



最短経路問題

SHORTEST PATH PROBLEM

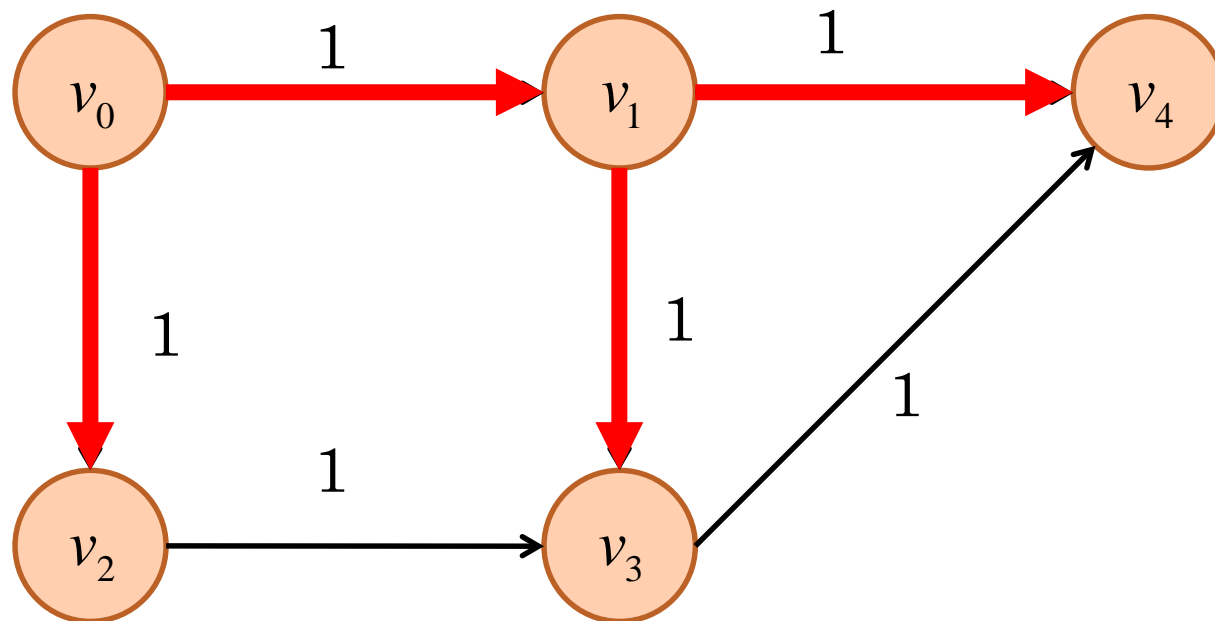
2017年度

担当: 只木進一(工学系研究科)

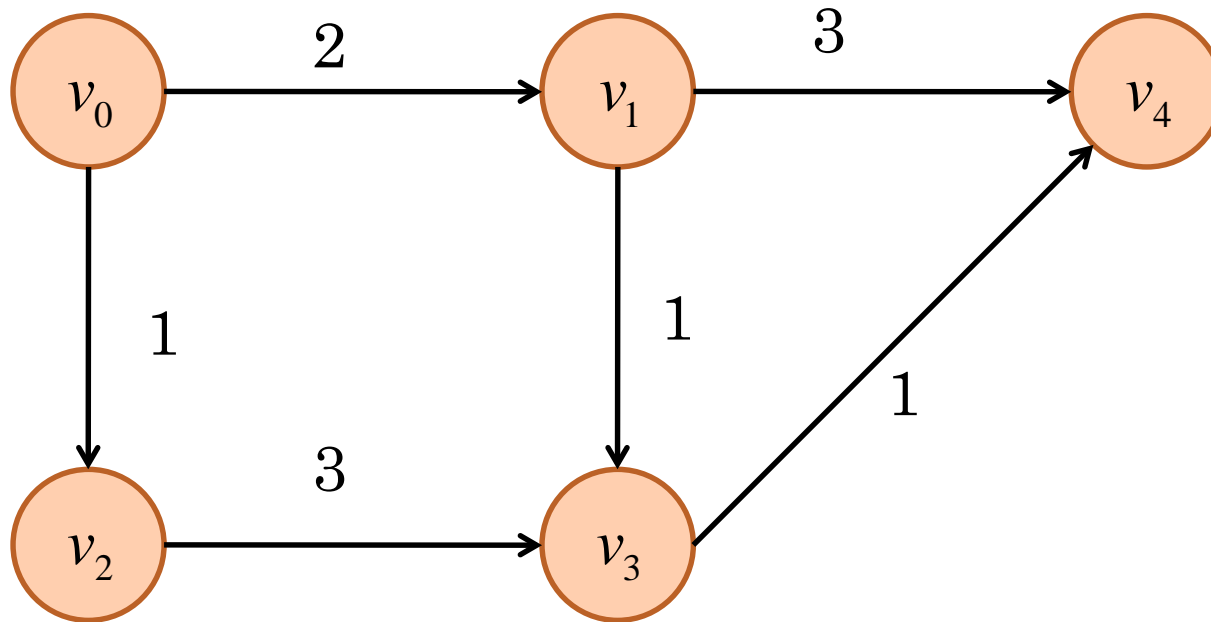
最短経路問題とは

- 有向ネットワーク
 - 各弧に距離やコスト(正の実数)が定義されている
- 始点から終点までの最短有向道を見つける
 - 弧の向きがそろった道
- 距離・コストの組み合わせ最適化問題

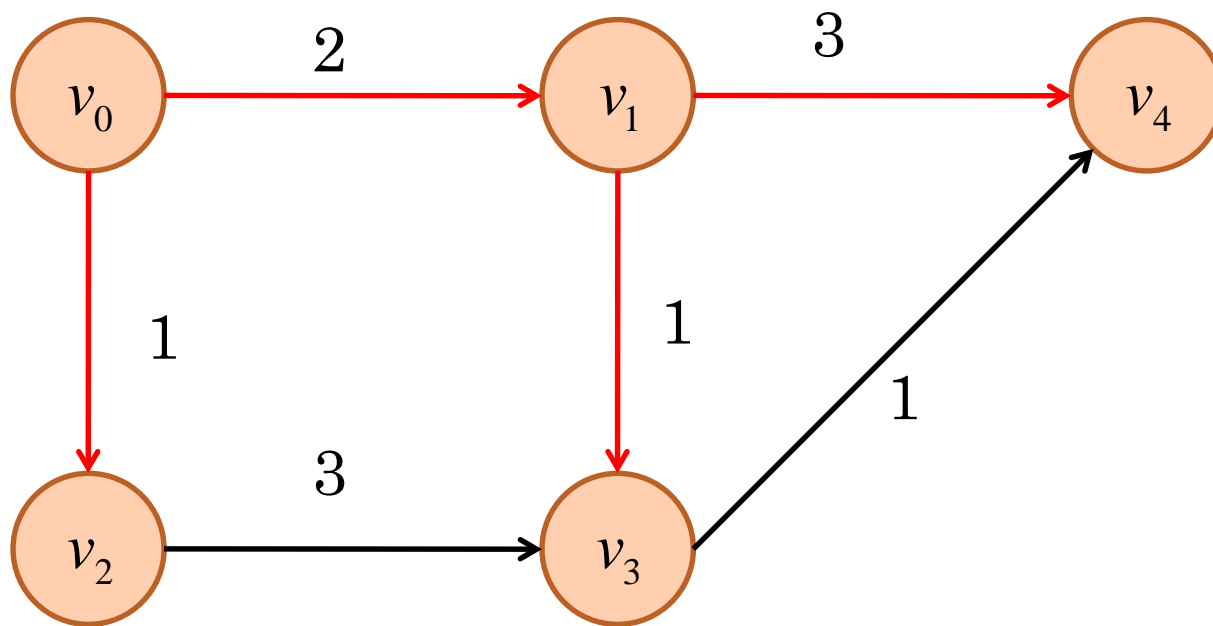
すべての弧の距離が同じならば幅優先探索で十分



幅優先探索ではダメな理由



幅優先探索では



- v_4 への経路が $v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow v_4$ となり、距離が5となってしまう
- しかし、経路 $v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow v_3 \rightarrow v_4$ のほうが距離4となって短い
- 頂点の移動数が多くても、距離の短い道がある

準備:ポテンシャル $p:V \rightarrow R$

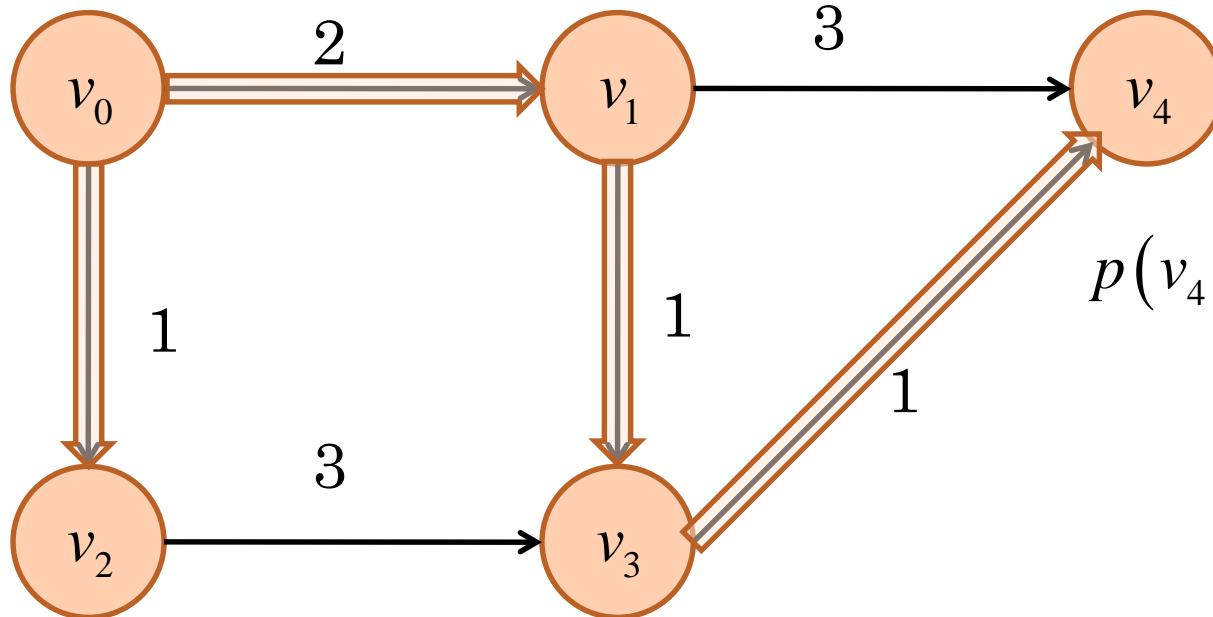
- 一般には、各頂点に定義された実数値
- 始点からの「高さ」(距離)をイメージする
- 最短の経路に沿った距離に対応

