最小木問題 Minimum Tree Problem

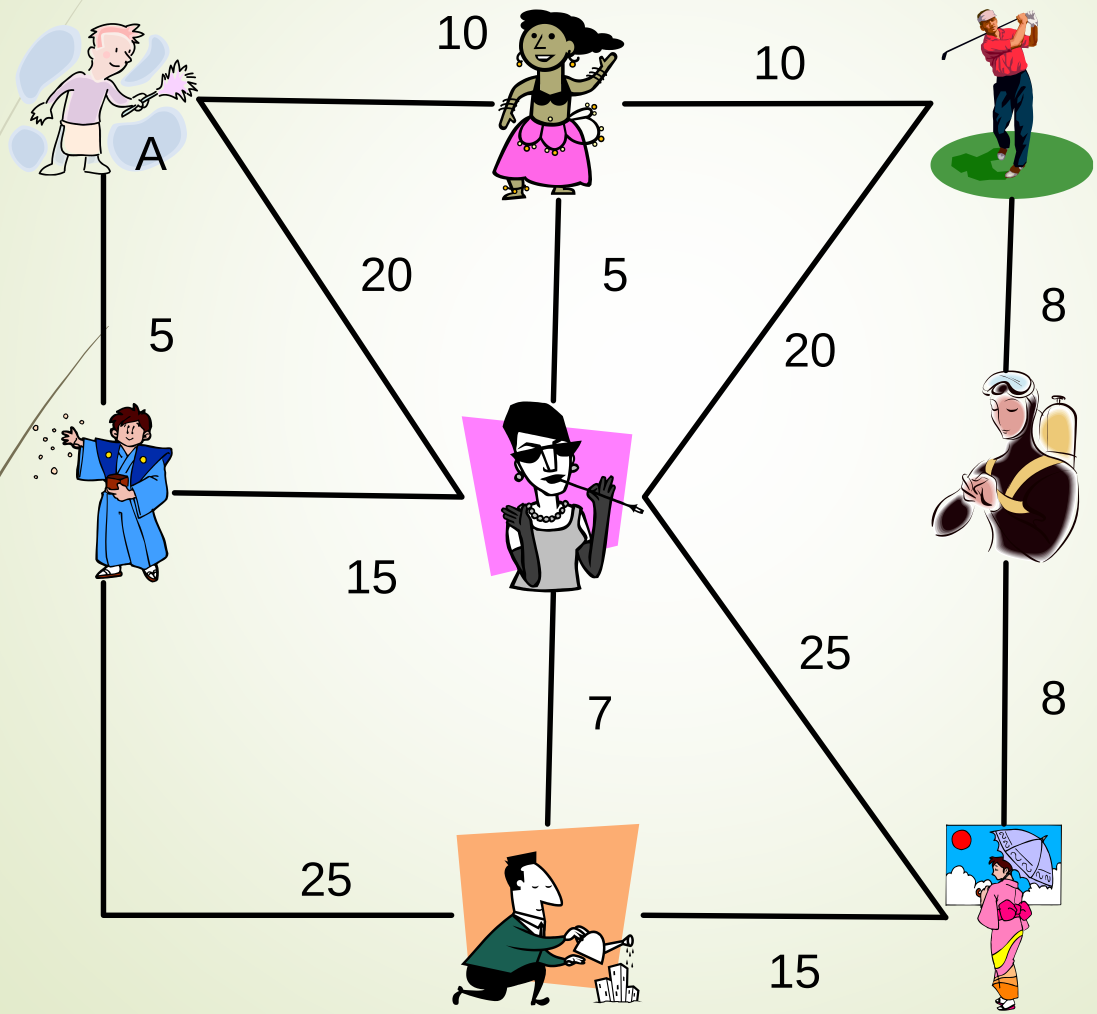
2019年度

担当：只木進一（理工学部）

ネットワーク(networks)

- 弧に長さ、重み、費用などの属性のあるグラフ
  - 都市とそれを結ぶ交通
    - 都市間の道路距離
    - 都市間の鉄道の運賃
    - 都市間の空路の最大輸送可能人数
  - コンピュータとネットワーク：帯域
  - 作業工程：所用時間、遅れ

