



最小木問題：その2

Minimum Tree Problem

2019年度

担当：只木進一（理工学部）

Kruskal法の問題点

- ➡ ある弧を選択した際に、それが閉路を作らないことの確認が必要
 - ➡ 加えようとして弧 a の両端の頂点 (v, w)
 - ➡ T 内に v から w への道があるかを調べる
- ➡ 閉路の有無の確認
 - ➡ 深さ優先、幅優先の探索アルゴリズム
 - ➡ 連結した頂点グループの管理

Jarník-Prim法

- ➡ 始点から開始して、連結した頂点の数を増やす
- ➡ 構成途中でも木になっている
- ➡ 構成途中の木から、未連結の頂点への弧のうちの重み最小の弧を選んで、枝を伸ばす

Jarník-Primアルゴリズム

任意の頂点 $v \in V$ を選び、 $U = \{v\}$ 、 $T = \emptyset$ とする

while ($U \neq V$) {

U と $V \setminus U$ を結ぶ弧のうち、最小の重みのものを a とする

a の $V \setminus U$ 側の端点を w とする

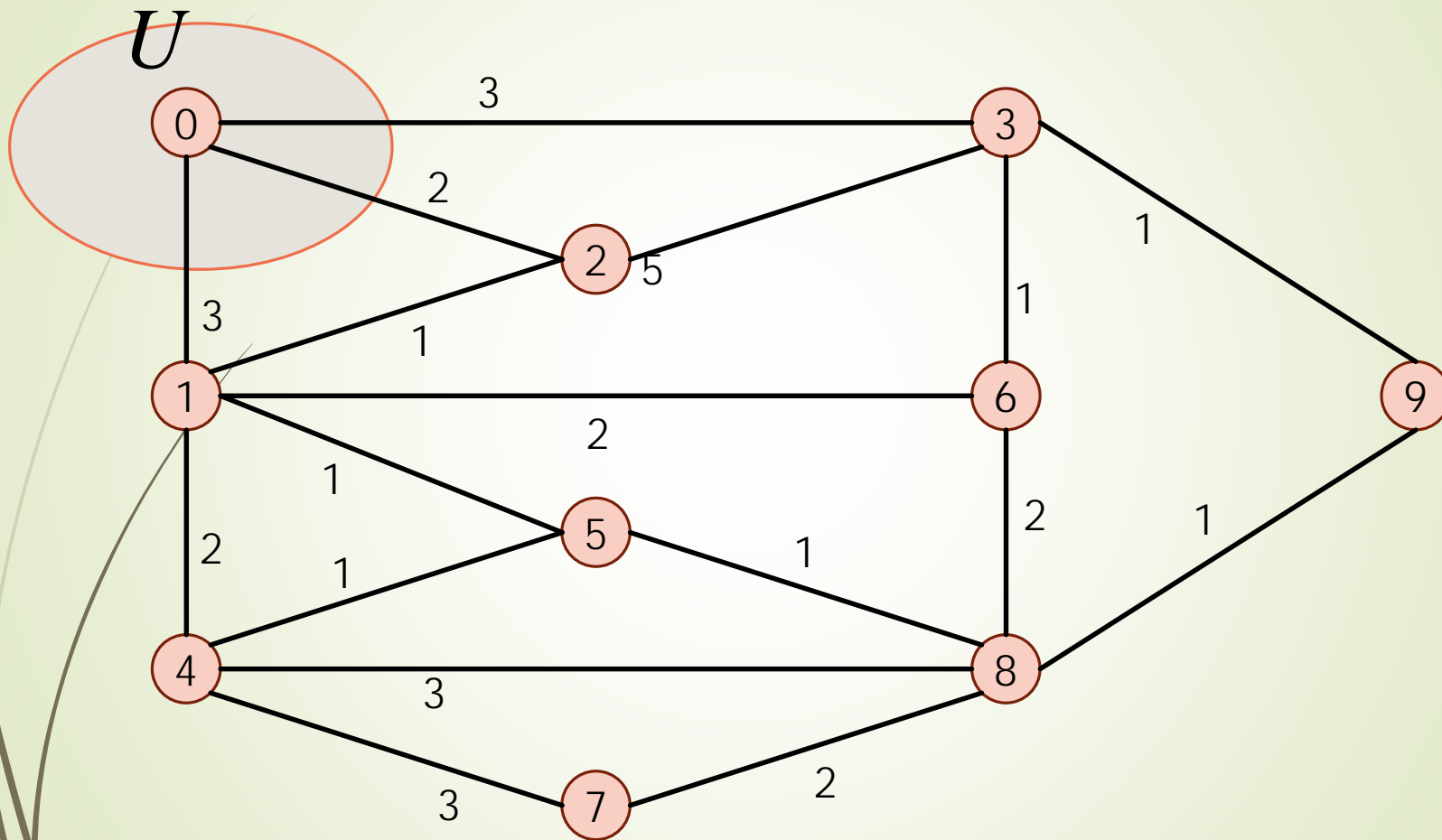