- ポテンシャル(potential)→位置エネルギー
 - 経路(どうやってそこまで持ち上げたか)に依らない

ポテンシャルの例

$$p(v_0) = 0$$

$$p(v_1) = 2$$



$$p(v_2) = 1$$

$$p(v_3) = 3$$

$$p(v_4) = 4$$

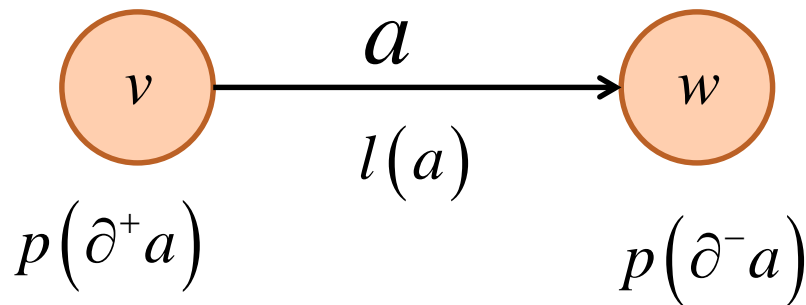
最短経路

関数 $l_p: A \rightarrow R$

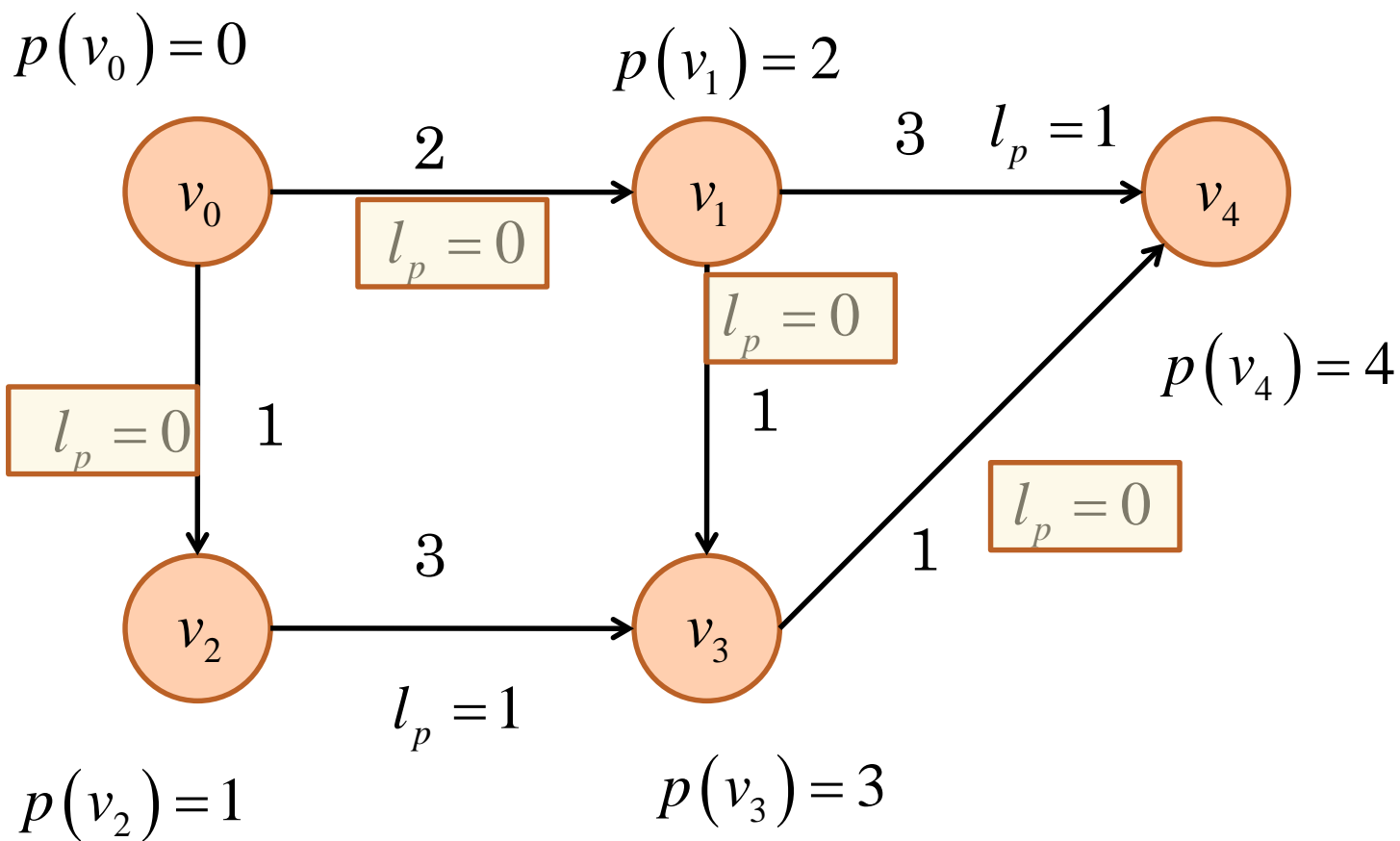
- 弧 a の長さ(距離): $l(a)$
- 弧の始点(終点)のポテンシャル: $p(\partial^\pm a)$

$$l_p(a) = l(a) + p(\partial^+ a) - p(\partial^- a)$$

- ポテンシャルの差と $l(a)$ とのずれ



例



最短経路に沿って $l_p = 0$

有向道に沿って拡張

- 頂点 u から 頂点 v へ向かう有向道 P に対して
以下が成り立つ

$$l_p(P) = l(P) + p(u) - p(v)$$

$$l_p(P) \equiv \sum_{a \in P} l_p(a)$$

$$l(P) \equiv \sum_{a \in P} l(a)$$

有向道に沿った例

$$P = \{u = v_0, a_1, v_1, a_2, \dots, a_k, v_k = v\}$$

$$\begin{aligned} l_p(P) &= \sum_{a \in P} l_p(a) = \sum_{i=1}^k l_p(a_i) \\ &= \sum_{i=1}^k [l(a_i) + p(v_{i-1}) - p(v_i)] \\ &= \sum_{i=1}^k l(a_i) + p(u) - p(v) \\ &= l(P) + p(u) - p(v) \end{aligned}$$

- 関数 $l_p: A \rightarrow R$ が非負関数であり、道 P 上の各弧 a において、 $l_p(a) = 0$ のとき、 P は u から v への最短経路となる。
- 最短経路でない弧に対しては、 $l_p(a) > 0$

- 始点 u と終点 v 任意の道 P に対して、その経路長
の下限は、 $p(u) - p(v)$ である。

$$l(P) = p(u) - p(v) + l_p(P) \geq p(u) - p(v)$$

- このようなポテンシャル(可能な道のうち最小値
を与える)を構成することが課題となる。

ダイクストラ(DIJKSTRA)法

- $l(a) > 0$ の場合を考える
- グラフ G は単純(並列弧が無い)と仮定する

- $U \subseteq V$: 始点 v_0 からの有向道が見つかっているが、距離が確定していない頂点の集合
- $W \subseteq V$: 始点 v_0 からの有向道が見つかり、距離が確定した頂点の集合
- $p(v) \in R$: 始点 v_0 からの頂点 v への経路に沿った距離
- $q(v) \in V$: 最短経路を頂点 v から逆にたどる際の頂点 v の直前の頂点