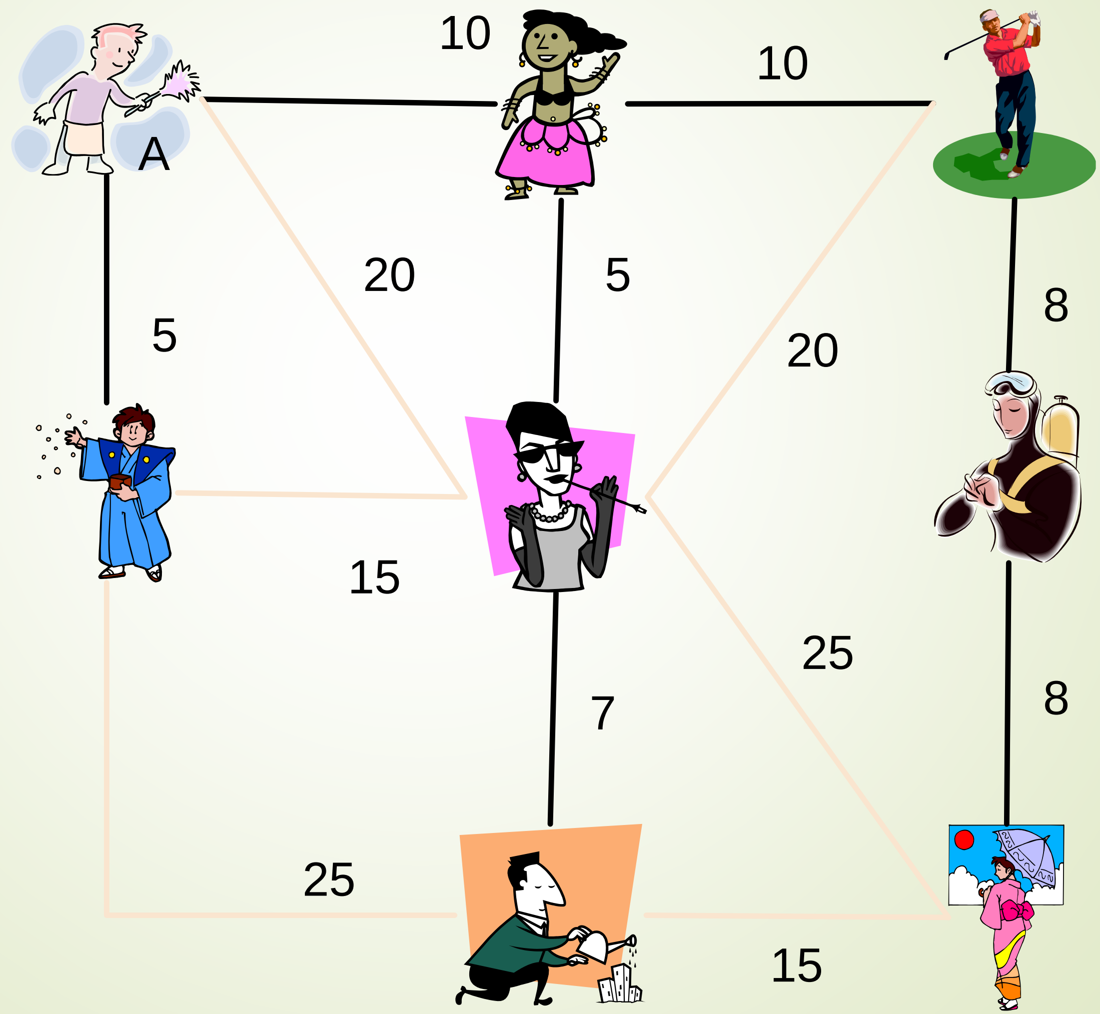
例：最安の連絡経路



Aから全員に最も安く連絡する経路総経費を考える

経路の経費が定義されている

例：最安の連絡経路：解



最小木問題(Minimum Tree Problem)

- 連結無向グラフ$G = (V, A)$
- 重み関数$w: A \to R$
  - 各弧に実数が対応：重み、距離、etc.
  - 弧の重みは正 $\forall a: w(a) > 0$
- G の極大木$T \subseteq A$
  - 重みが最小になる極大木Tを見付ける

$$\min_T w(T)$$

$$w(T) = \sum_{a \in T} w(a)$$

最小木問題の応用

- 油井（ゆせい）から精油所へパイプラインを引く
  - 最短(経費の最も安い)のパイプラインで一カ所に原油を集める
- 最小のコストでコンピュータを繋ぐ
- 通信コストを最小にして事業所を繋ぐ

Kruskal法 (貪欲法、Greedy法)

- 重み最小の弧を順に選ぶ
- 構成途中は木になっていない（部分木の集合）
- 閉路ができないように制限しながら弧を選択する
- greedy : wanting more money, power, food, etc. than you really need. (Oxford)