$U \leftarrow U \cup \{w\}$

$T \leftarrow T \cup \{a\}$

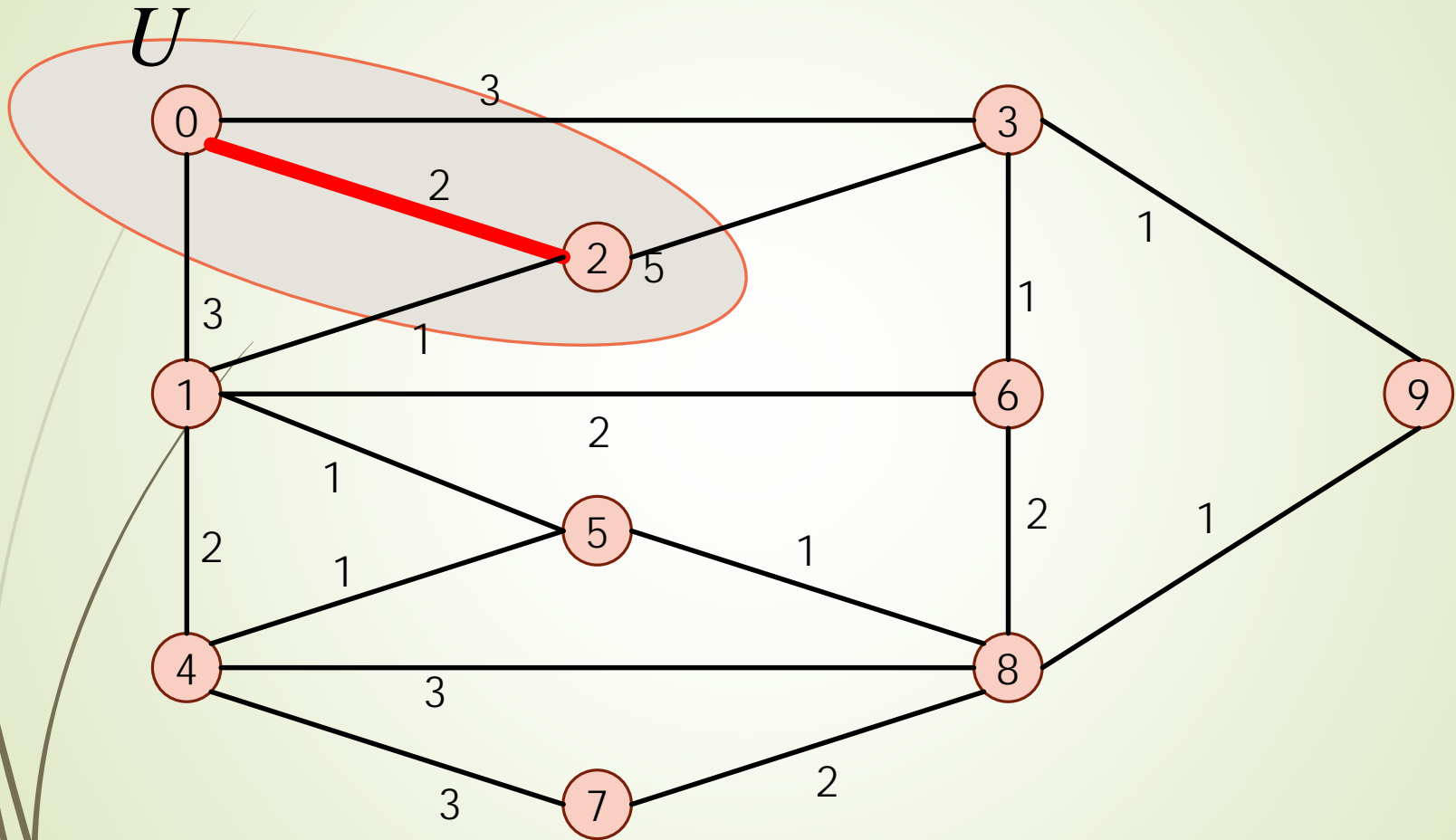
}

U は、 T を構成する頂点

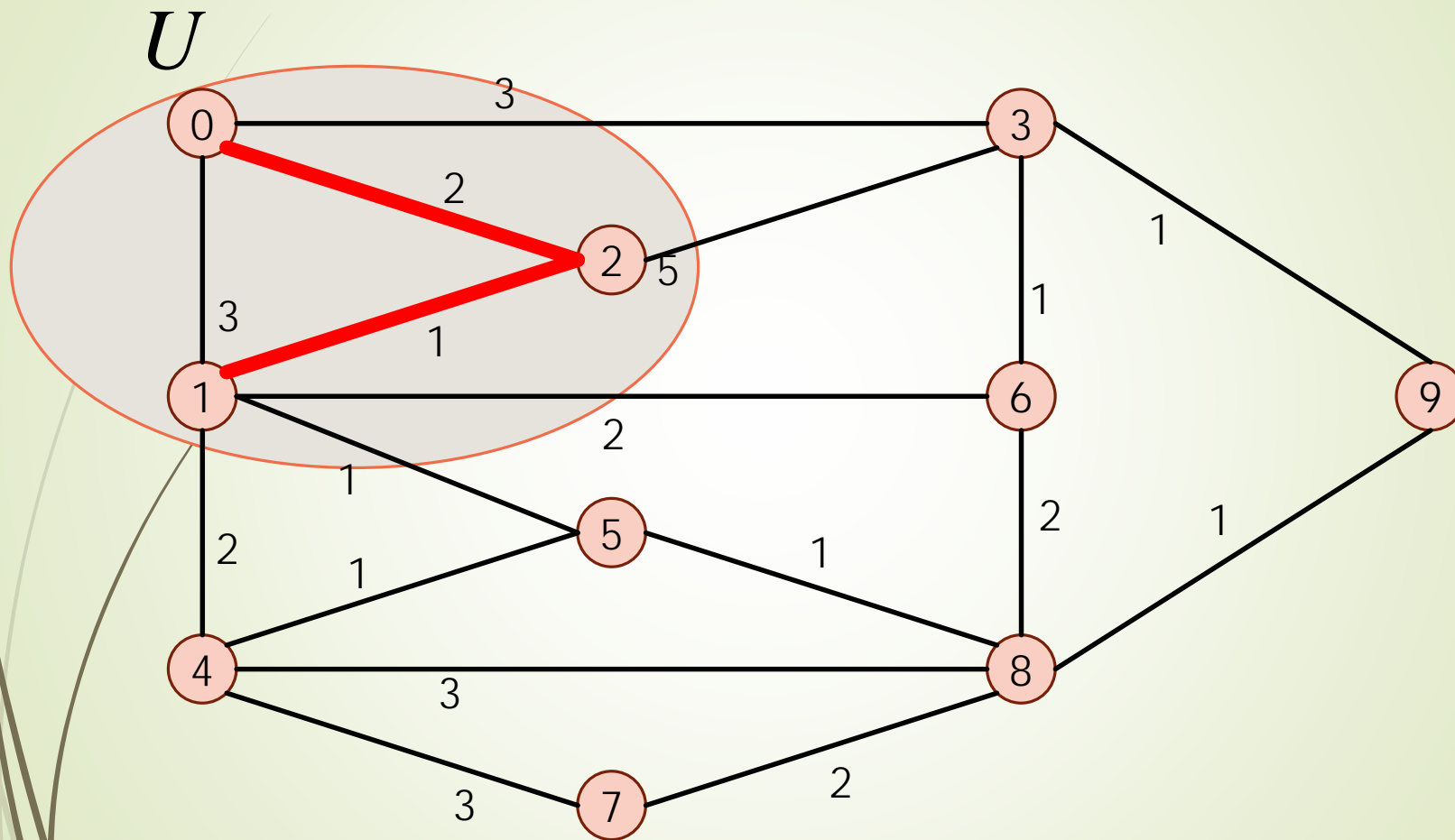