DIJKSTRA法:初期化

$$U = \{v_0\}$$

$$W = \emptyset$$

$$p(v_0) = 0$$

$$p(u) = +\infty (\forall u \in V \setminus \{v_0\})$$

$$q(v) = \text{NULL} (\forall v \in V)$$

U を $p(w)$ によるヒープとして実装すると効率的

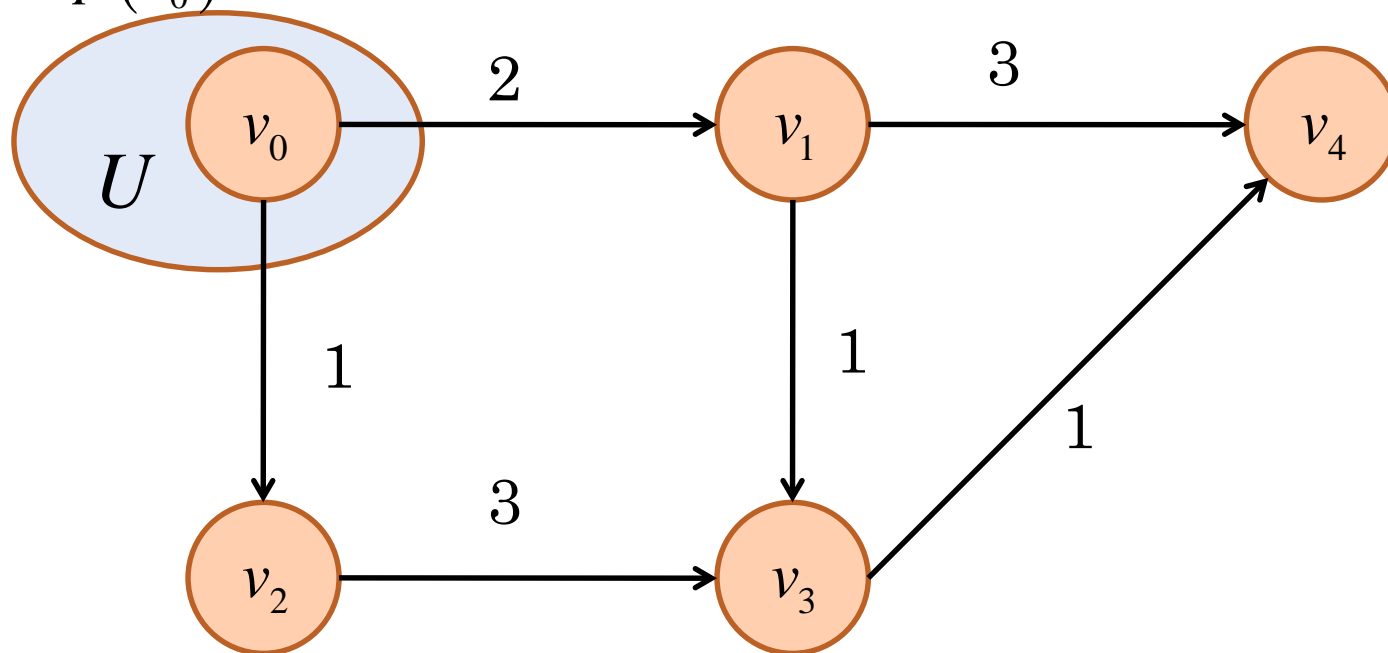
DIJKSTRA法: アルゴリズム

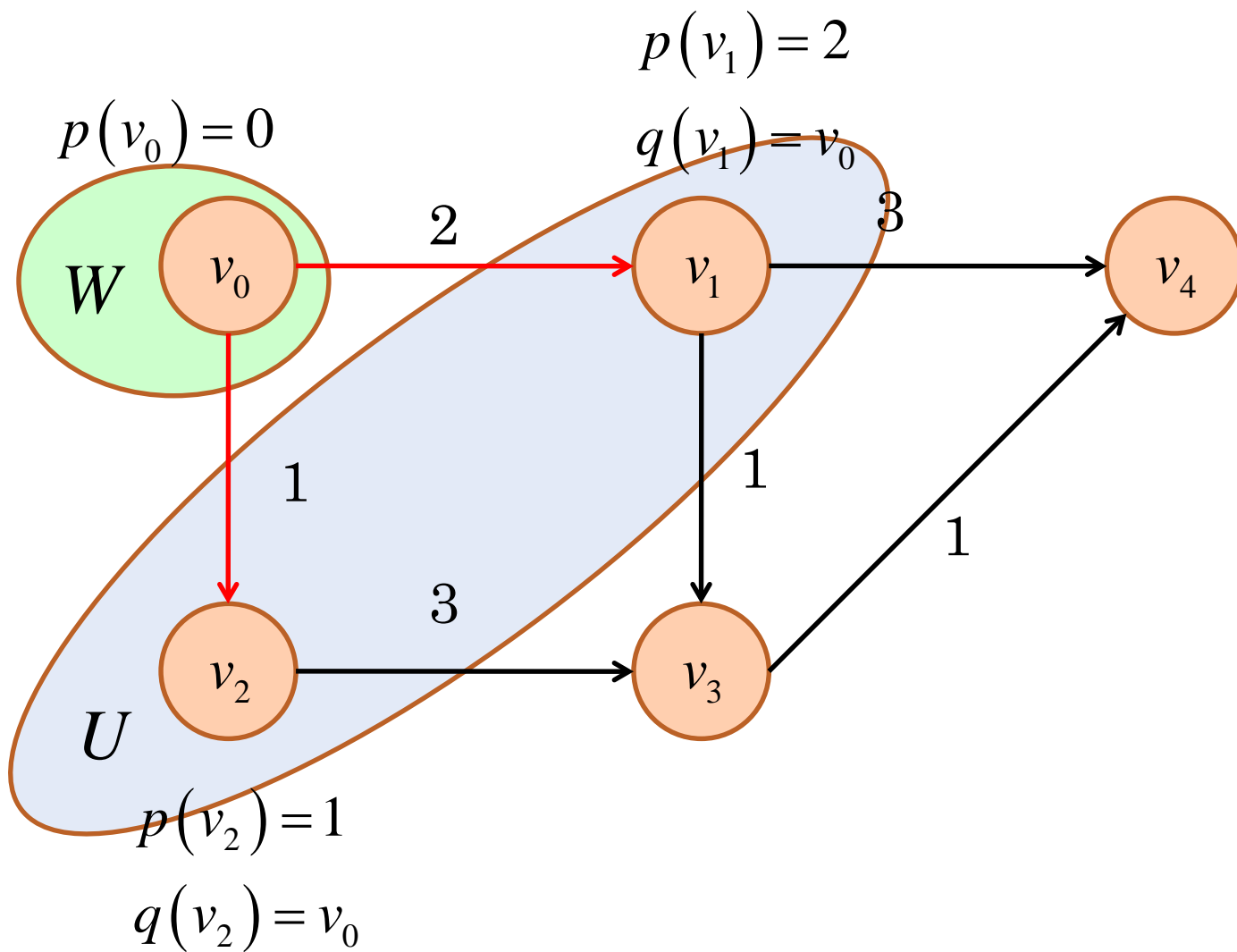
```
while (  $U \neq \emptyset$  ) {  
   $w = U.poll()$  //  $p(w)$ が最小である  $w \in U$   
  forall (  $a \in \delta^+ w$  ) {  
     $x = \partial^- a$  //  $w$ の隣接頂点  
    if (  $x \notin W$  ) {  
      if (  $p(x) > p(w) + l(a)$  ) { //  $a$ を使ったほうが近距離  
         $q(x) \leftarrow w$   
         $p(x) \leftarrow p(w) + l(a)$   
        if (  $x \in U$  ) {  $U.reduceValue(x)$  //  $x$ の値を変更}  
        else {  $U.add(x)$  //  $U$ に  $x$ を追加}  
      }  
    }  
     $W \leftarrow W \cup \{w\}$   
  }  
}
```