貪欲アルゴリズム (Greedy algorithm, Kruskal algorithm)

$T = \emptyset$

H:Gは弧の重みに関するヒープ:最初に全弧を登録

while (TはGの極大木ではない){

  $a = H.\mathrm{poll}()$//ヒープから最小要素を取得

  $a_{\mathrm{new}} = \mathrm{null}$

  while (a_{new}==null) {

    if ($T \cup \{a\}$ は閉路を持たない) $\{a_{\mathrm{new}} = a\}$

    else $\{\ a = H.\mathrm{poll}()\ \}$

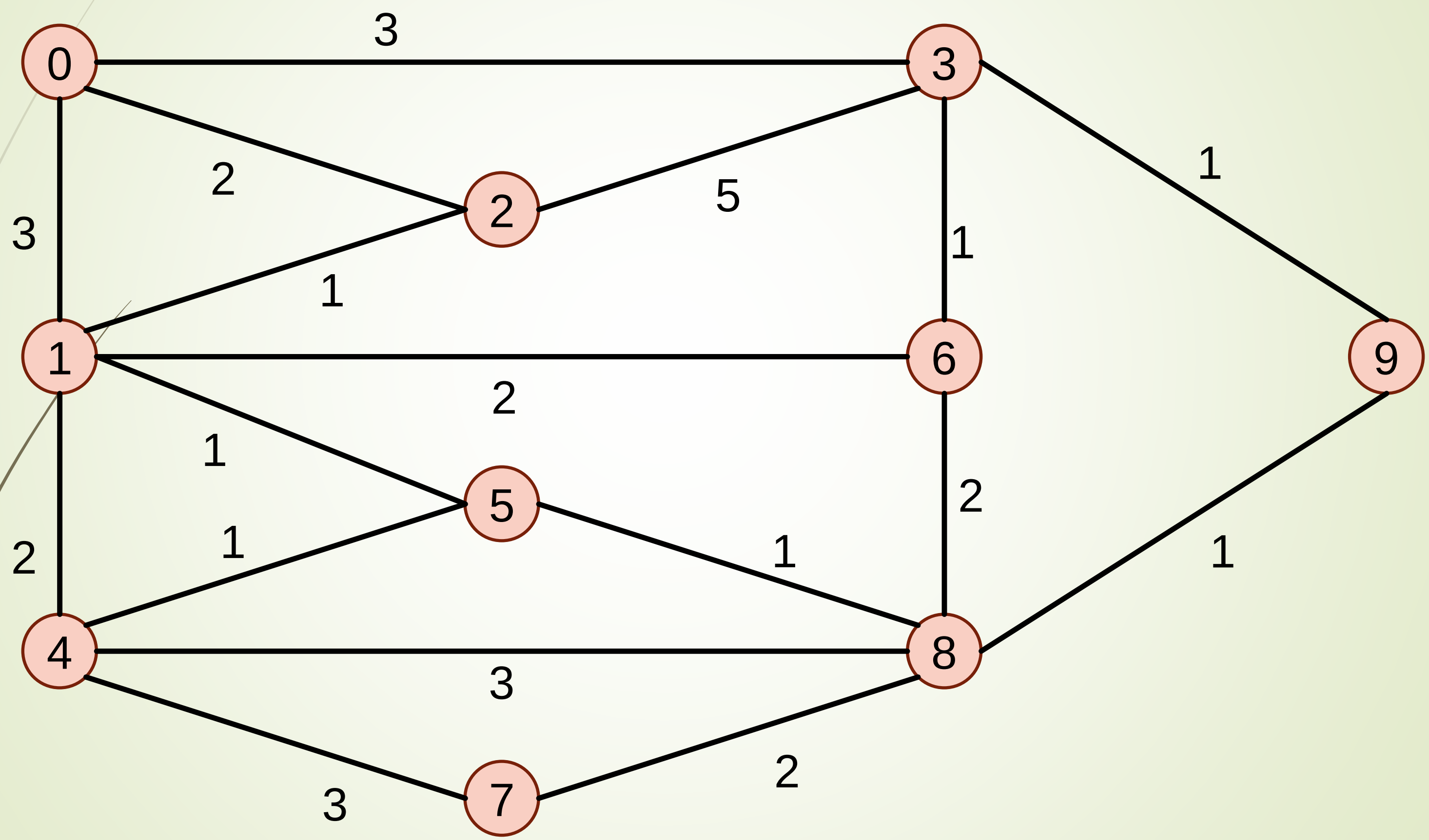
  }

  $T = T \cup \{a_{\mathrm{new}}\}$

