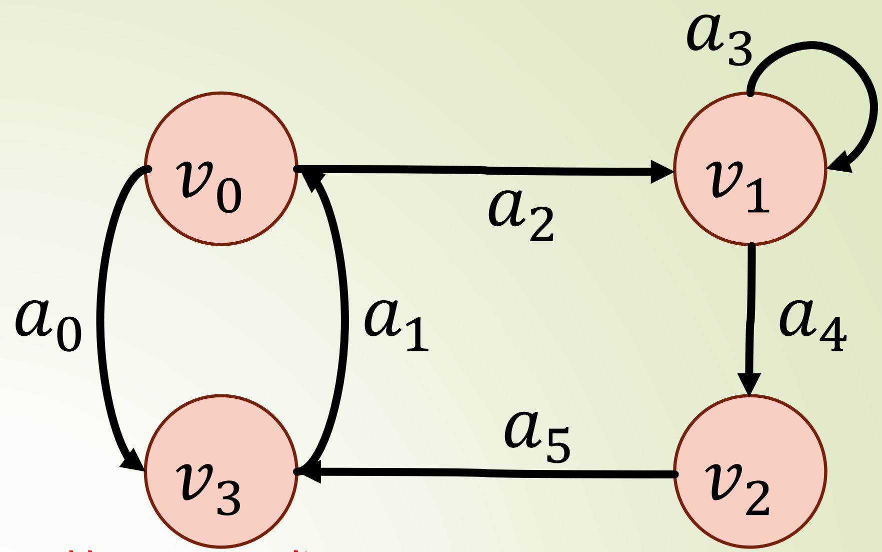
グラフを記述する

2019年度

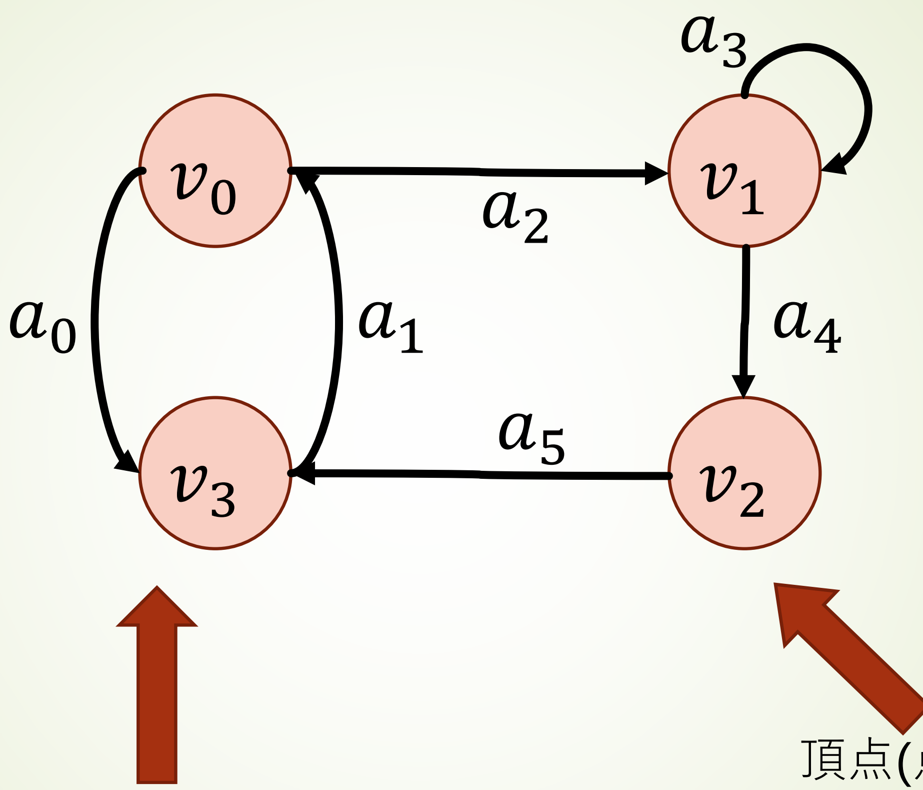
担当：只木進一（理工学部）

今日のテーマ



- グラフを数学の言葉で記述する
  - 対象を表す記号とその関係式
  - 図形表記と式表記の関係
  - アルゴリズムの対象となる
- グラフに関する基本用語の導入
  - グラフの構成要素に名前をつける
  - グラフ、頂点、弧

