（理工学部）

グラフと組み合わせとは (in Random House Dictionary)

- "graph"
  - *Math.* A network of lines connecting points
- "network"
  - Any netlike combination of filaments, lines, veins, passages, or the like.
  - A system of interrelated buildings, offices, stations etc., esp. over a large area.
- "combination"
  - *Math*. The arrangement of a number of individuals into various groups.

グラフ理論(Graph Theory)

- グラフ、ネットワークの数学的性質を扱う
- 起源
  - 1736年に、Leonhard　EulerがKönigsbergの橋の渡り方（一筆書きの一種）を解いた
- 近年
  - ランダムネットワーク
    - Erdős–Rényi モデル
  - 複雑ネットワーク
    - Scale-free ネットワーク
    - Barabási–Albertモデル

要素関係を記述するには

- 人と人の関係
  - 友人関係、取引関係、利害関係、組織系統
- 組織と組織の関係
  - 取引関係、依存関係、競合関係
- 都市と都市の関係
  - 地理的隣接、人の交流、交通機関での接続
- 作業の各工程
  - 依存・前後関係、重要度

- どのような方法が良い？

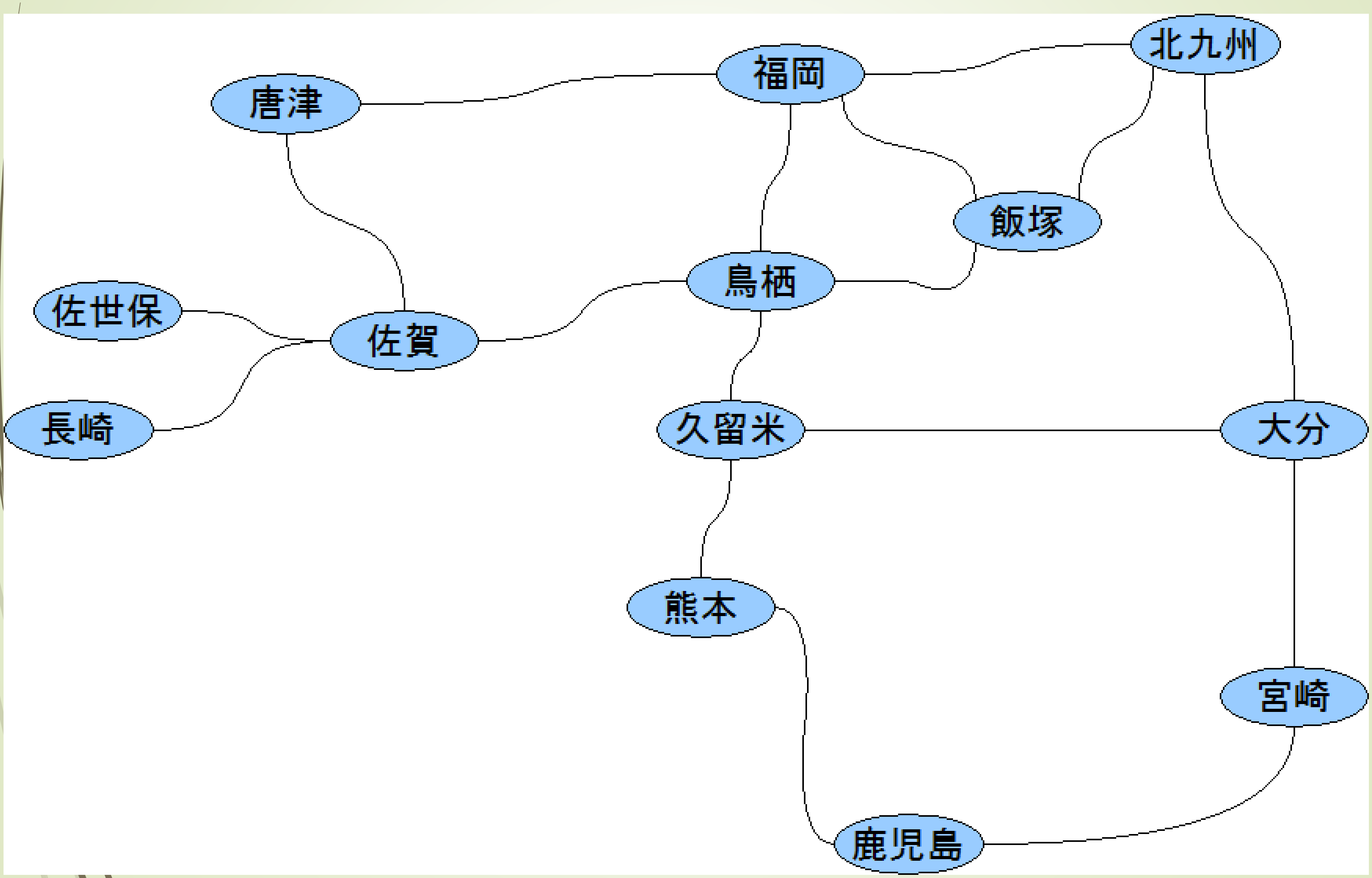
図示するのが良いでしょう

グラフ(Graph)とは

- 要素とその関係を図示する
  - 交通網：都市とそれを結ぶ交通
  - コンピュータとネットワーク
  - Webページ間のリンク
  - 部品の構成図
  - 組織構成・人の繋がり
  - 関係データベース
  - 食物連鎖
  - 代謝反応系
- 周囲にはグラフやネットワークが溢れている

具体的に想像しよう

例：都市間の鉄道



グラフの例

- 交通網
- JR九州路線図
- ANA路線図
- 佐賀市営バス路線図

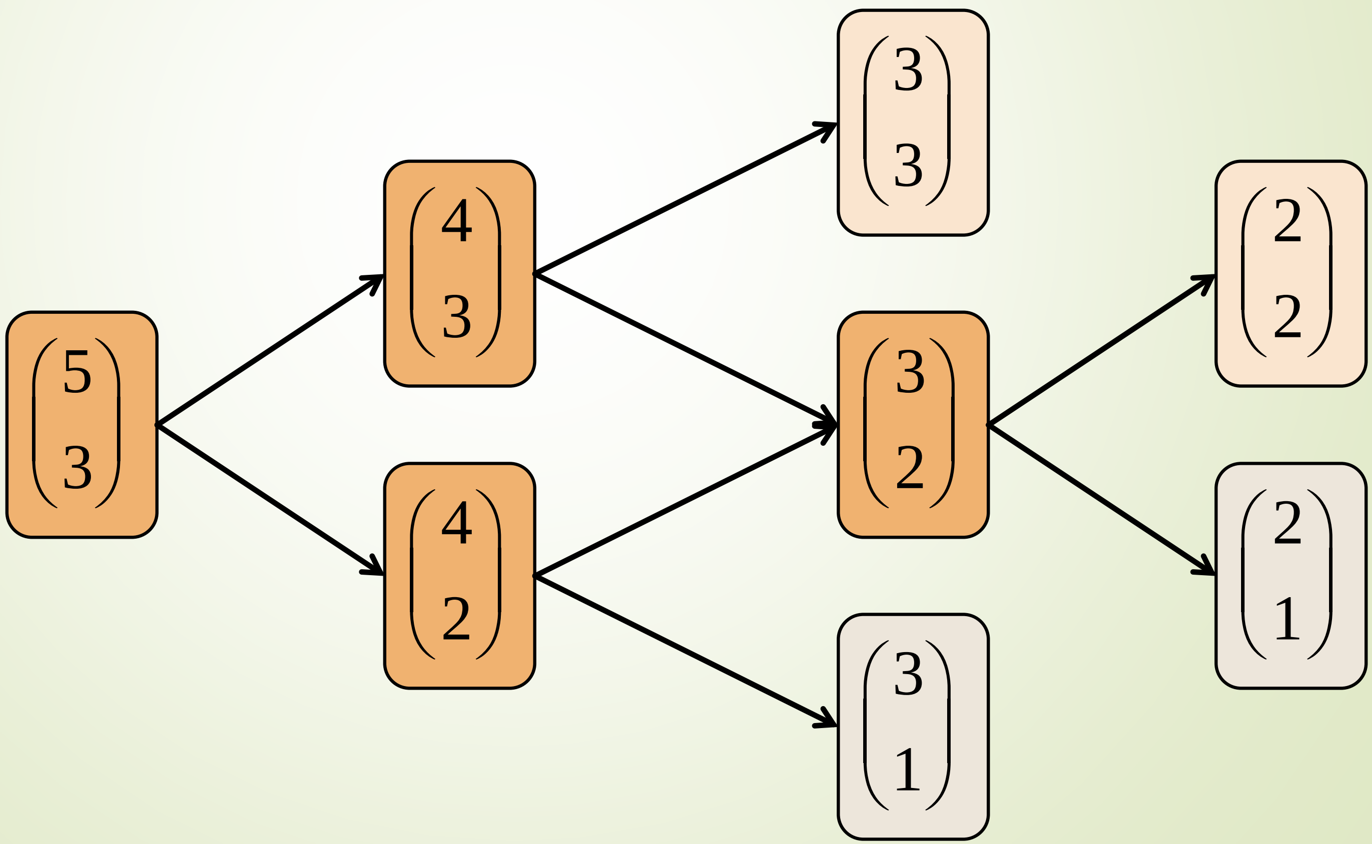
- インターネット
- SINET
- An Atlas of Cyberspace
- http://www.opte.org/