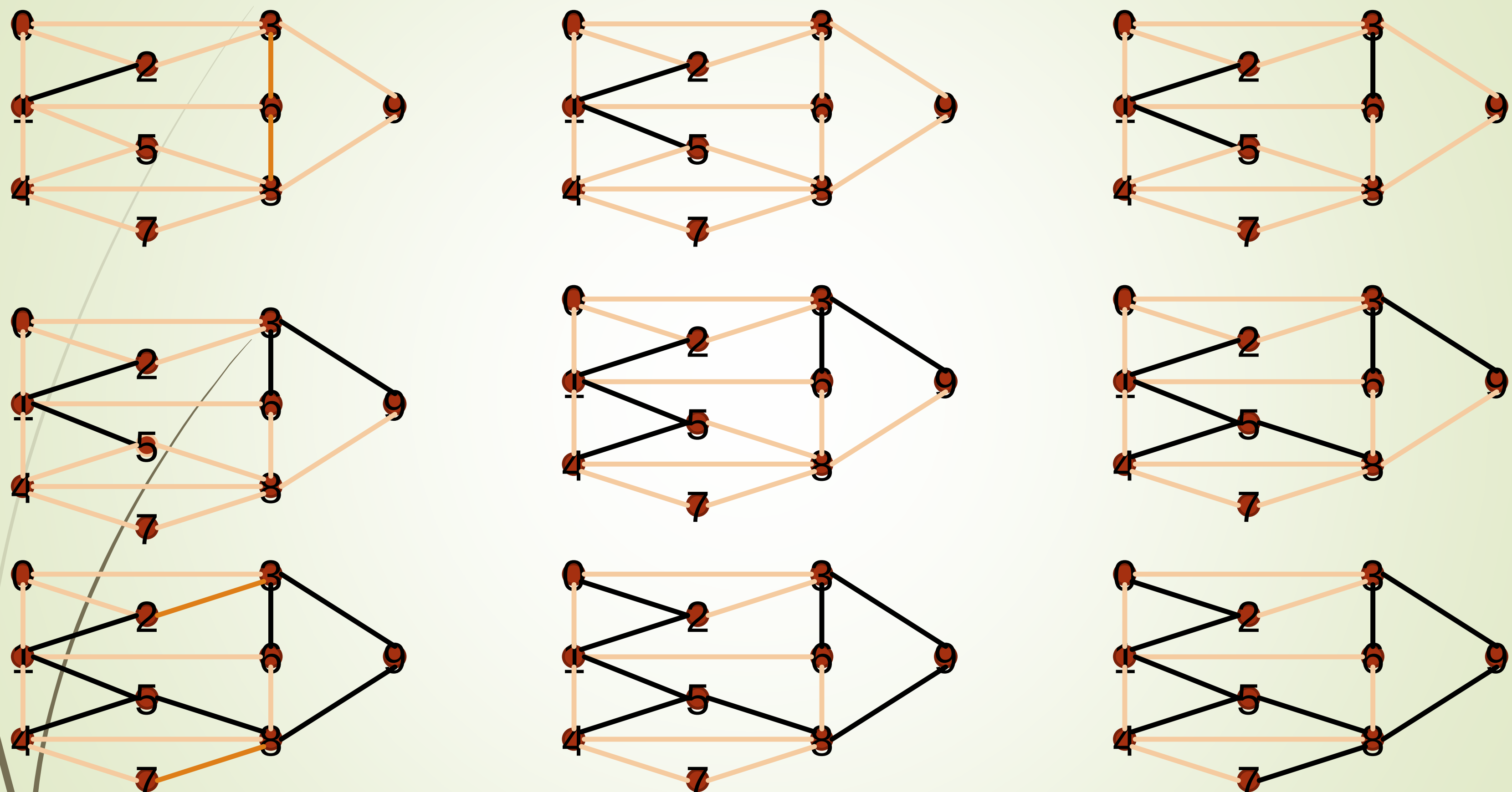
}

ヒープ使用は必須ではないが、ここでは最小重みの弧を探すためにヒープを利用

例1



例1：解の探索の様子



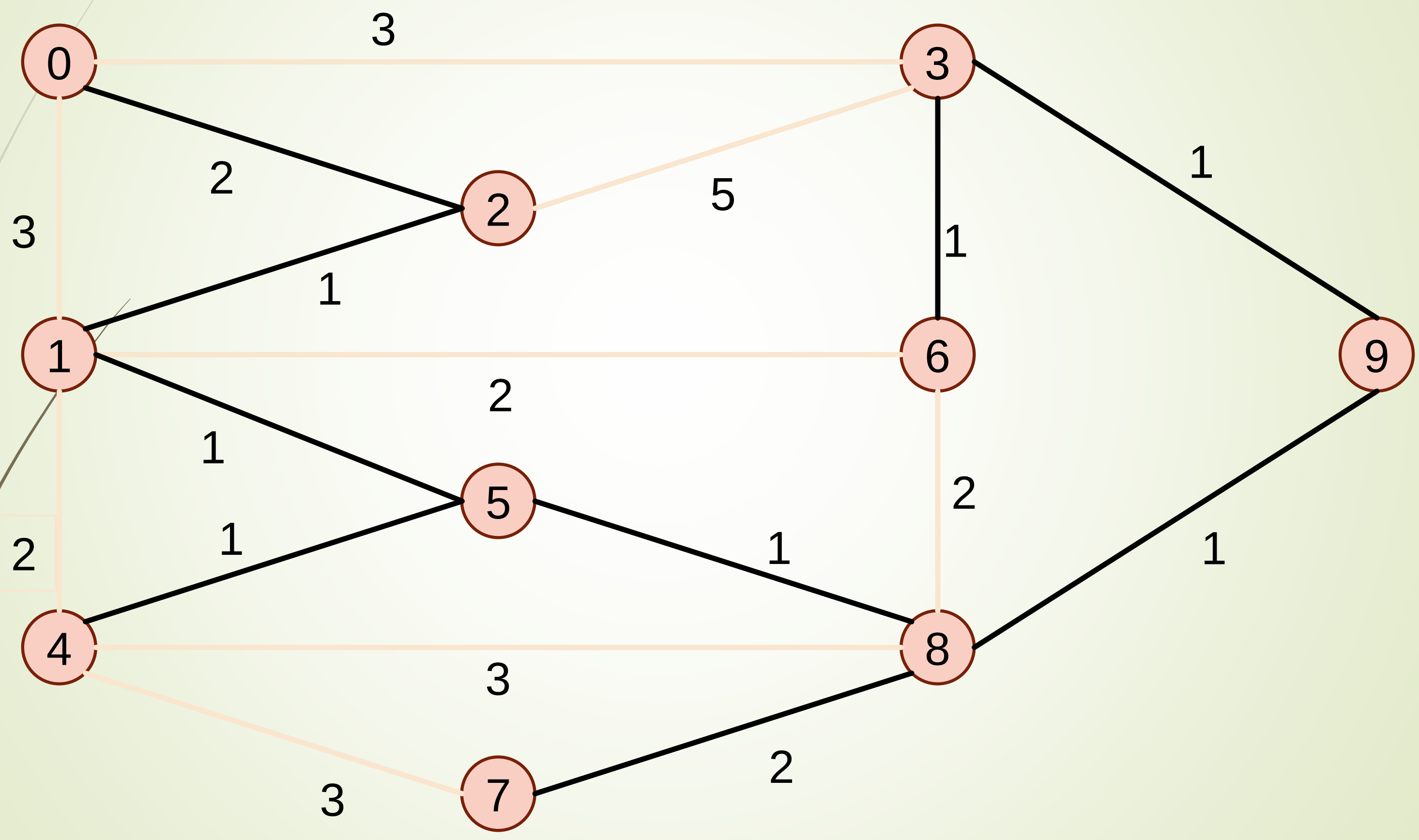
ここまでは、重み1の弧

重み2の弧$e(v_0, v_2)$

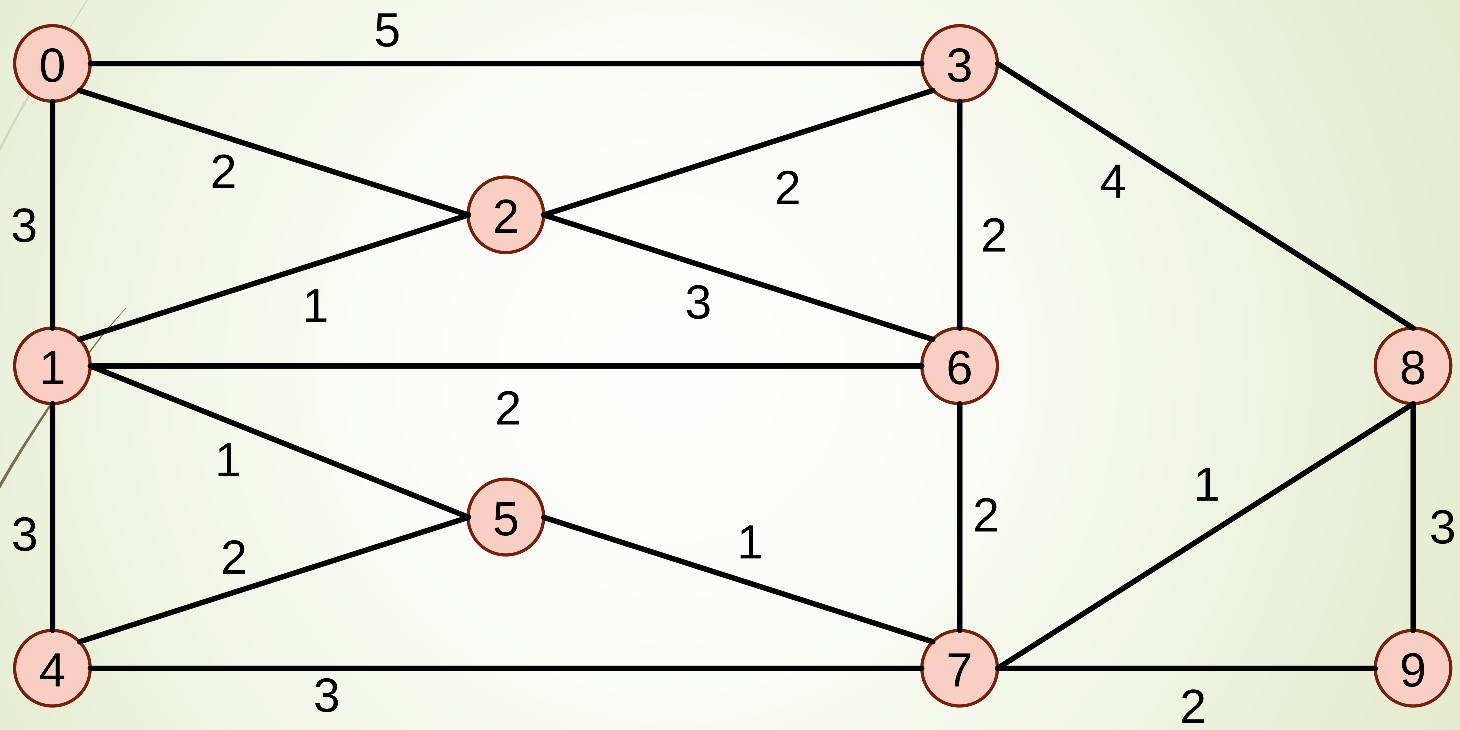
重み2の弧$e(v_7, v_8)$

$e(v_1, v_6)$を選択すると閉路ができる

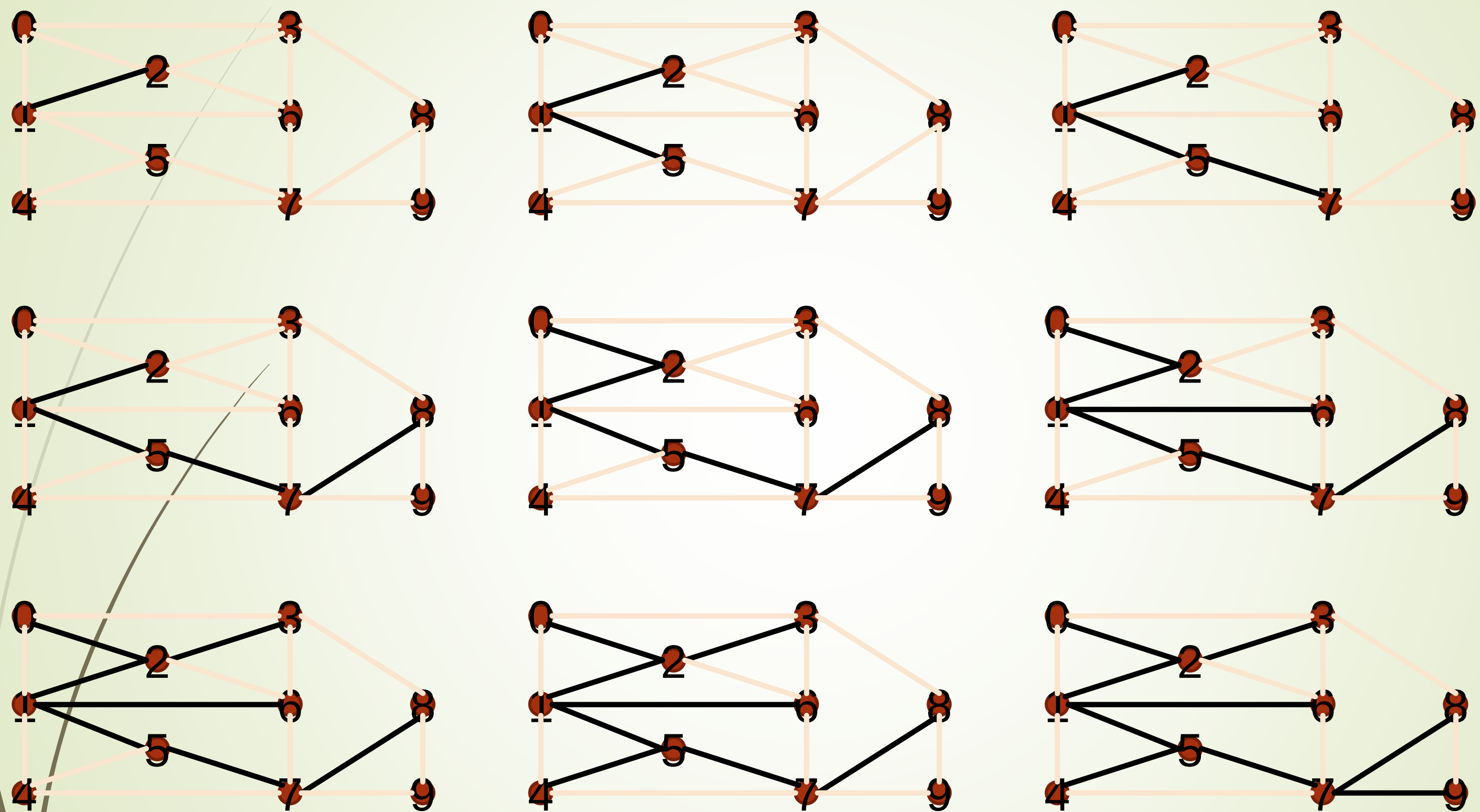
例1：結果



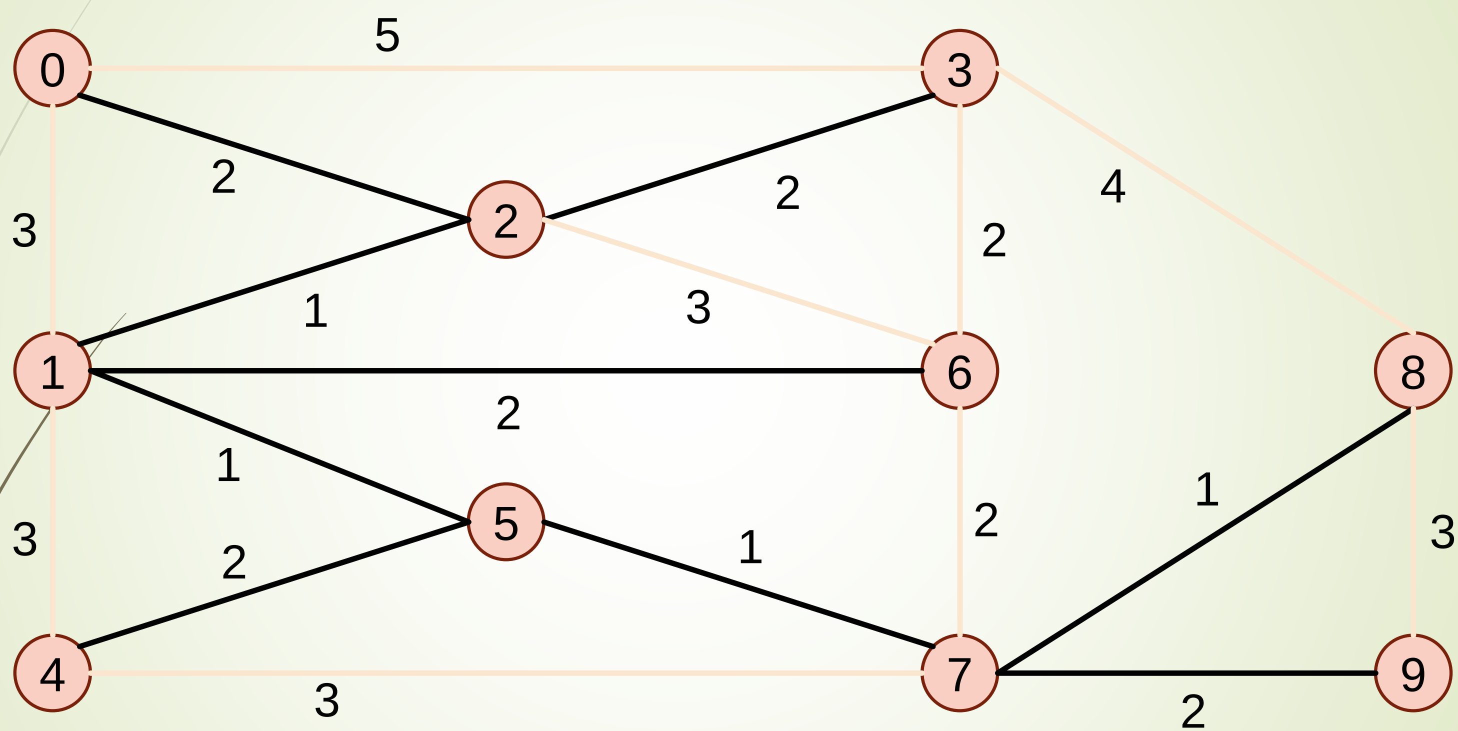
例2



例2：解の探索の様子



例2：結果



貪欲アルゴリズムが正しく動作する理由