グラフの要素



弧(枝、辺)
Arc (Edge)

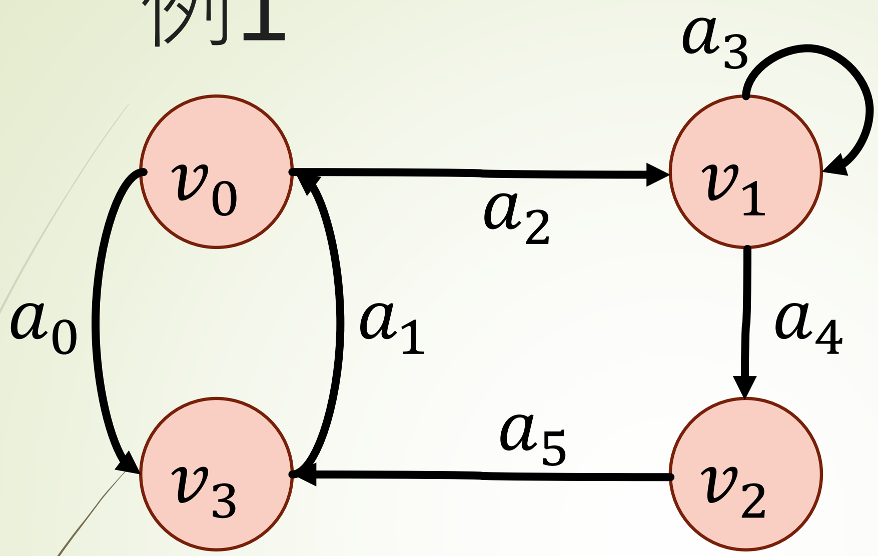
頂点(点)
Vertex (Node)

グラフの定義

- 頂点(点)の集合 V : Vertex, Node
- 弧(枝、辺)の集合A : Arc, Edge
- 弧からその始点への写像：$\partial^+ : A \to V$
- 弧からその終点への写像：$\partial^- : A \to V$
- グラフの定義$G = (V, A, \partial^+, \partial^-)$
  - 頂点の集合、弧の集合、弧から頂点への写像により定義