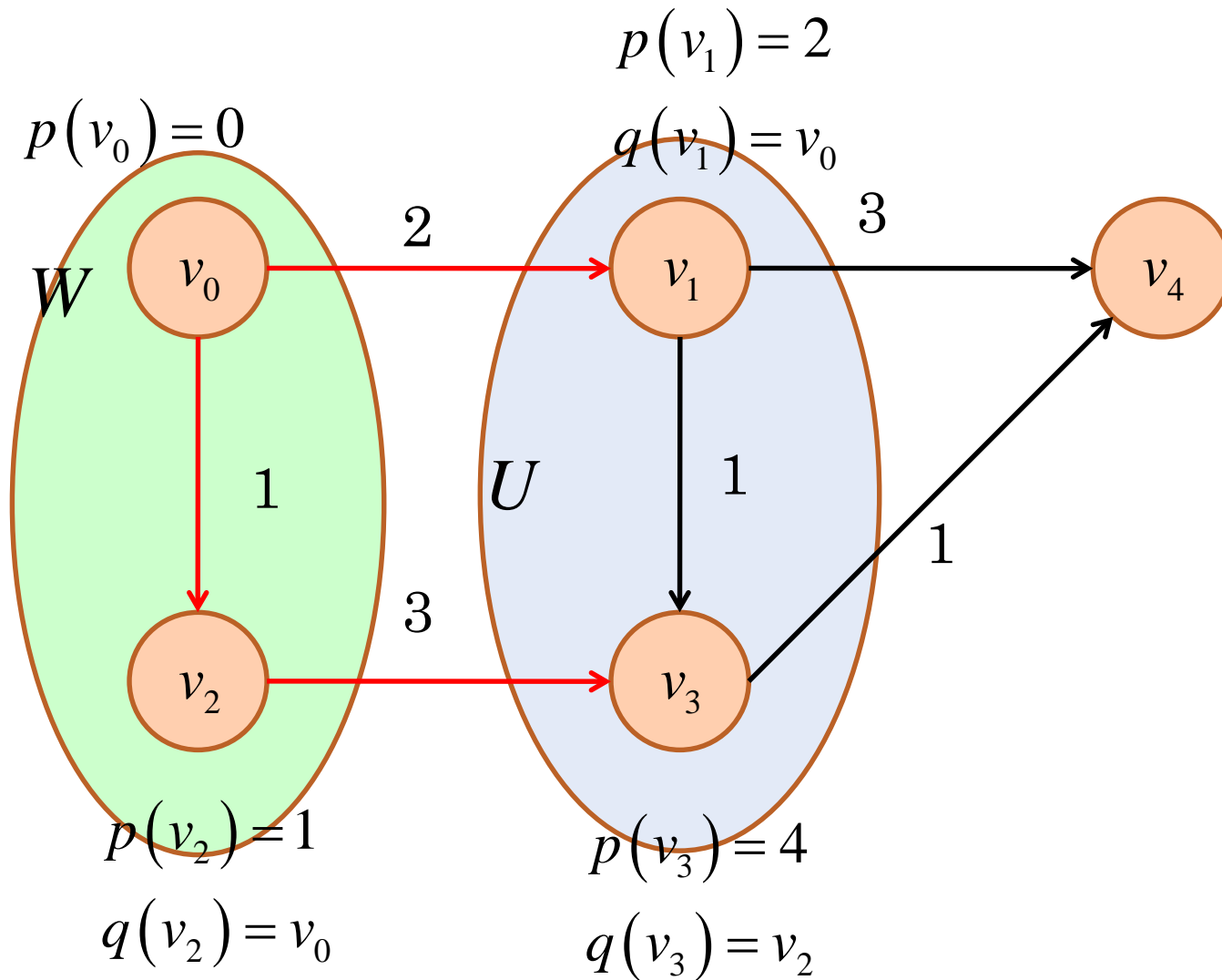
ヒープ中の $p(x)$ の値が
減ることがあることに注意

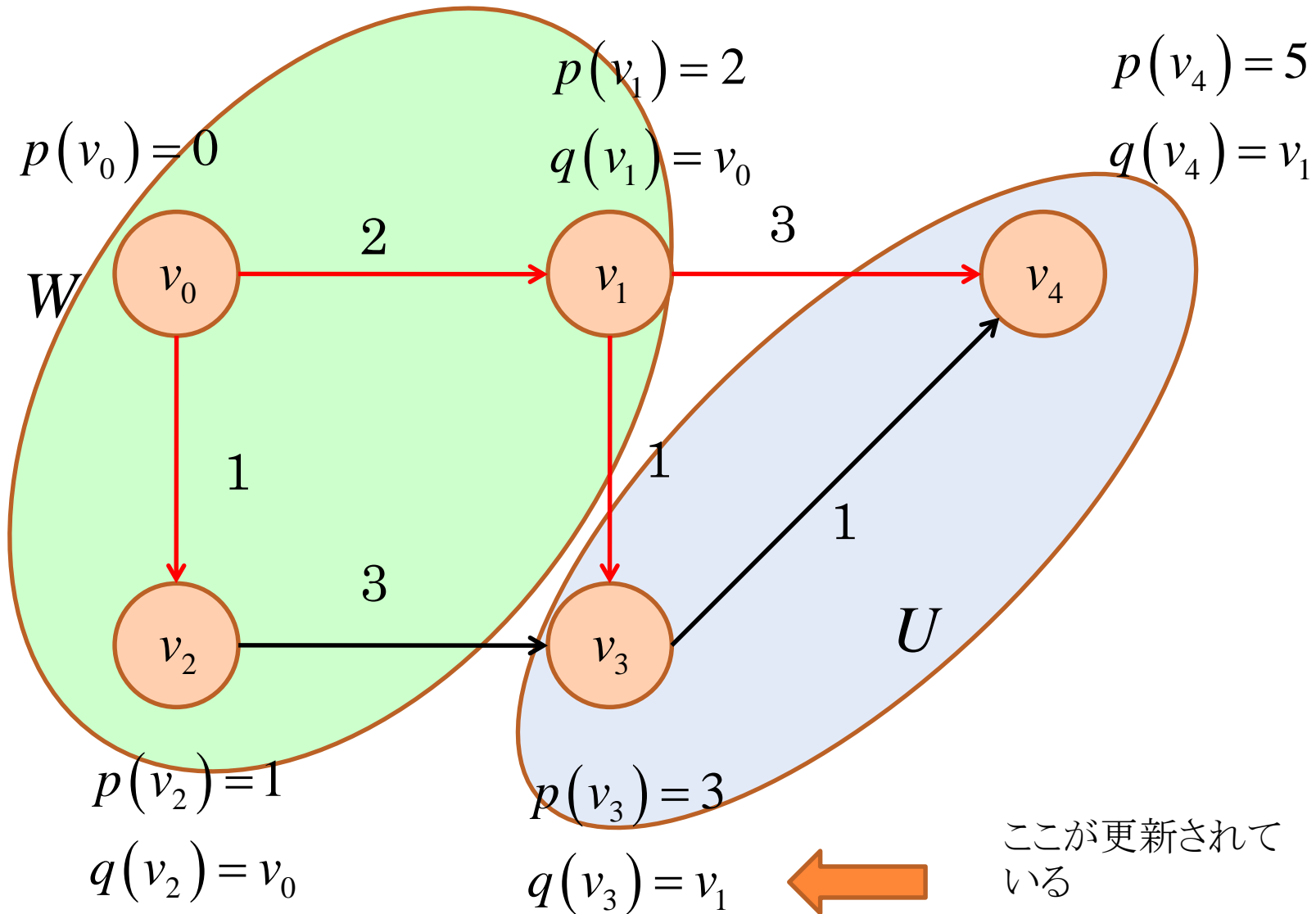
例1

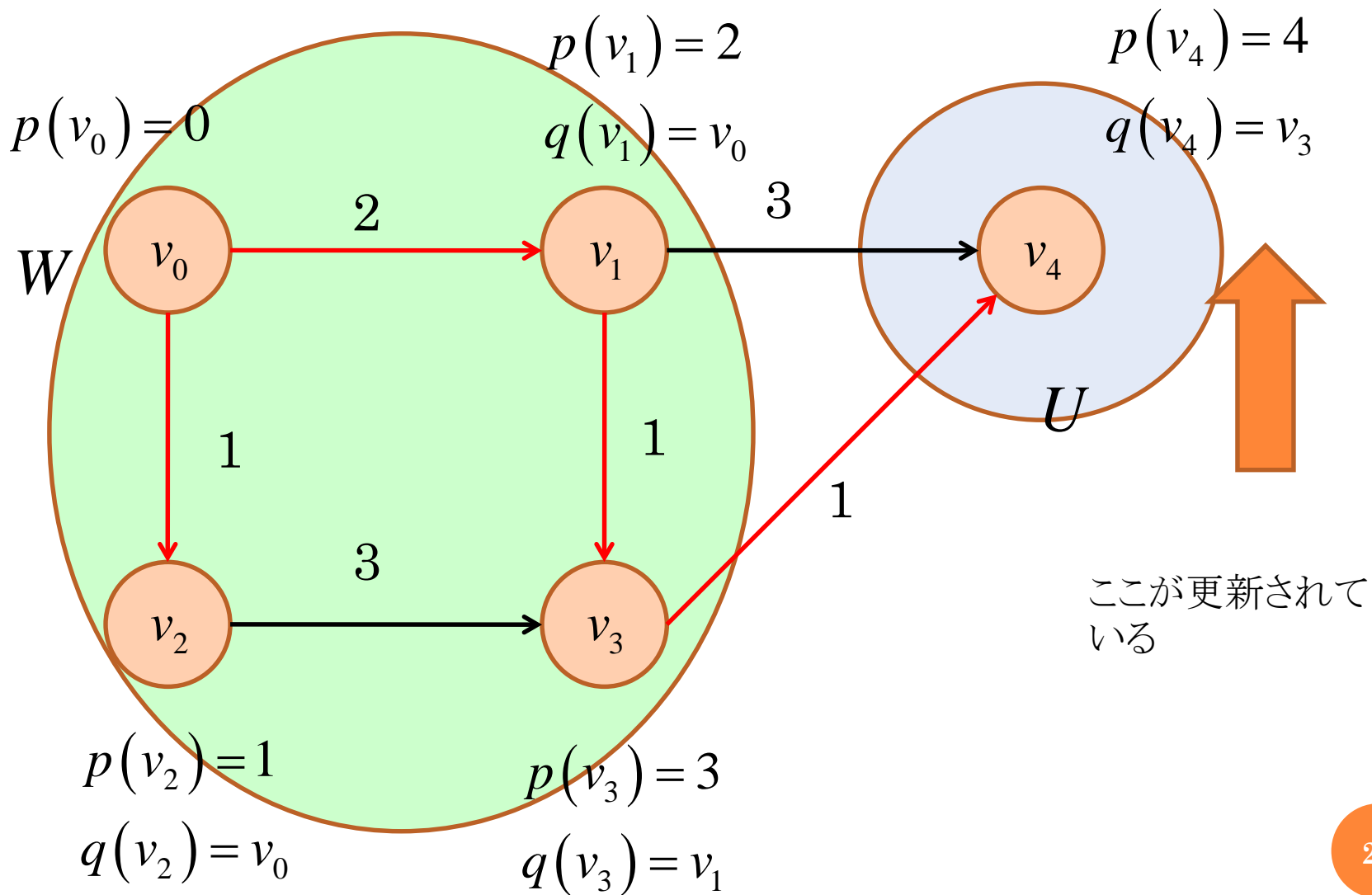
$$p(v_0) = 0$$



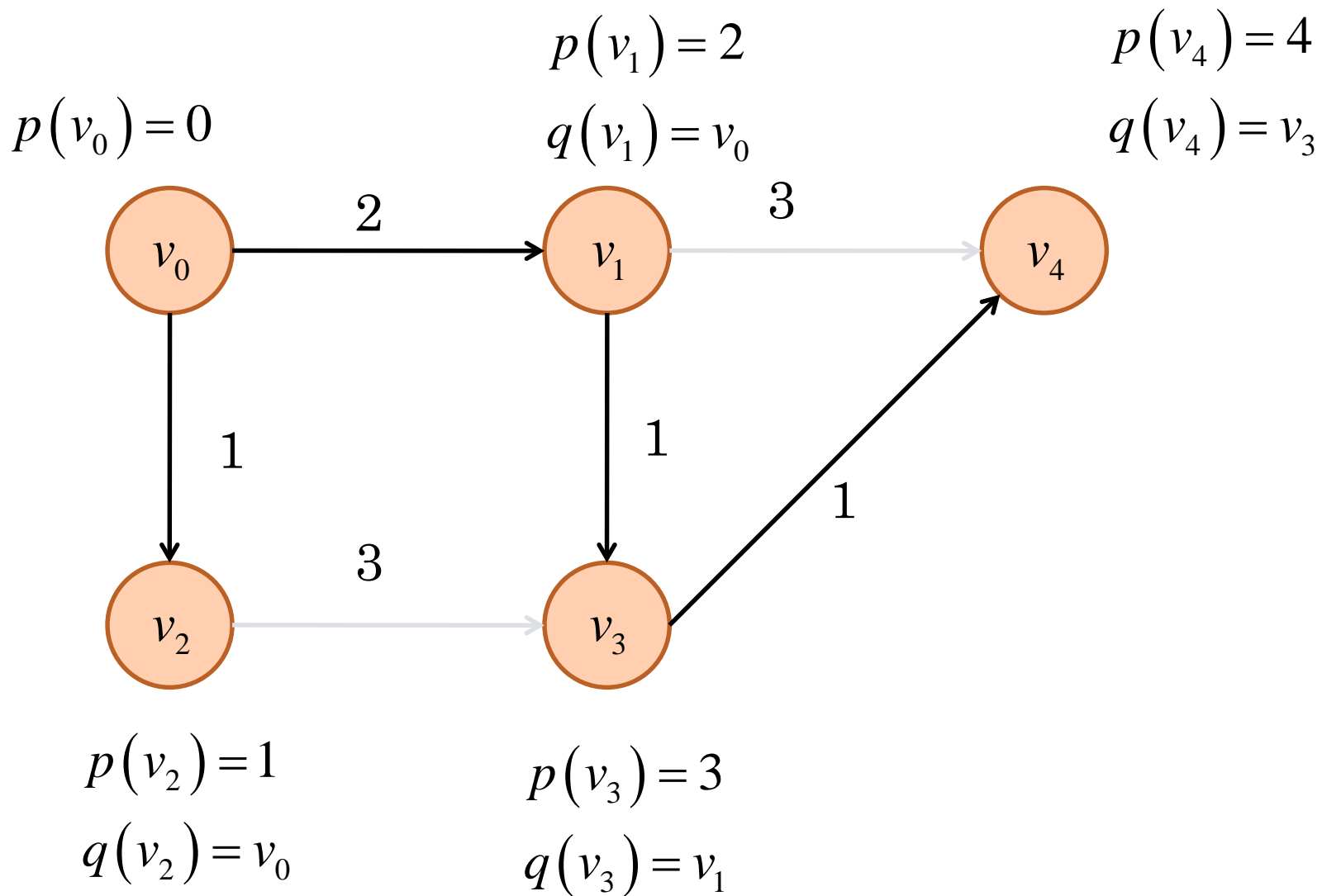




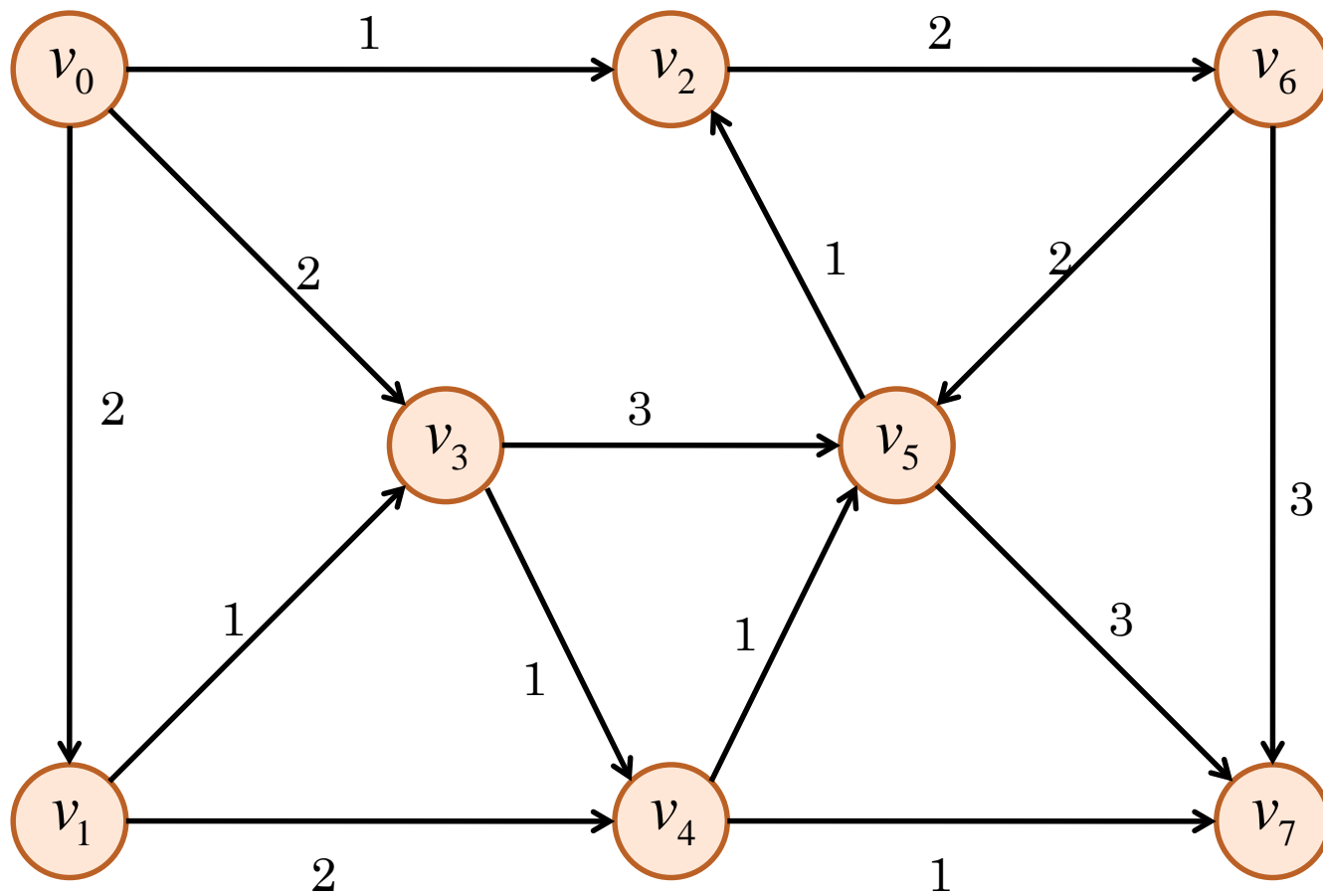




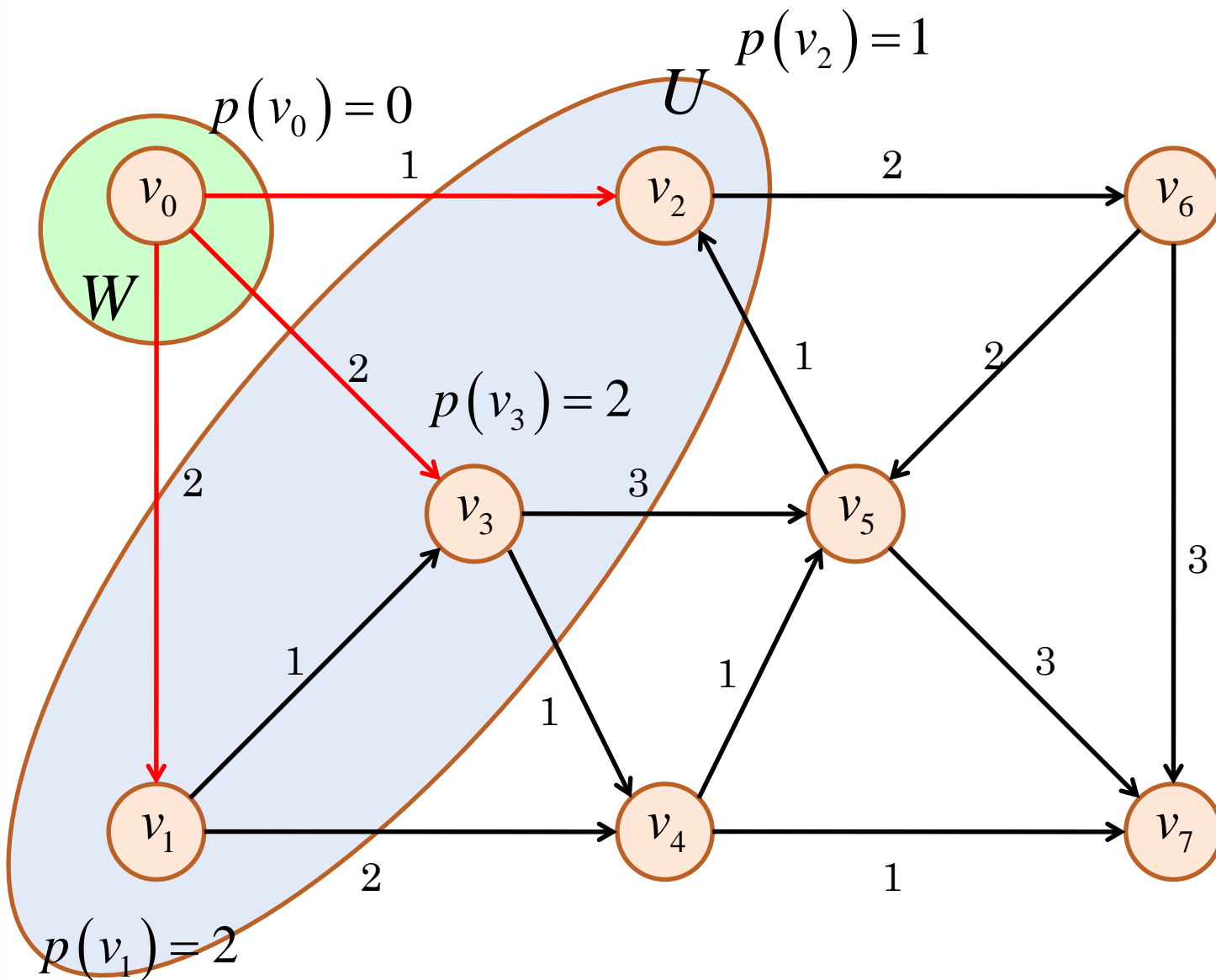
	注目している 頂点	w	U	p	q	変更 を受けた 手順
0		\emptyset	$\{v_0\}$	$p(v_0) = 0$		
1	v_0	$\{v_0\}$	$\{v_1, v_2\}$	$p(v_1) = 2$	$q(v_1) = v_0$	
				$p(v_2) = 1$	$q(v_2) = v_0$	
2	v_2	$\{v_0, v_2\}$	$\{v_1, v_3\}$	$p(v_3) = 4$	$q(v_3) = v_2$	3
3	v_1	$\{v_0, v_1, v_2\}$	$\{v_3, v_4\}$	$p(v_4) = 5$	$q(v_4) = v_1$	4
				$p(v_3) = 3$	$q(v_3) = v_1$	
4	v_3	$\{v_0, v_1, v_2, v_3\}$	$\{v_4\}$	$p(v_4) = 4$	$q(v_4) = v_3$	
5	v_4	$\{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4\}$	\emptyset			