グラフ(Graph)とは：２

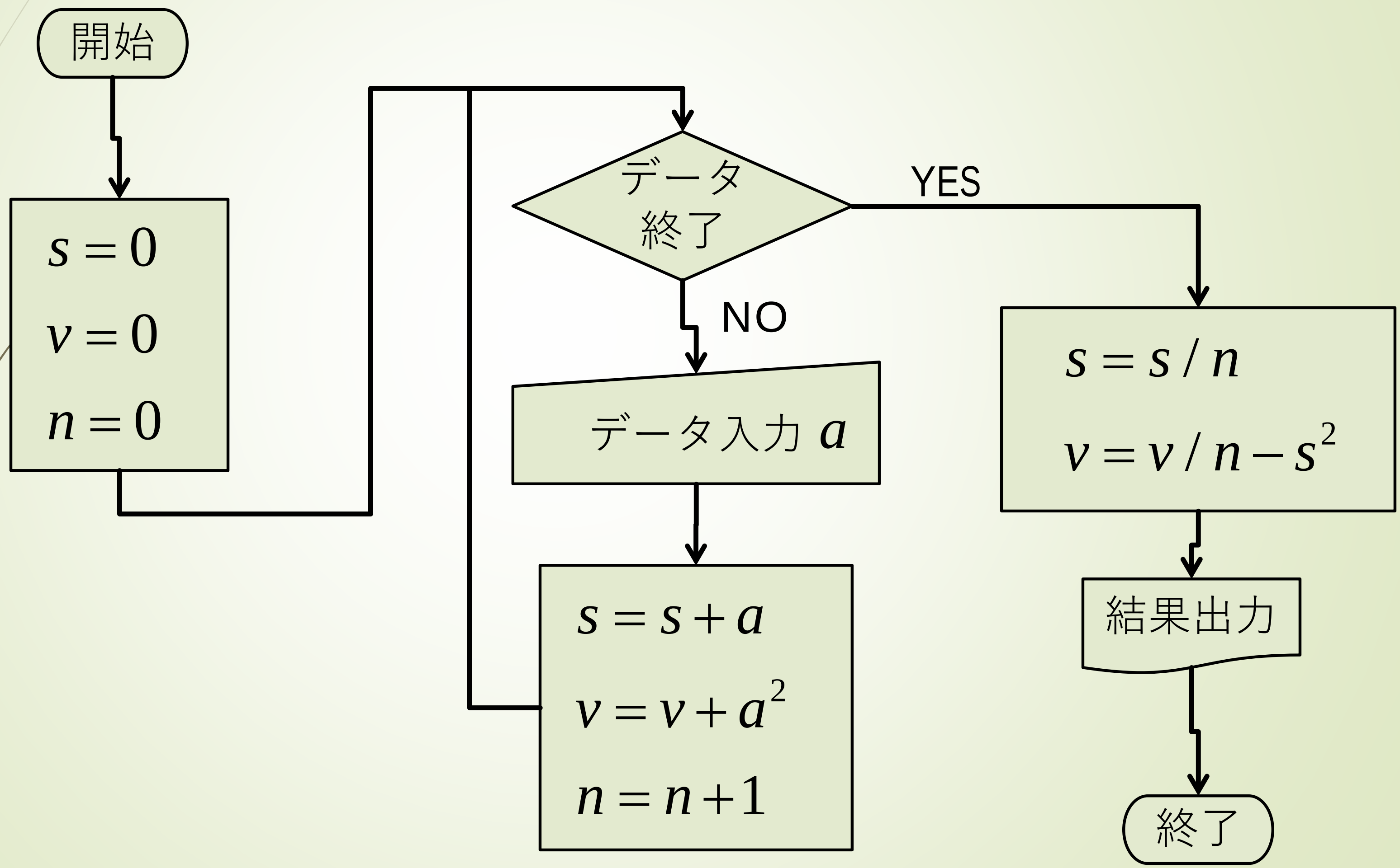
- 処理の流れを図示する
  - 処理の流れ
  - クラスオブジェクトとその呼出
  - 再帰的関数のスタック
  - 状態遷移図