註：向きがある場合に弧(arc)、無い場合に辺(edge)と、区別することもある。

例1



$$V = \{v_0, v_1, v_2, v_3\}$$

$$A = \{a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$$

$$\partial^+ a_0 = v_0 \quad \partial^- a_0 = v_3$$

$$\partial^+ a_1 = v_3 \quad \partial^- a_1 = v_0$$

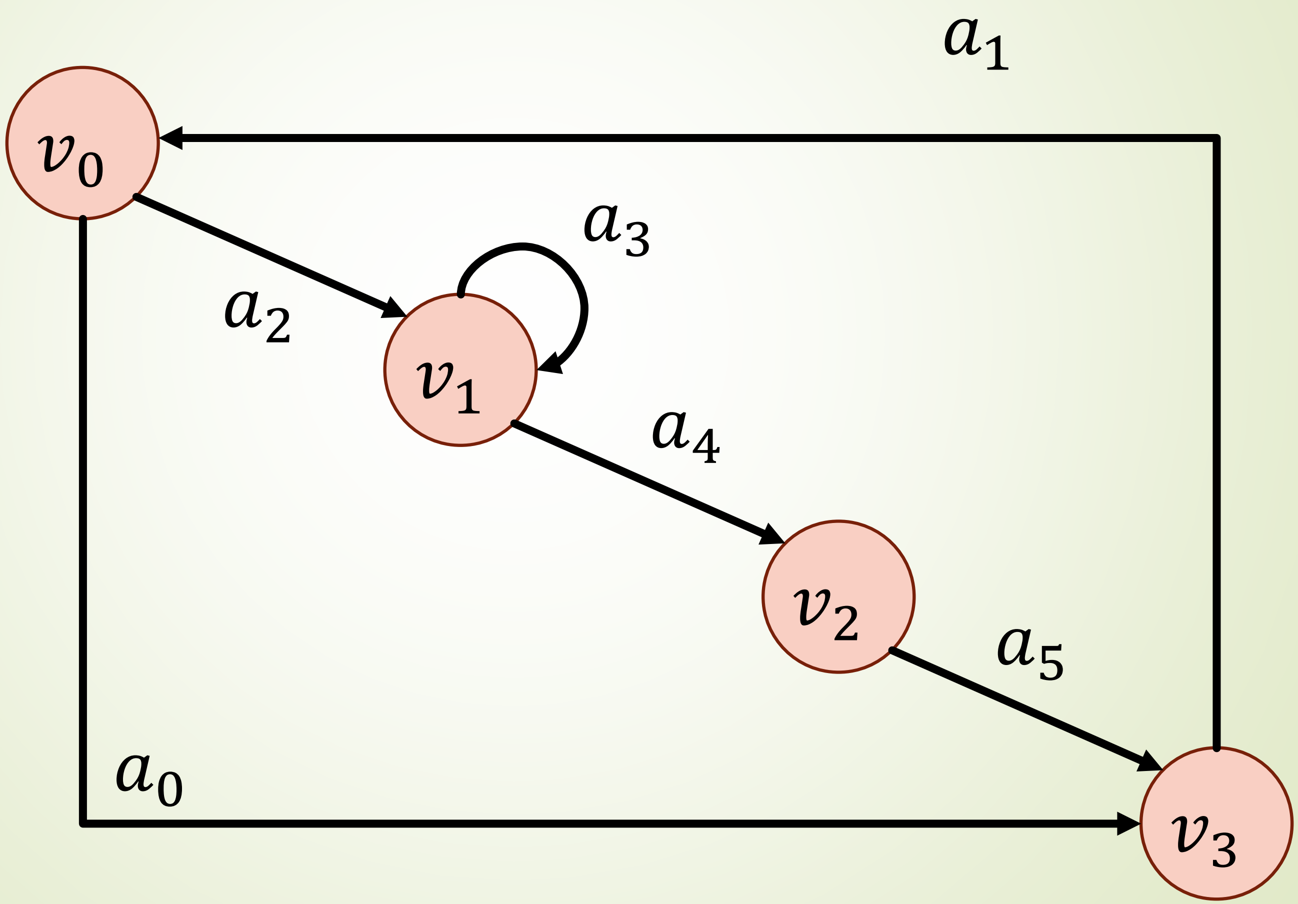
$$\partial^+ a_2 = v_0 \quad \partial^- a_2 = v_1$$

$$\partial^+ a_3 = v_1 \quad \partial^- a_3 = v_1$$

$$\partial^+ a_4 = v_1 \quad \partial^- a_4 = v_2$$

$$\partial^+ a_5 = v_2 \quad \partial^- a_5 = v_3$$

別の幾何学的表現



例2

$$V=\{v_0,v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$$

$$A=\{a_0,a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8,a_9,a_{10}\}$$

$$\partial^+a_0=v_0 \quad \partial^-a_0=v_1 \quad \partial^+a_1=v_0 \quad \partial^-a_1=v_2$$