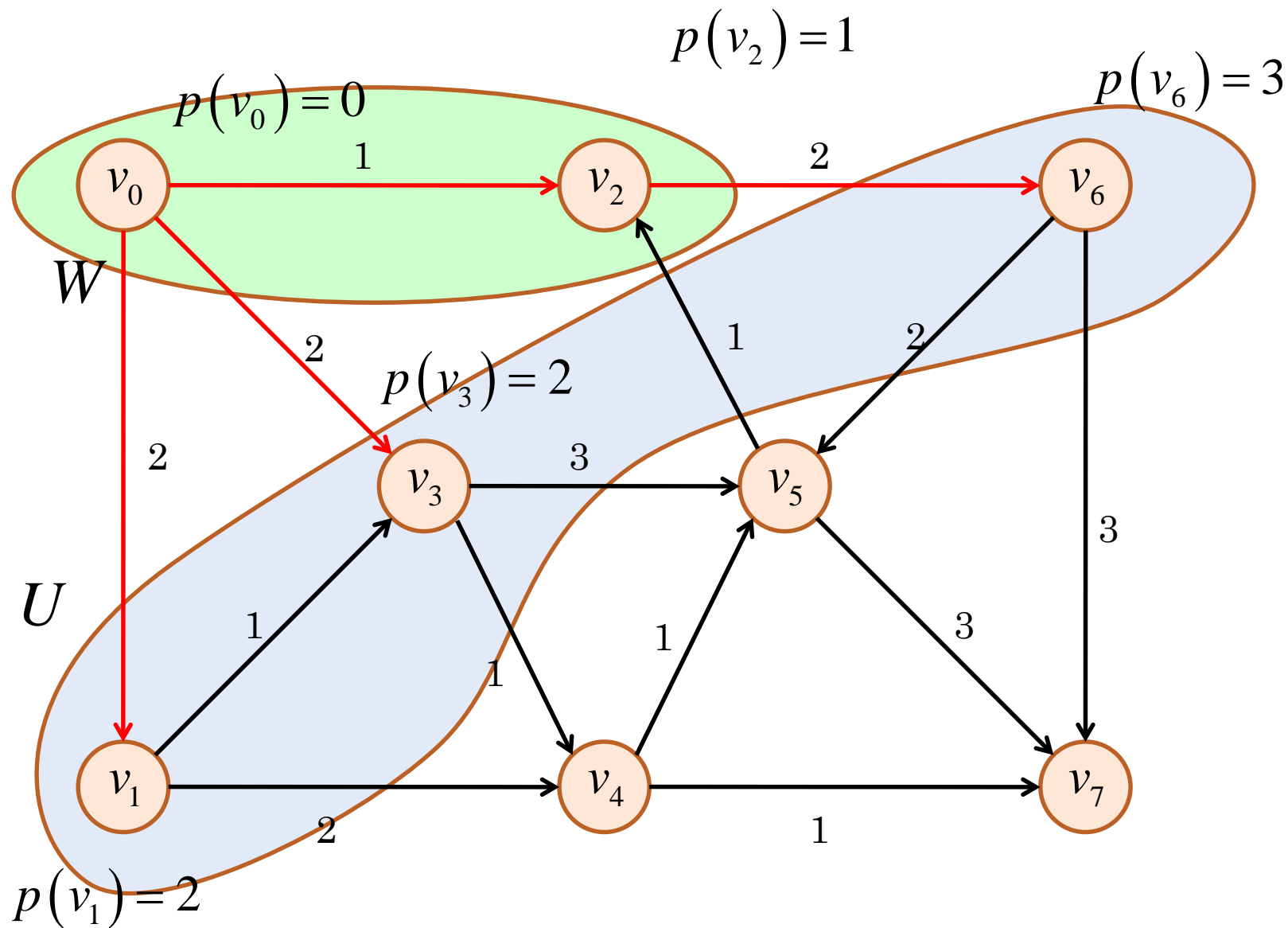
例2



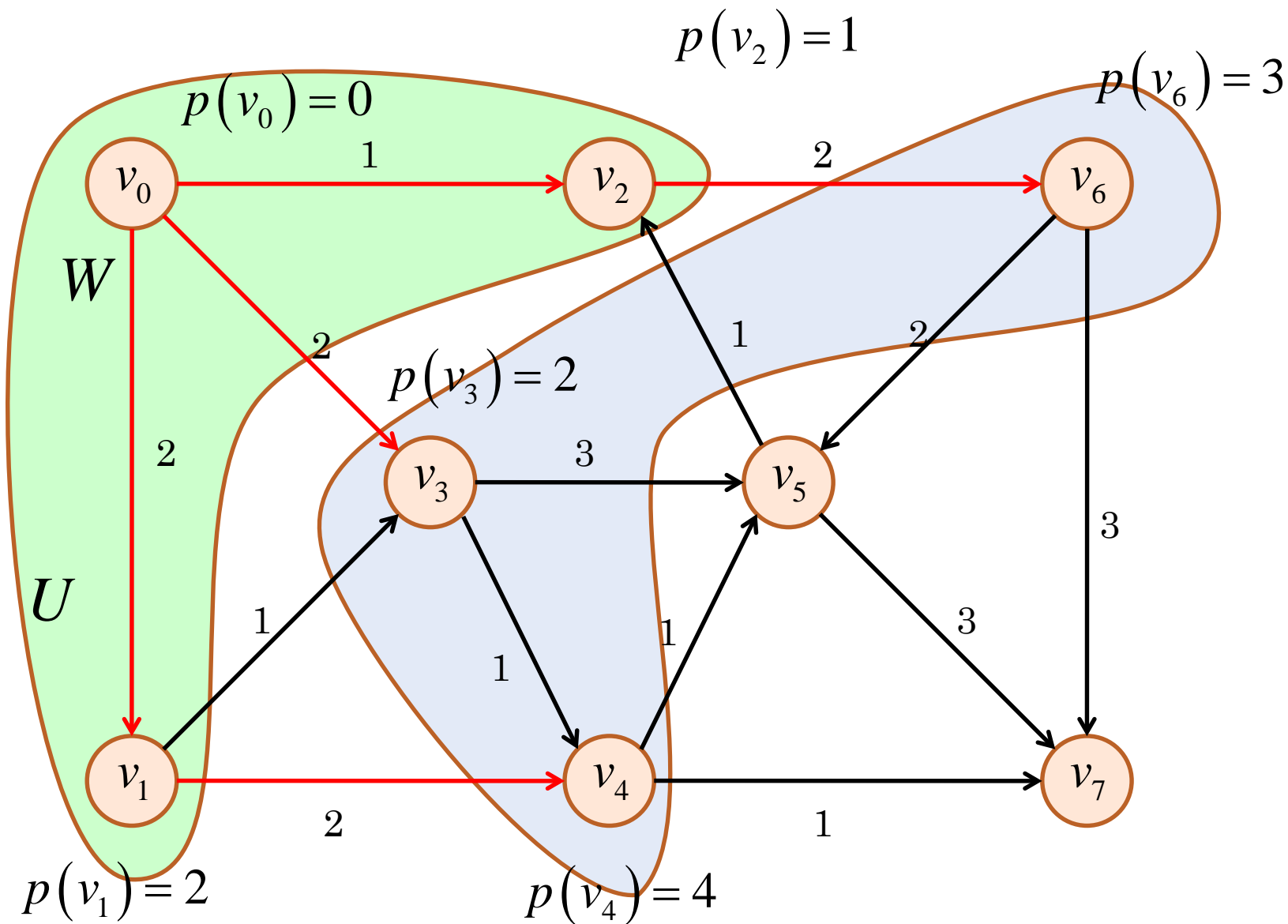
q は省略



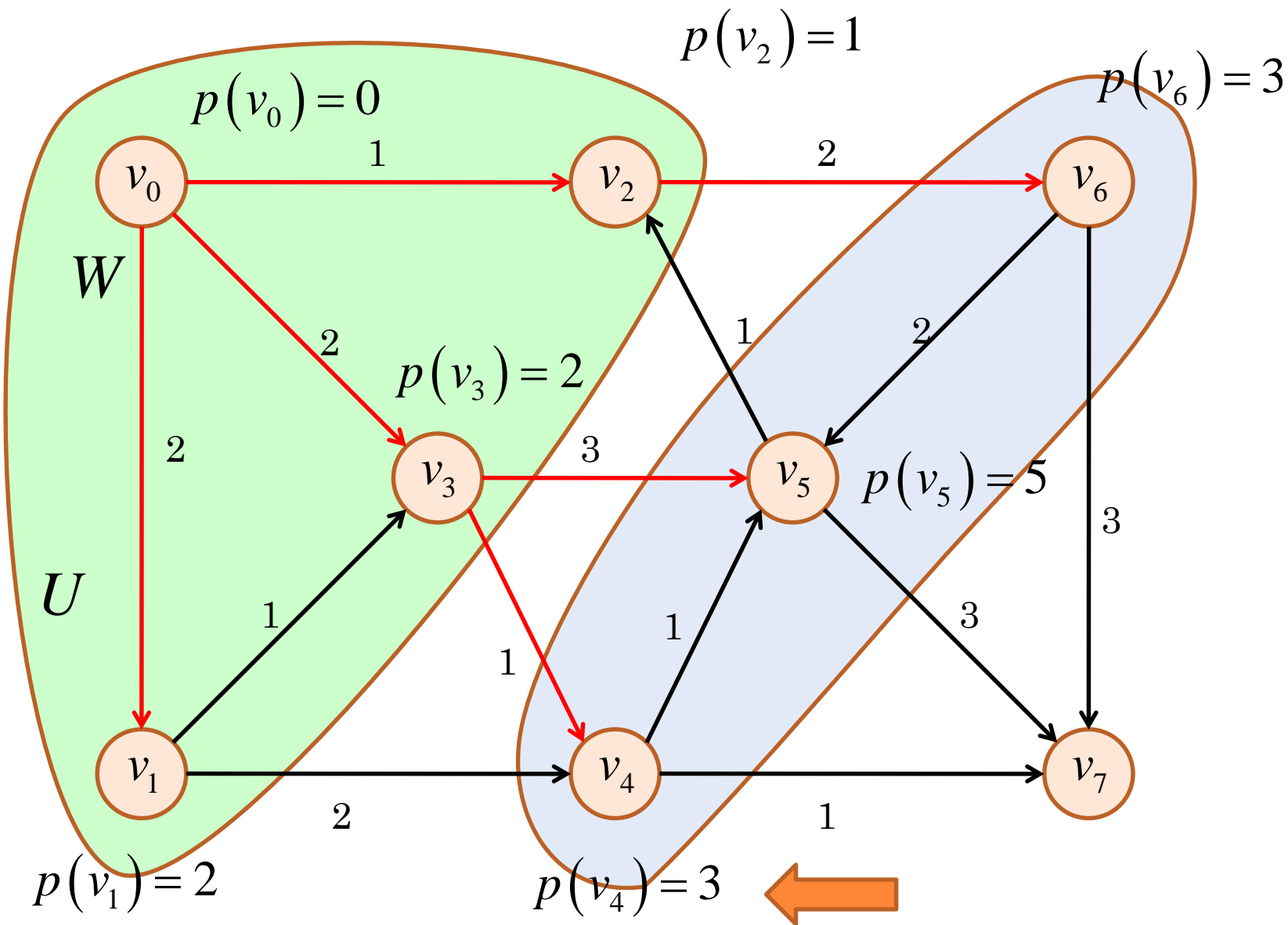
qは省略



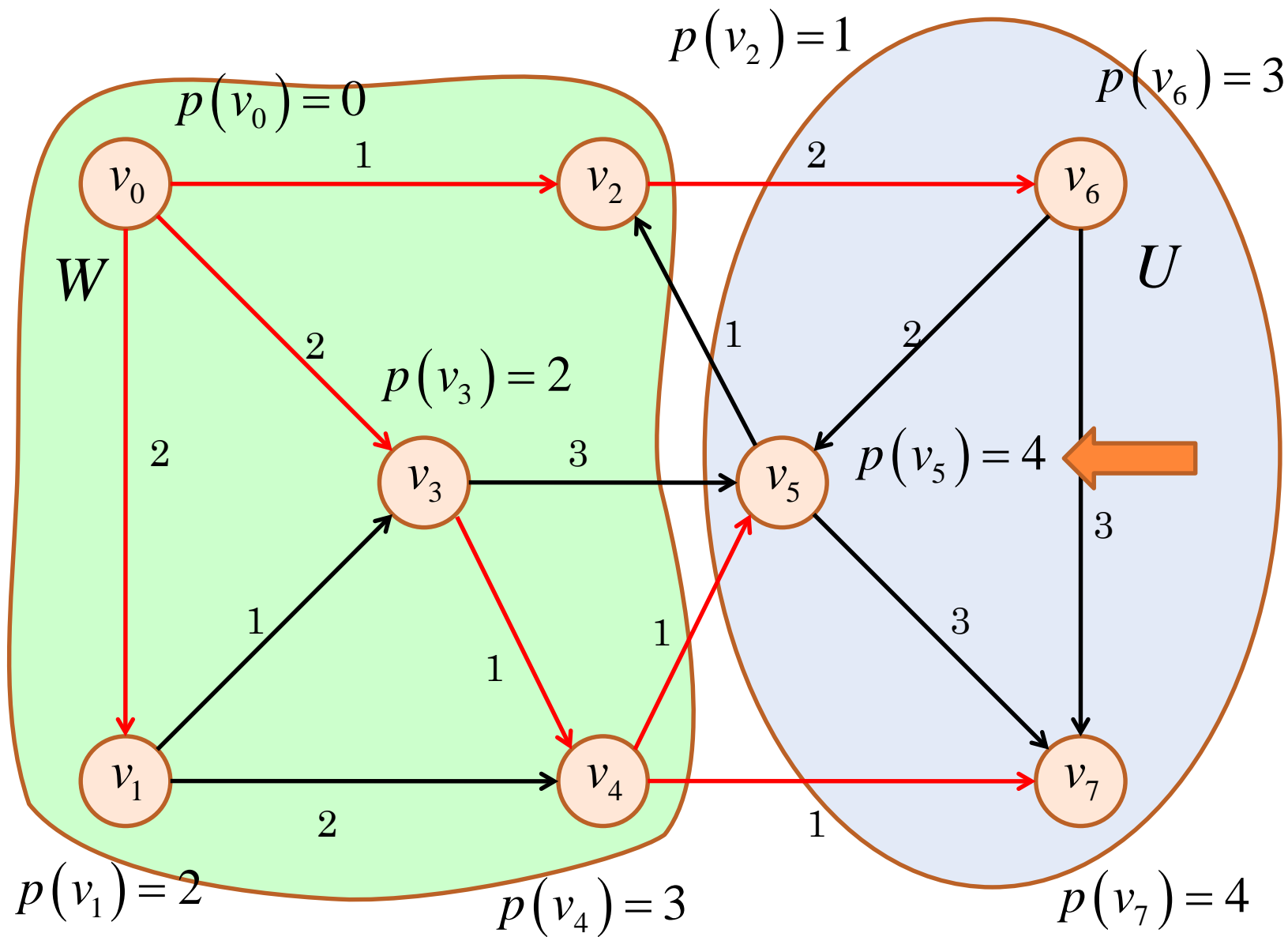
q は省略



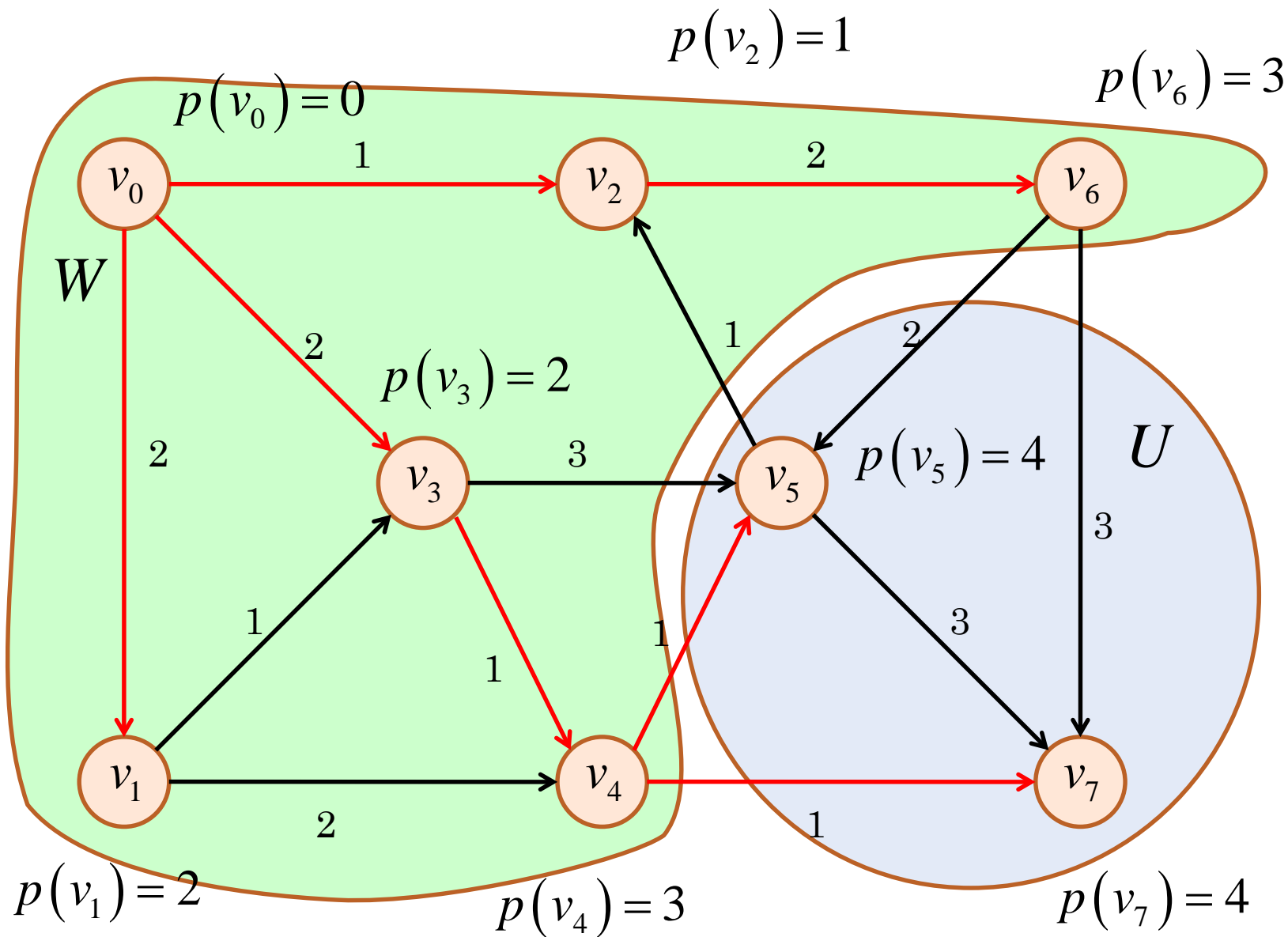
qは省略



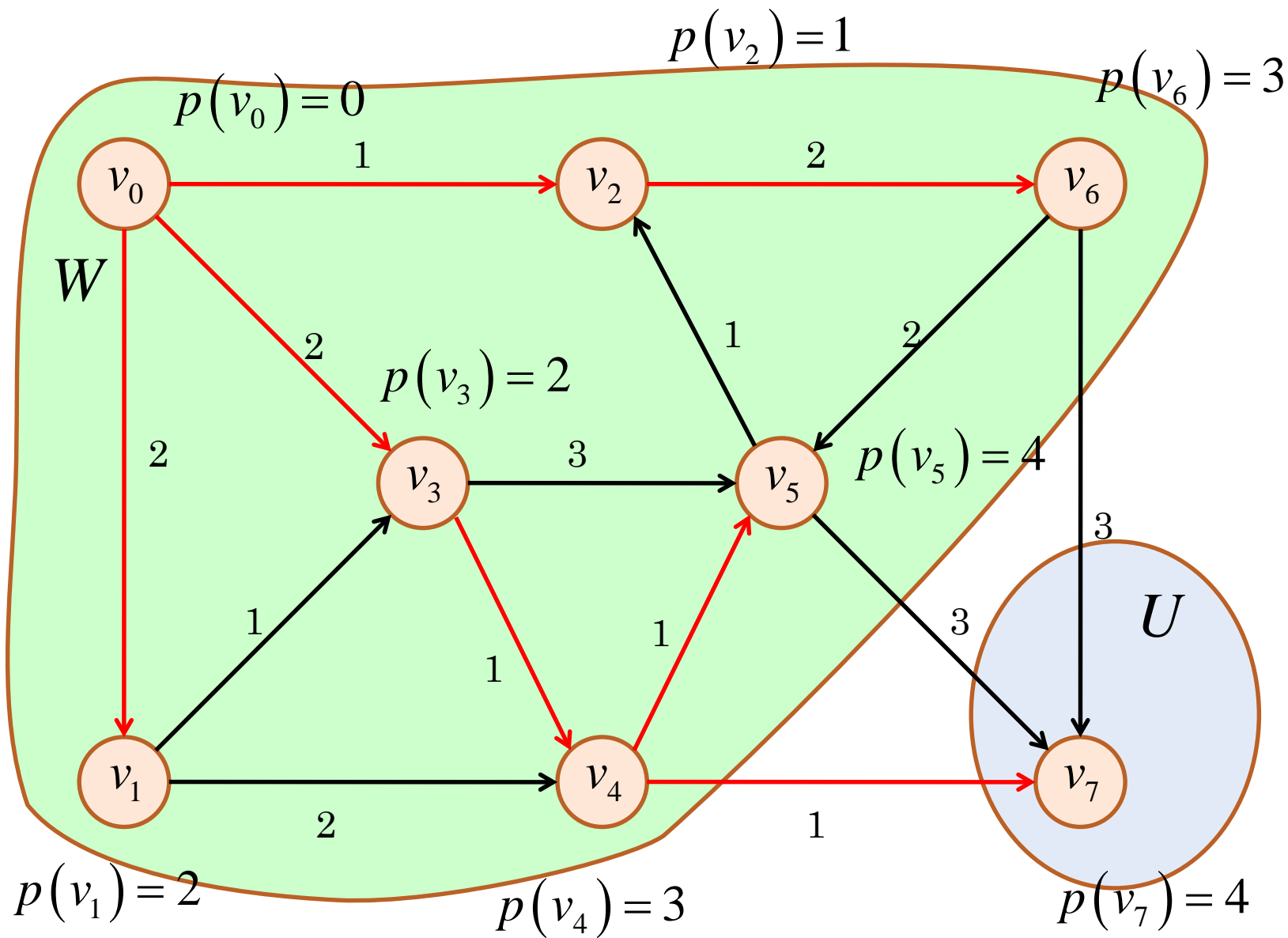
q は省略



q は省略

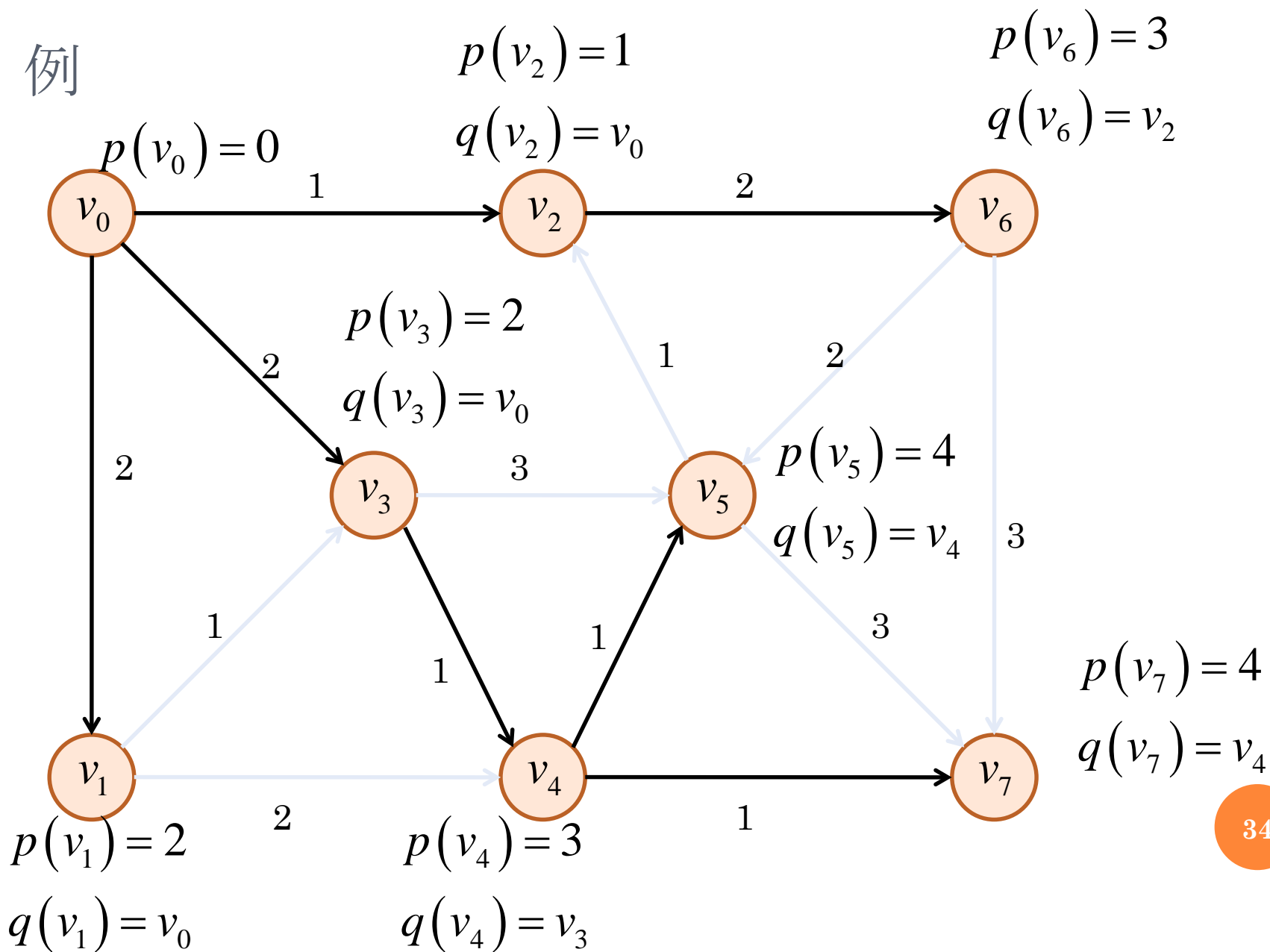


q は省略



	注目している頂点	W	U	p	q	変更を受けた手順
0		\emptyset	$\{v_0\}$	$p(v_0) = 0$		
1	v_0	$\{v_0\}$	$\{v_1, v_2, v_3\}$	$p(v_1) = 2$	$q(v_1) = v_0$	
				$p(v_2) = 1$	$q(v_2) = v_0$	
				$p(v_3) = 2$	$q(v_3) = v_0$	
2	v_2	$\{v_0, v_2\}$	$\{v_1, v_3, v_6\}$	$p(v_6) = 3$	$q(v_6) = v_2$	
3	v_1	$\{v_0, v_1, v_2\}$	$\{v_3, v_4, v_6\}$	$p(v_4) = 4$	$q(v_4) = v_1$	4
4	v_3	$\{v_0, v_1, v_2, v_3\}$	$\{v_4, v_5, v_6\}$	$p(v_4) = 3$	$q(v_4) = v_3$	
				$p(v_5) = 5$	$q(v_5) = v_3$	5
5	v_4	$\{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4\}$	$\{v_5, v_6, v_7\}$	$p(v_5) = 4$	$q(v_5) = v_4$	
				$p(v_7) = 4$	$q(v_7) = v_4$	
6	v_6	$\{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_6\}$	$\{v_5, v_7\}$			
7	v_5	$\{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$	$\{v_5\}$			
8	v_7	$\{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$	\emptyset			

例



DIJKSTRA法が正しいことの証明

○ 補題1

- 頂点集合 W に入った頂点までの距離は、後から更新されることはない

○ 補題2

- W 及び U の要素の頂点は、一意に直前の頂点があり、始点を根とする有向木の一部である
 - この木に沿って $l_p = 0$ である
 - この木以外の道では $l_p \geq 0$ となる
 - つまり、発見した経路の中で最短である
- 以上から、 $W = V$ となることで、すべての最短経路が見つかる