例1



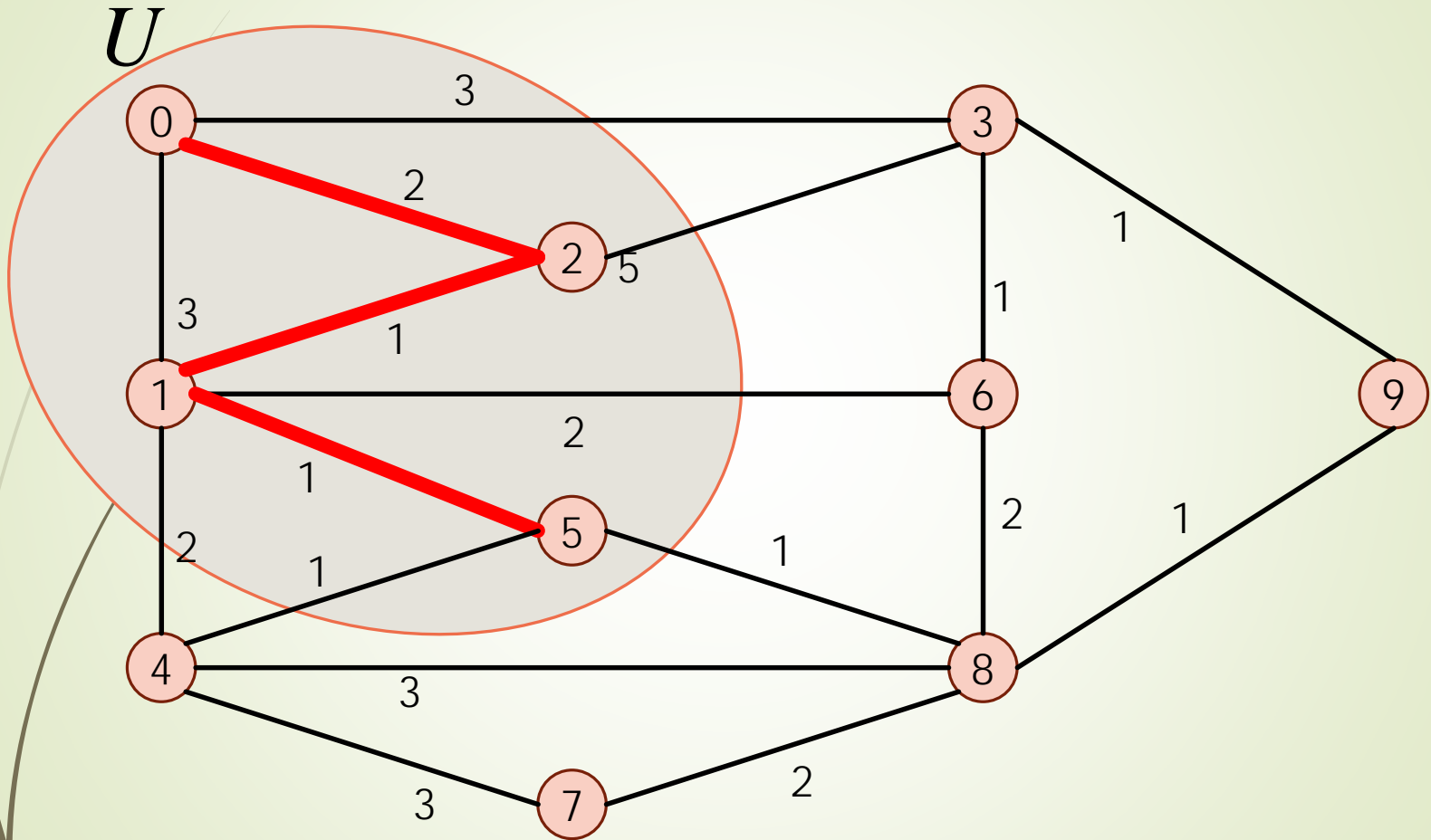
例1：途中プロセス



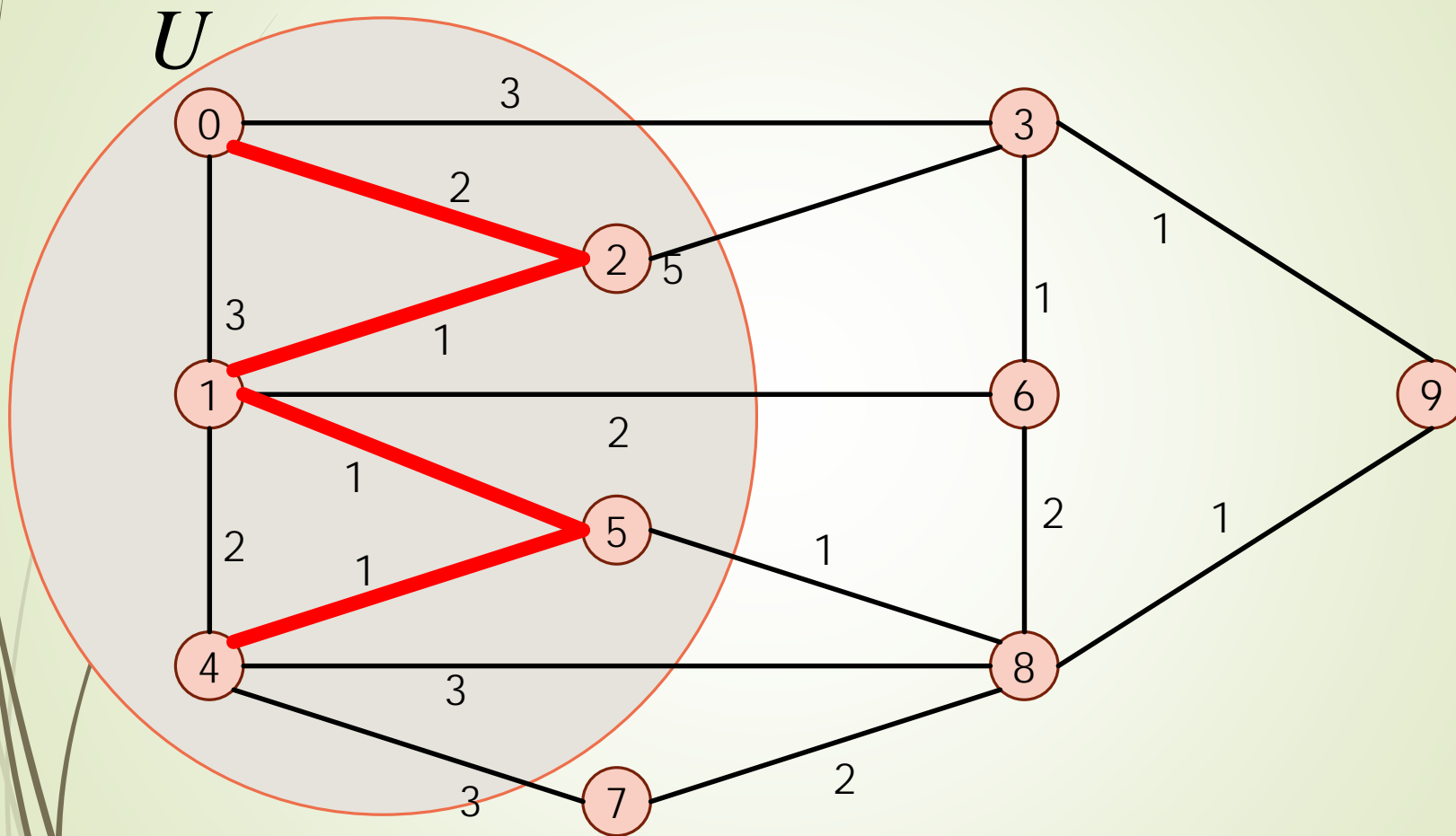
例1：途中プロセス