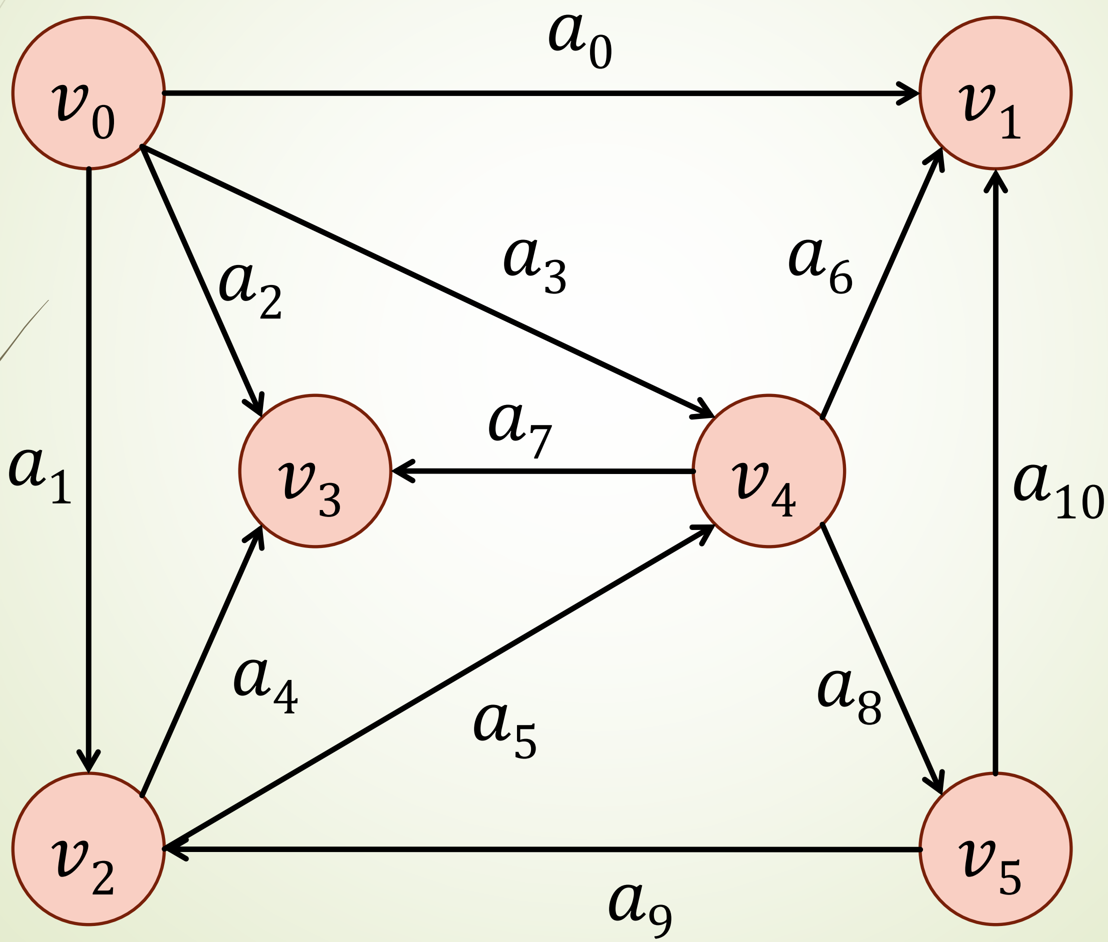
$$\partial^+a_2=v_0 \quad \partial^-a_2=v_3 \quad \partial^+a_3=v_0 \quad \partial^-a_3=v_4$$

$$\partial^+a_4=v_2 \quad \partial^-a_4=v_3 \quad \partial^+a_5=v_2 \quad \partial^-a_5=v_4$$

$$\partial^+a_6=v_4 \quad \partial^-a_6=v_1 \quad \partial^+a_7=v_4 \quad \partial^-a_7=v_3$$

$$\partial^+a_8=v_4 \quad \partial^-a_8=v_5 \quad \partial^+a_9=v_5 \quad \partial^-a_9=v_2$$