DIJKSTRA法の妥当性: 補題1

- Dijkstra法の実行に伴って、頂点が v_0, v_1, v_2, \dots の順に集合 W に追加されるとする
 - 頂点名は、元のネットワークの頂点名でないことに注意

- このとき

$$0 \leq p(v_0) \leq p(v_1) \leq p(v_2) \leq \dots \leq p(v_i) \leq p(v_{i+1}) \leq \dots$$

- つまり W には、距離の小さい頂点から順に追加されていく。従って、 W に入った頂点のポテンシャルが後から更新されることはない。

補題1証明

- Dijkstra法の実行中に、以下が常に成り立つことを示す
 - W に追加された頂点のポテンシャルは、 W に含まれない任意の頂点のポテンシャルより大きいことはない

$$\max \{ p(u) \mid u \in W \} \leq \min \{ p(u) \mid u \in V \setminus W \}$$

補題1証明

○ 一回目のループ実行後: 自明

- $W = \{v_0\}, p(v_0) = 0$

○ あるステップで成り立つと仮定

- 次に選ばれる頂点: $w \in U \subseteq V \setminus W$

- $V \setminus W$ の中でポテンシャルが最小

- ポテンシャルの更新前

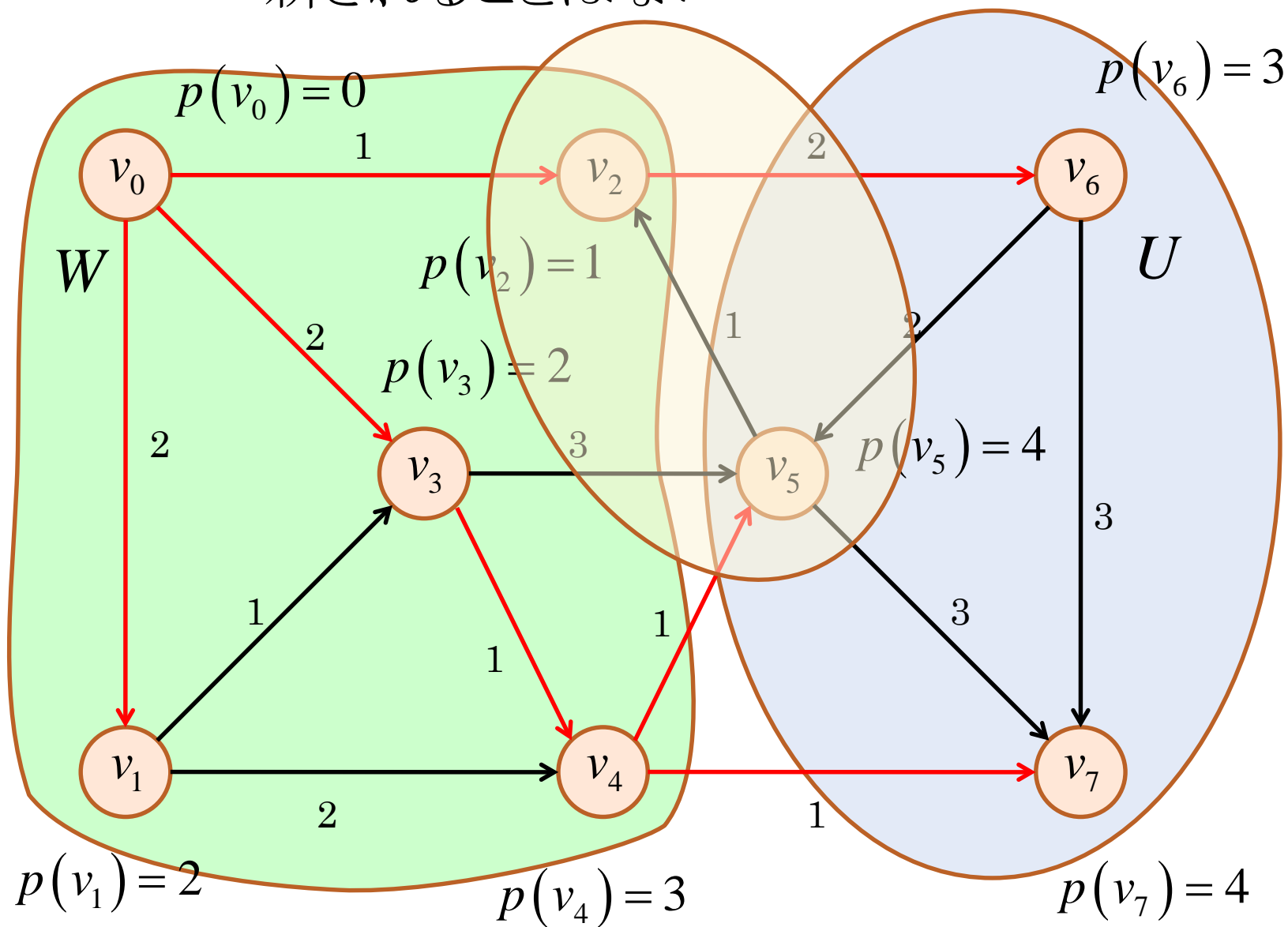
$$\max \{ p(u) \mid u \in W \} \leq p(w) \leq \min \{ p(u) \mid u \in V \setminus (W \cup \{w\}) \}$$

- ポテンシャルの更新後

$$\max \{ p(u) \mid u \in W \} \leq \min \{ p(u) \mid u \in V \setminus W \}$$

v_2 のポテンシャルが更新されることはない

q は省略



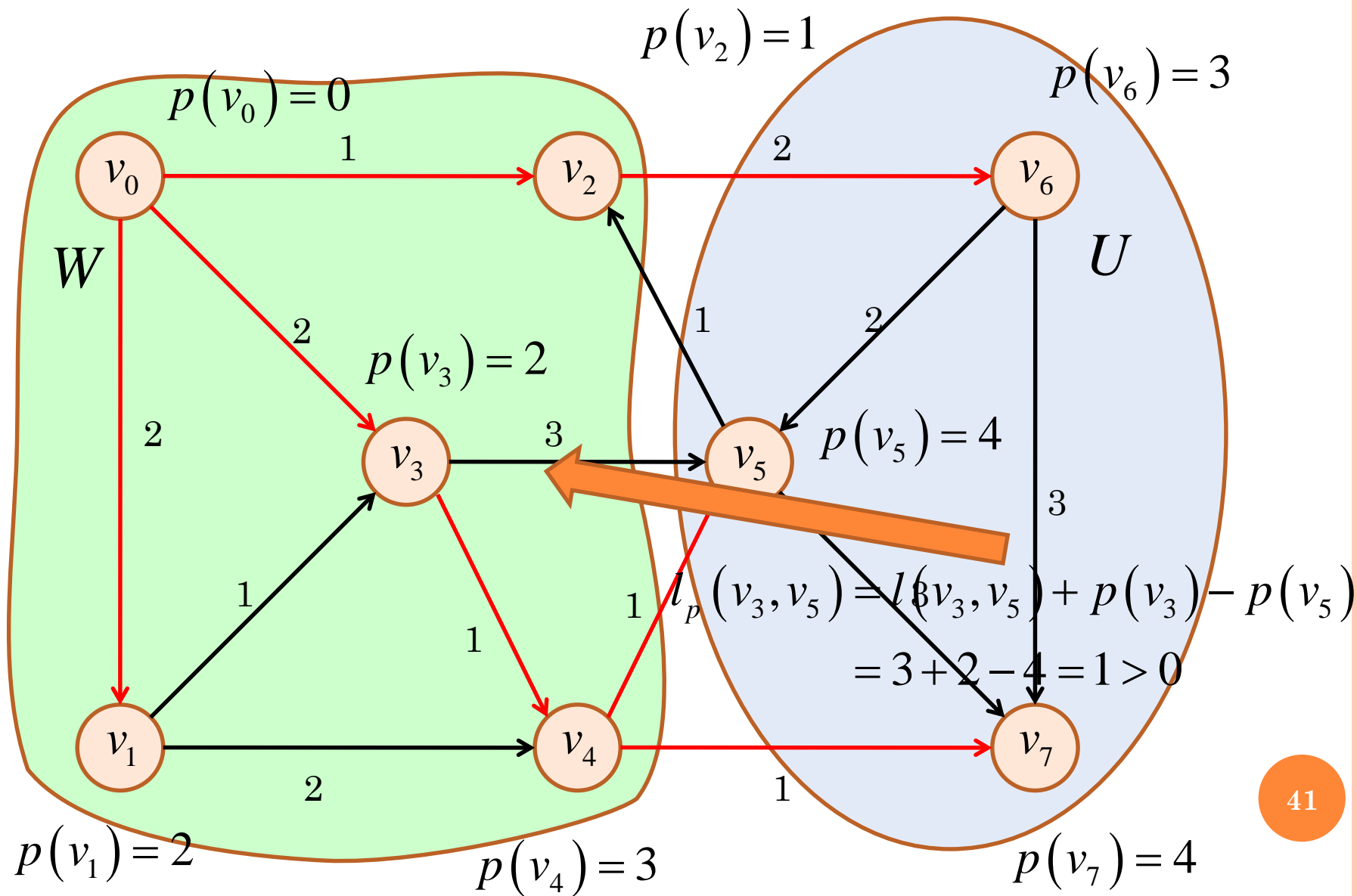
DIJKSTRA法の妥当性: 補題2

- W に始点を持つ G の弧の集合 δ^+W
 - $G_W = (W \cup U, \delta^+W)$ に対して
 - $l_p(a) \geq 0 (\forall a \in \delta^+W)$
- 経路がわかっているならば

$$l_p(q(u), u) = 0 (\forall u \in (W \cup U) \setminus \{v_0\})$$

- $\forall u \in (U \cup W) \setminus \{v_0\}$ に対して定まる弧 $(q(u), u)$ の全体は、 v_0 を根とする有向木である。
- つまり、経路が指定されると、頂点 u は v_0 を根とする有向木の一部となり、その経路に沿って $l_p(v_0, u) = 0$ となる

qは省略



補題2証明

- Dijkstra法の手順から、 $a \in \delta^+ W$ に対して

$$p(\partial^- a) \leq p(\partial^+ a) + l(a)$$

⇓

$$l_p(a) = l(a) + p(\partial^+ a) - p(\partial^- a) \geq 0$$

- $\forall a \in U$ に対して

$$p(u) = p(q(u)) + l(q(u), u)$$

⇓

$$l_p(q(u), u) = l(q(u), u) + p(q(u)) - p(u) = 0$$

補題2証明

- 補題1より、 W の要素は順序付けられている
- $\forall v_j \in W$ に対して、 $q(v_i) = v_j$ ならば、 $j < i$
 - v_i に対して、一意に親の頂点が定まる
- $\forall v \in U$ に対して、 $q(v) = w \in W$
 - 一意に親が定まる
- v_0 を根とした有向木が定まる

DIJKSTRA法で最短経路が求まるのは

- 始点 u から各頂点 v への道 $P(u, v)$ が定まる
- その経路に沿って、 $l_p(P(u, v)) = 0$ となる

$$l(P(u, v)) = p(v) - p(u) \stackrel{\pm}{=} 0$$

- 他の経路 $P'(u, v)$ に対しては、その経路長が $P(u, v)$ よりも長い

$$l(P'(u, v)) = p(v) - p(u) + l_p(P'(u, v)) \geq p(v) - p(u)$$