例：二項係数の漸化式

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1}, \quad \binom{n}{1} = n, \quad \binom{n}{n} = 1$$



例：流れ図（平均と分散）



グラフとネットワークを使って問題を整理

- 我々人間は、式よりも図が理解しやすい

- 要素間の関係の整理
- 要素のグループ分け
- 最短経路を探す
- 最適な連絡網を探す
- 隘路を探す
- 重要な場所を探す

グラフを抽象化して考える

- 共通点は何か
  - 頂点と辺の集合
  - つながり方に注目している
- 数学の言葉で書く
  - モデル化
  - 抽象化と厳密化
  - 「意味」を消すことで見えるもの
- アルゴリズムを作る
  - 最適化、探索など
  - 問題解決手順を明確にする

グラフに付随する性質

- 頂点ごとの性質
  - 重要性
  - 寿命
- 弧ごとの性質
  - 距離
  - その弧を流れるモノの量

グラフの何を調べるのか

- 全ての経路を列挙する
- 最短の経路を探す
- 最も効率的な路線図を作る
- 冗長性のあるネットワークを構成する
- 探索の計算量を見積もる

必要な知識

- 集合
  - グラフは頂点の集合と弧の集合で構成される
- 順列・組合せ
  - 何通りの経路が可能か
- 数学的帰納法

復習：集合

- 有限集合：XとY
- 集合の要素数：$|X|$
- 集合の和

$$X \cup Y = \{e | e \in X \vee e \in Y\}$$

- 集合の共通部分

$$X \cap Y = \{e | e \in X \wedge e \in Y\}$$

- 差集合

$$X \setminus Y = \{e | e \in X \wedge e \notin Y\}$$

- 特別な集合
  - 自然数全体: N
  - 整数全体: Z
  - 実数全体: R
  - 有理数全体: Q

$$N \subset Z \subset Q \subset R$$

復習：数学的帰納法

- 自然数nに関する命題S(n)
- 証明
  - S(1)は正しいことを示す
  - S(n)が正しいと仮定すると、S($n+1$)も正しいことを示す
  - よって任意のnに対して、命題S(n)は正しい
- 注意
  - “・・・”を証明には使わないこと。曖昧になる

数学的帰納法の例１：等比級数

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$$

- $n = 0$ $\quad \mathrm{LHS} = a^0 = 1,\ \mathrm{RHS} = \dfrac{1-a^1}{1-a} = 1$
- nに対して正しいと仮定する $\quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$
- $n+1$に対して導く

代入

$$\sum_{k=0}^{n+1} a^k = \sum_{k=0}^{n} a^k + a^{n+1} = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} + a^{n+1}$$

$$= \frac{1}{1-a}\left(1 - a^{n+1} + a^{n+1} - a^{n+2}\right)$$

$$= \frac{1-a^{n+2}}{1-a}$$

数学的帰納法の例２：漸化式

- 漸化式$P(1) = \frac{2}{3}$、$(k+2)P(k) = (k-1)P(k-1)$の解

$$P(k) = \frac{4}{(k+2)(k+1)k}$$

- $k = 1$の場合：$k = 1$を代入
  - $P(1) = \frac{4}{(1+2)(1+1)1} = \frac{2}{3}$
- あるkで正しいと仮定

$$P(k+1) = \frac{k}{k+3}P(k) = \frac{k}{k+3}\frac{4}{(k+2)(k+1)k}$$

$$= \frac{4}{(\mathrm{k}+3)(k+2)(k+1)}$$

数学的帰納法例3

- 凸n多角形の内角の和は$(n-2)\pi$である
- $n=3$の場合
  - 三角形の内角の和はπ：証明省略
- ある凸n多角形の内角の和が$(n-2)\pi$であると仮定する
  - 頂点を一つ増やす＝三角形を一つ追加する
  - 内角の和は
    - $(n-2)\pi+\pi=(n+1-2)\pi$