$$\partial^+a_{10}=v_5 \quad \partial^-a_{10}=v_1$$

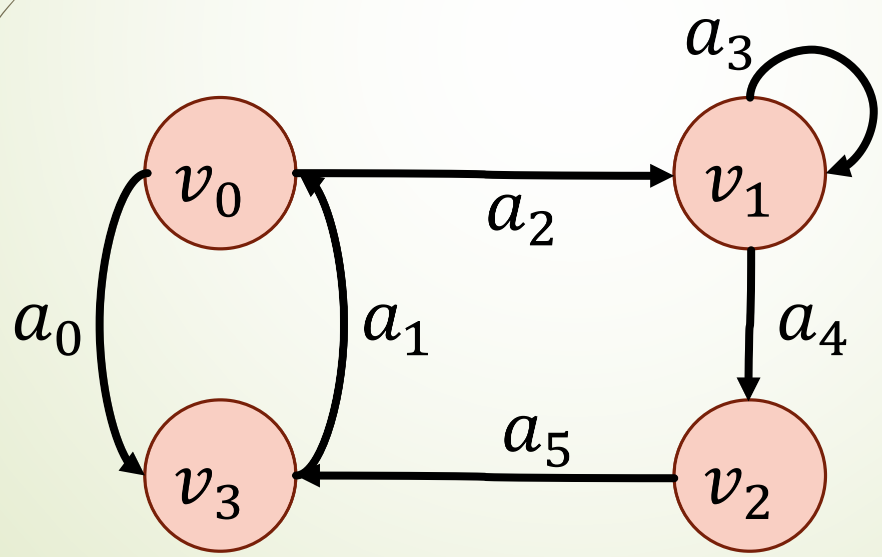

a_0
v_0
v_1
a_2
a_3
a_6
a_1
v_3
a_7
v_4
a_{10}
a_4
a_5
a_8
v_2
v_5
a_9

グラフの幾何学表現

- グラフの幾何学的表現 (Geometrical Representation)
  - 唯一ではない：頂点の位置を変えることで、見た目は変わる
  - 頂点間の繋がり具合が問題
    - トポロジー (Topology) を問題にする
- 同形(Isomorphic)なグラフ
  - 頂点や弧の名前の付替で同じになるグラフ
  - iso：同一、類似、等しい
  - morphism：形

