

「グラフと組み合わせ」課題1 (解答例)

2019/4/11

1 集合の演算

二つの集合

$$X = \{x \mid x \in N, x \leq 12\} \quad (1.1)$$

$$Y = \{x \mid x = 3n + 1, n \in N, n \leq 3\} \quad (1.2)$$

に対して、以下の集合を求め、要素を列挙することで答えなさい。

1. $X \cup Y$
2. $X \cap Y$
3. $X \setminus Y$

解答例 まず、それぞれの集合を要素を列挙することで表現する。

$$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

$$Y = \{4, 7, 10\}$$

これらを使って演算結果を求める。

1. $X \cup Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$
2. $X \cap Y = \{4, 7, 10\}$
3. $X \setminus Y = \{1, 2, 3, 5, 6, 8, 9, 11, 12\}$

2 数学的帰納法

自然数 n に対する以下の公式を、数学的帰納法を用いて証明しなさい。

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2 \quad (2.1)$$

解答例

- $n = 1$ の場合

$$\text{LHS} = 1, \quad \text{RHS} = \left[\frac{1 \times 2}{2} \right]^2 = 1$$

となり、等号が成り立つ。

- ある n に対して式 (2.1) が成り立つと仮定する。

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^n k^3 + (n+1)^3$$

と分け、式 (2.1) を用いる。

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2 + (n+1)^3 \\ &= \frac{(n+1)^2}{4} [n^2 + 4(n+1)] \\ &= \frac{(n+1)^2}{4} (n+2)^2 \\ &= \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2} \right]^2 \end{aligned}$$

つまり、 $n+1$ に対しても等号が成り立つ。

以上、数学的帰納法により、式 (2.1) は任意の自然数 n に対して成り立つ。