- 次の定理を証明すれば良い

  「貪欲アルゴリズム実行中で得られるTは、弧数$|T|$を持ち、サーキットを含まない弧集合のうちで、その重みが最小である。」

  - 要するに、アルゴリズムの各段階で最小の重みのグラフであることを示す。

- 証明では、上記を性質(*)と呼ぶことにする。

数学的帰納法による証明

- $T=\emptyset$の時、自明
- 操作をi回行って、次の弧を選択する直前の弧集合Tが条件(*)を満たしていると仮定する。

- 次に選択された弧をaとする：$a \in A \setminus T$
- $|T|+1$の弧を持ち、サーキットを有さない弧集合のうちで、重みの和が最小のものをSとする。
  - $W(S)=W(T)+w(a)$ならば性質(*)が成り立つ。
  - $W(S)<W(T)+w(a)$は矛盾する（起こりえないことを示す）。

証明：準備

- T は$|T|$本の弧を持つサーキット(閉路)の無い弧集合の内で、重みが最小である。
- 従って、Sから任意の弧bを取り除いた弧集合（$|T|$本の弧）の重みはTの重みより小さいことはない。
  - $\forall b \in S,\ w(S \setminus \{b\}) = w(S) - w(b) \geq w(T)$

証明：準備

- このことから、Sに含まれる任意の弧bとTにこれから追加する弧aの重みの大小関係がわかる。

$$w(S) < w(T) + w(a) \le w(S) - w(b) + w(a)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{w(b) < w(a)}$$

証明：矛盾の導出

- S とT はサーキットを含まず$|S| = |T| + 1$
- ある $a' \in S \setminus T$に対して$T \cup \{a'\}$ はサーキットを含まない。