頂点から弧への写像

- $\delta^{+}: V \rightarrow 2^{A}$：指定された頂点を始点とする弧の集合



$$\delta^{+}v_0 = \{a_0, a_2\}$$

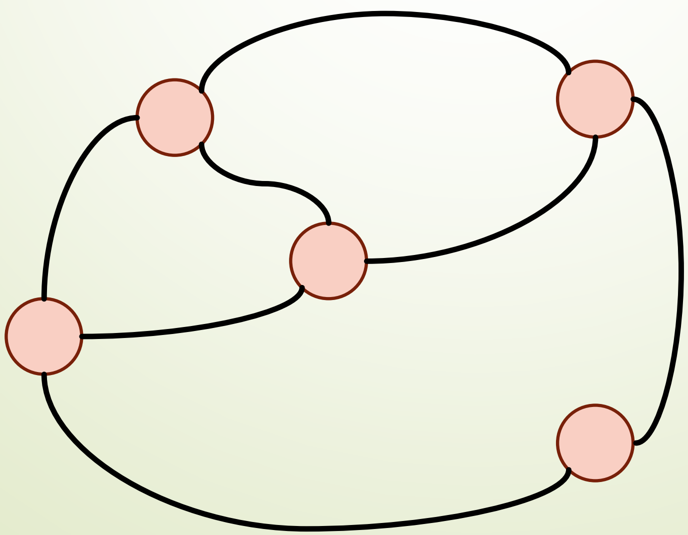
$$\delta^{+}v_1 = \{a_3, a_4\}$$

$$\delta^{+}v_2 = \{a_5\}$$

$$\delta^{+}v_3 = \{a_1\}$$

有向グラフと無向グラフ

- 有向グラフ (directed graph)
  - 弧に向きがある
- 無向グラフ (undirected graph)
  - 弧に向きが無い

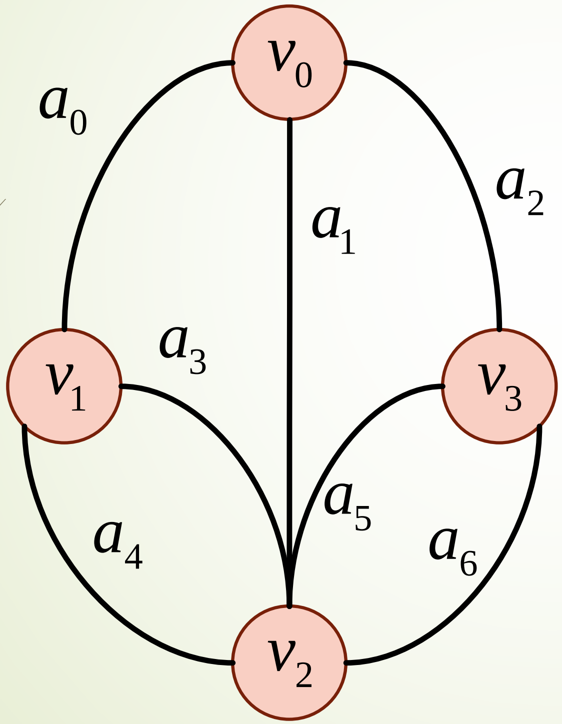


- 有向グラフ
  - Webページのリンク
  - 作業フロー
- 無向グラフ
  - インターネット接続
  - 鉄道網（例外あり）

例：Königsberg Bridges

- Leonhard Eulerが1735年にKönigsberg (当時はPrussia、現在はRossia共和国のKaliningrad) に懸る橋の問題を解いた
- https://wild.maths.org/bridges-k%C3%B6nigsberg-0

例：Königsberg Bridges



$$V=\{v_0,v_1,v_2,v_3\}$$

$$A=\{a_0,a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6\}$$

$\partial a_0=(v_0,v_1)$ $\quad$ $\partial a_1=(v_0,v_2)$

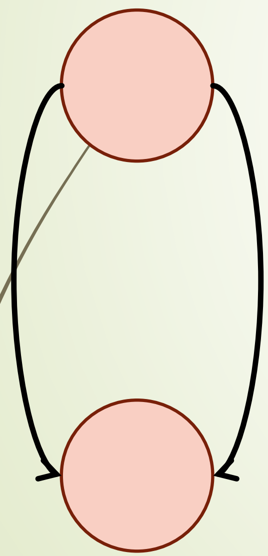
$\partial a_2=(v_0,v_3)$ $\quad$ $\partial a_3=(v_1,v_2)$

$\partial a_4=(v_1,v_2)$ $\quad$ $\partial a_5=(v_2,v_3)$

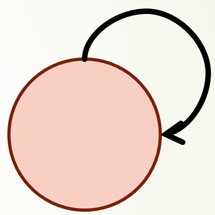
$\partial a_6=(v_2,v_3)$

並列弧と孤立弧

- 並列弧

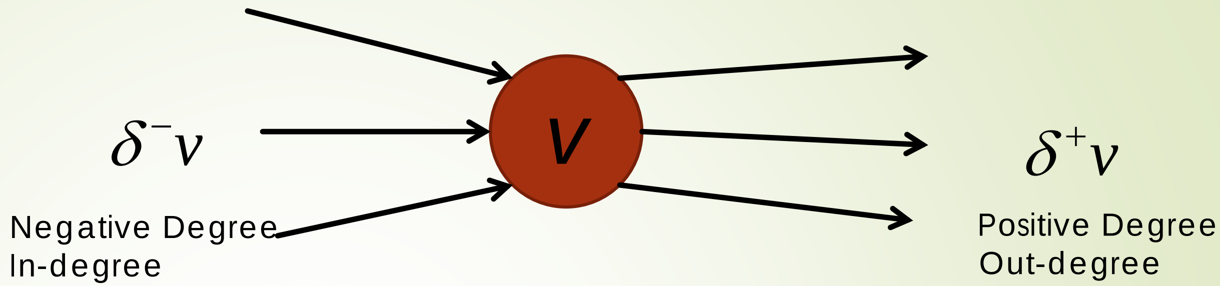


- 孤立弧



- 単純なグラフ
  - 並列弧と孤立弧が無い

次数 (degree)



- 頂点 v から出る弧の全体:$\delta^{+} = \{a|v = \partial^{+}a\}$
- 頂点 v の正の次数：頂点 v から出る弧の数 $|\delta^{+}v|$
- 頂点 v に入る弧の全体:$\delta^{-} = \{a|v = \partial^{-}a\}$
- 頂点 v の負の次数：頂点 v に入る弧の数 $|\delta^{-}v|$