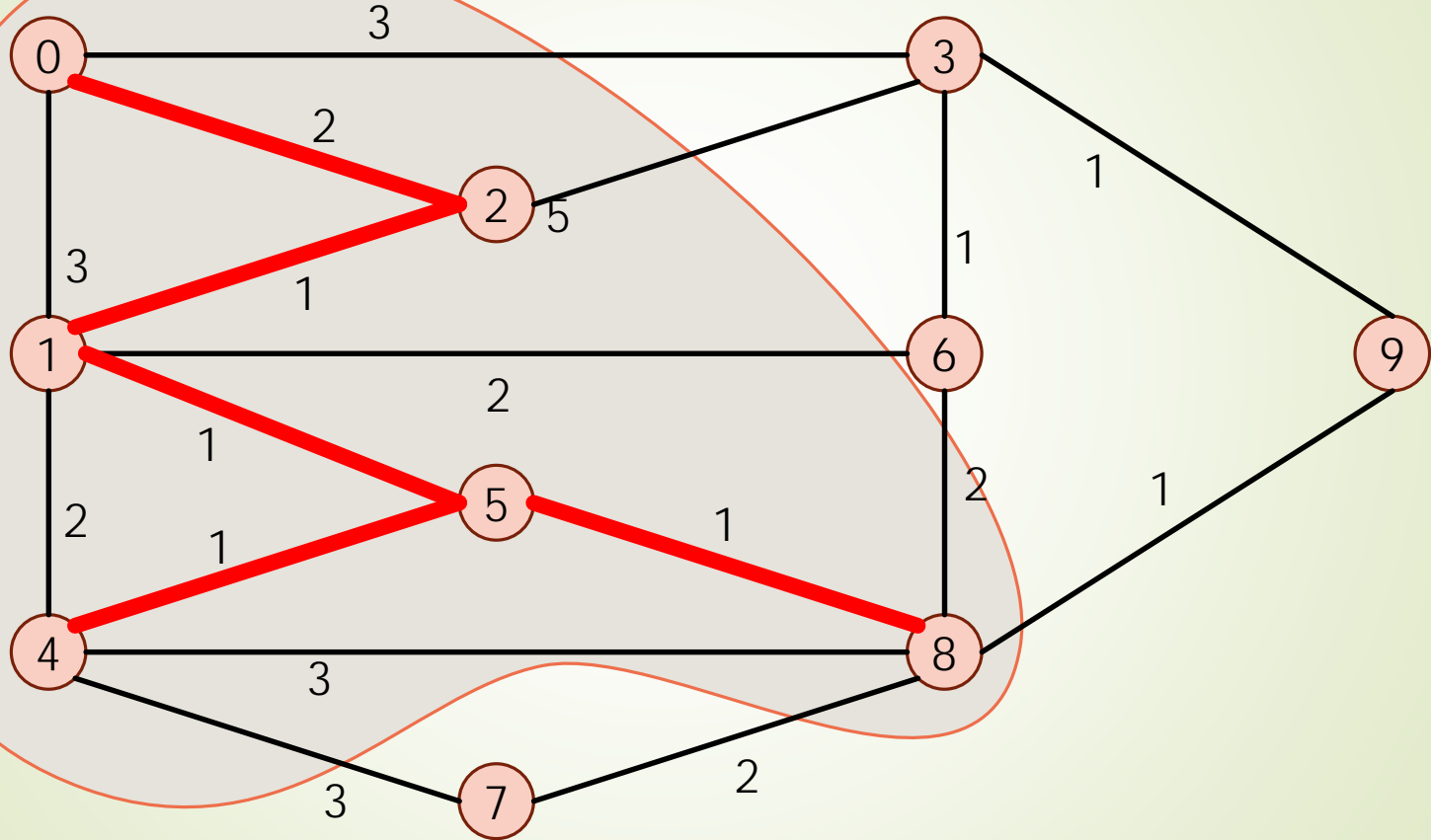
例1：途中プロセス



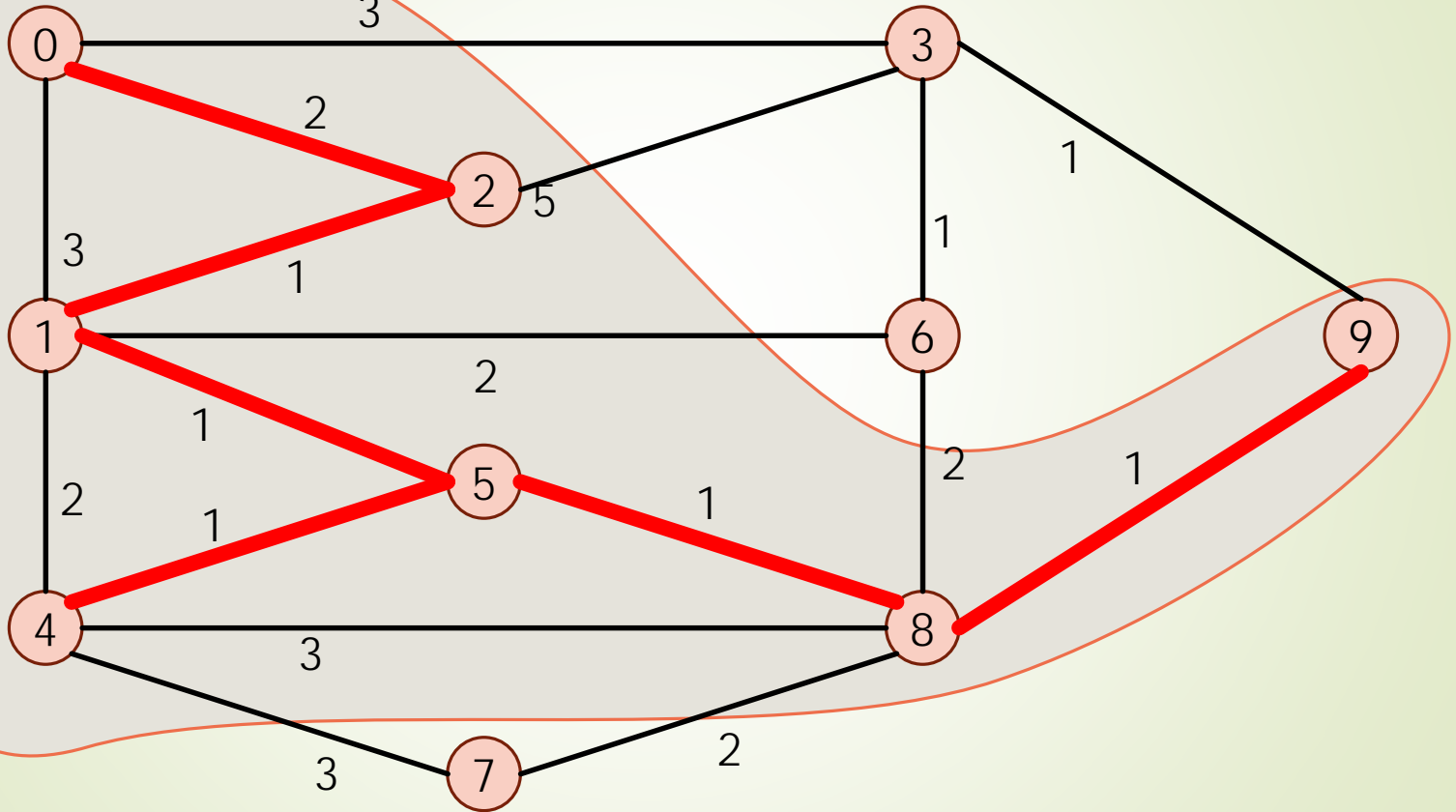
例1：途中プロセス



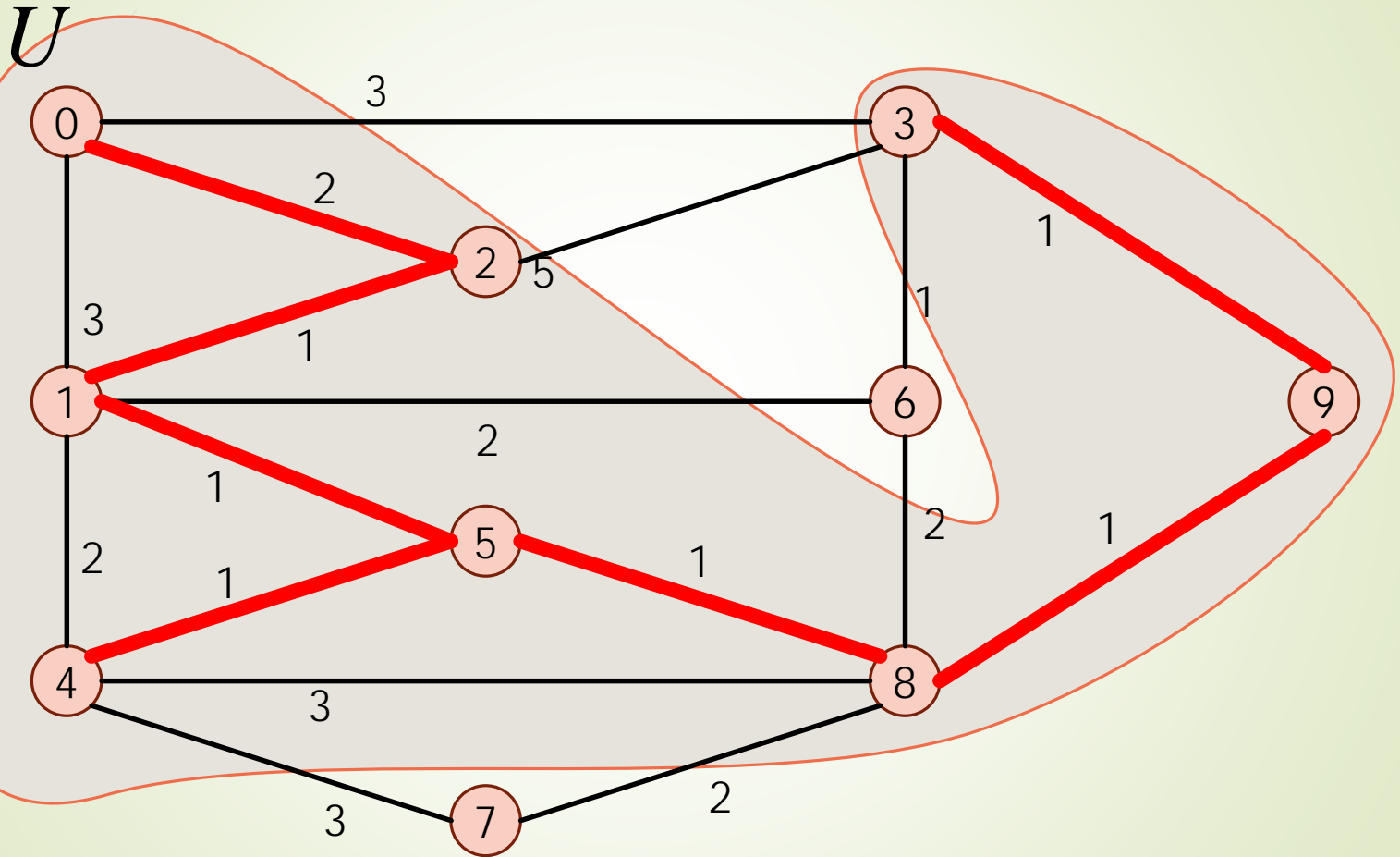