  - a'はSの弧であることから、$w(a') < w(a)$。なぜなら、Tは(*)を満たすから
  - これより$w(T \cup \{a'\}) = w(T) + w(a') < w(T) + w(a)$
  - これはa の選び方に反する。

証明：矛盾の導出

- よって矛盾する。
  - つまり、そのようなSは存在せず、手続きに従って構成した$T \cup \{a\}$は、最小木である。

補足と注意

- $T \cup \{a'\}$がサーキットを含まない $a' \in S \setminus T$が必ずあること。
  - SがTに含まれない頂点を含む場合には自明
  - Tが木であれば、SはTに含まれない頂点を含む
  - SとTが同じ頂点を結ぶ場合には、Tは部分木の集合であり、SはTの非連結要素を結ぶ弧を有する

補足と注意

- ある弧を選択した際に、それが閉路を作らないことの確認が必要
  - 加えようとして弧aの両端の頂点(v, w)
  - T 内にvからwへの道があるかを調べる
  - 深さ優先、幅優先の探索アルゴリズムが必要

最大補木を求める方法

- 最小木を求めるために、重み最大の補木$A \setminus T$を求める

```
T ← A
H//弧のヒープ。ただし、最大要素が先頭
while ( Tは Gの極大木ではない ) {
    a = H.poll//ヒープ内の最大要素
    if ( T \ {a}は Gの極大木を含む ) {
        T ← T \ {a}
    }
}
```

中間テスト(2019/6/6)解答例

- http://aoba.cc.saga-u.ac.jp/lecture/GraphsAndCombinatorics/pdf/Examination/2019-midterm.pdf