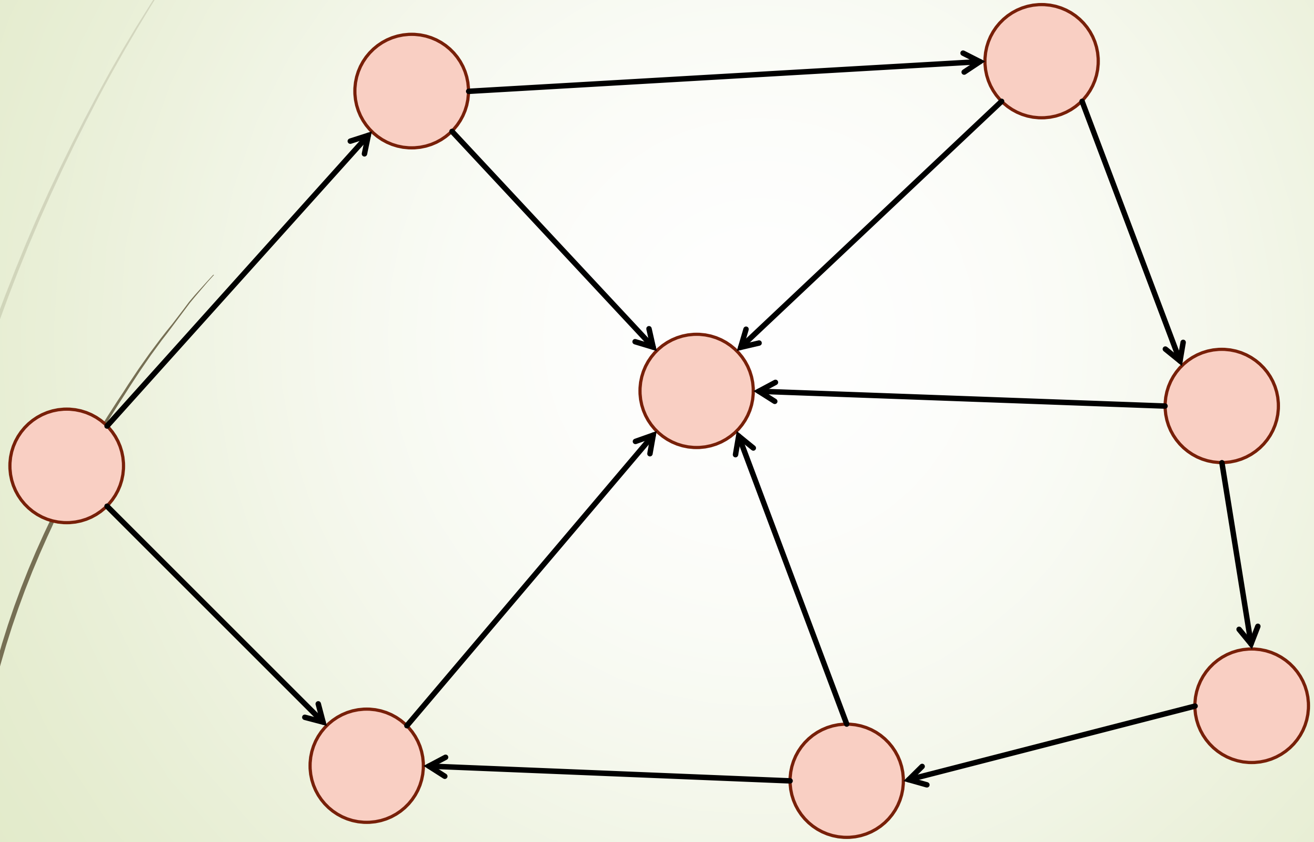
部分グラフ(Sub-graph)

- グラフG のうち、頂点及び弧の一部から構成されるグラフをG の部分グラフと呼ぶ
- 部分グラフの構成
  - グラフG からいくつかの弧を開放除去する
  - グラフGからいくつかの孤立点を除去する

部分グラフの種類

- Gの全域部分グラフ(spanning sub-graph)
  - Gと同じ頂点集合を持つ G の部分グラフ H
- G の誘導部分グラフ (induced sub-graph)
  - G の頂点集合V の部分集合Uに対して、両端点がUに属する弧の全体集合を $A(U)$ とするとき、Uと$A(U)$ からなるグラフ。

Spanning Tree



Induced Subgraph