例1：途中プロセス

 U 

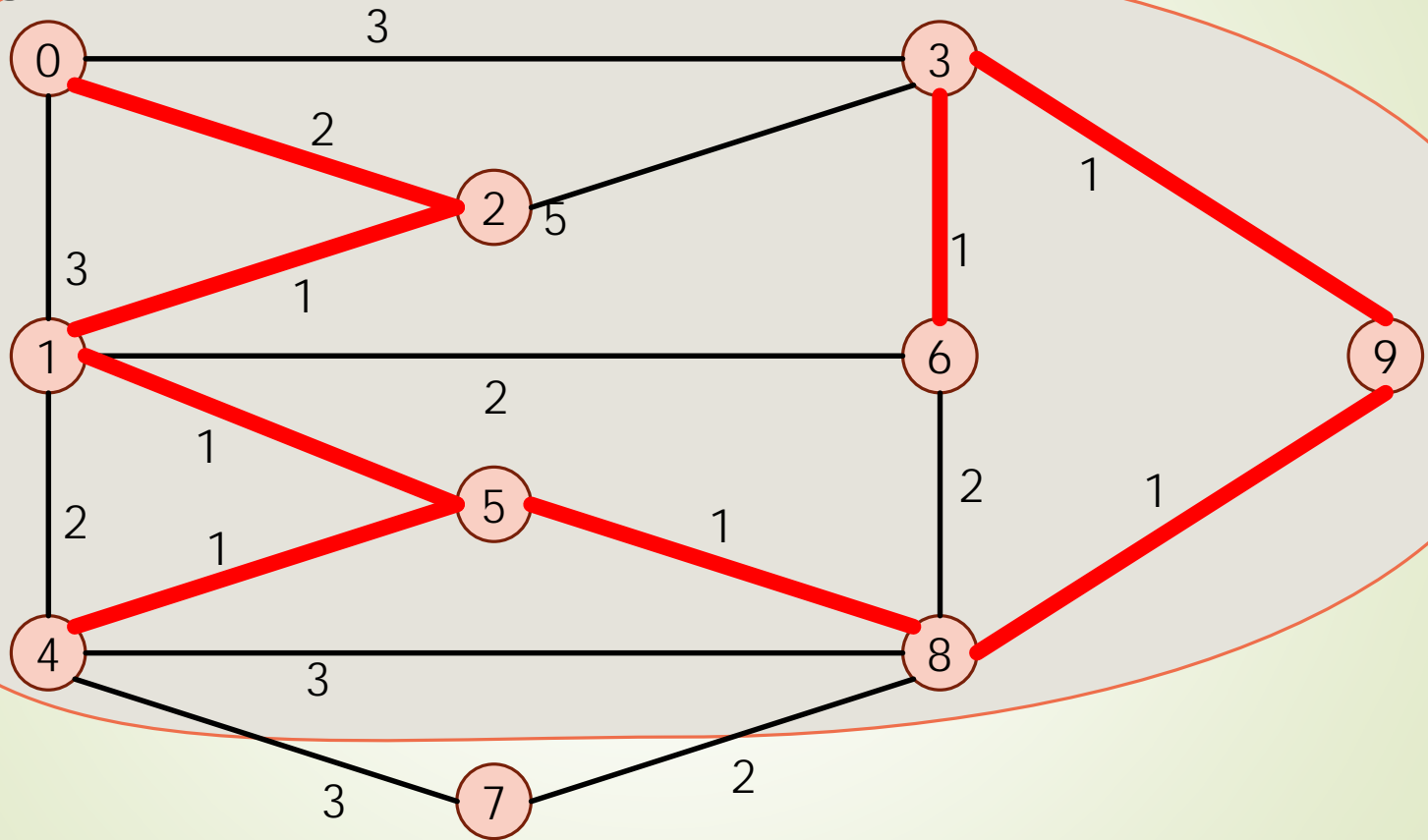
例1：途中プロセス

 U 

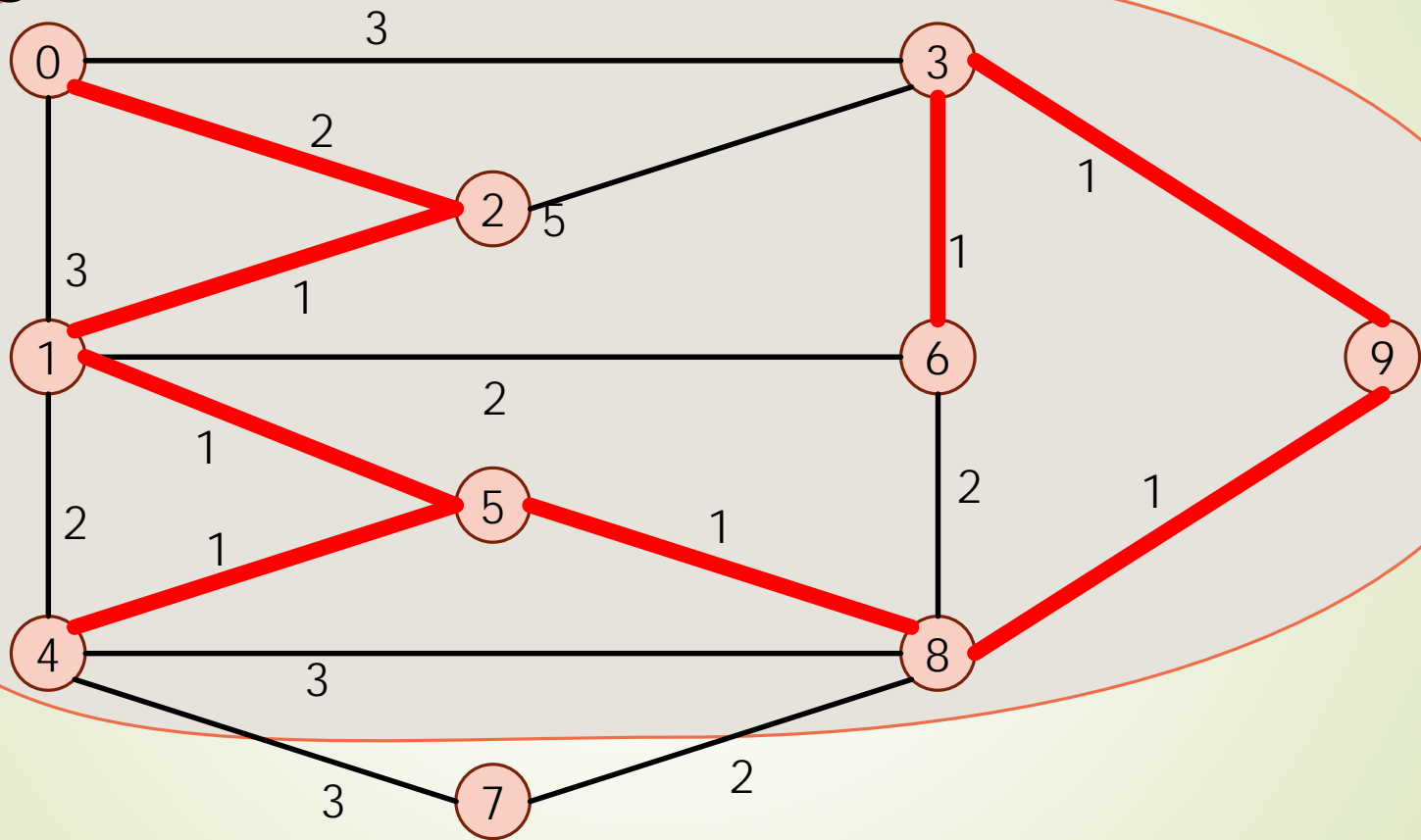
例1：途中プロセス



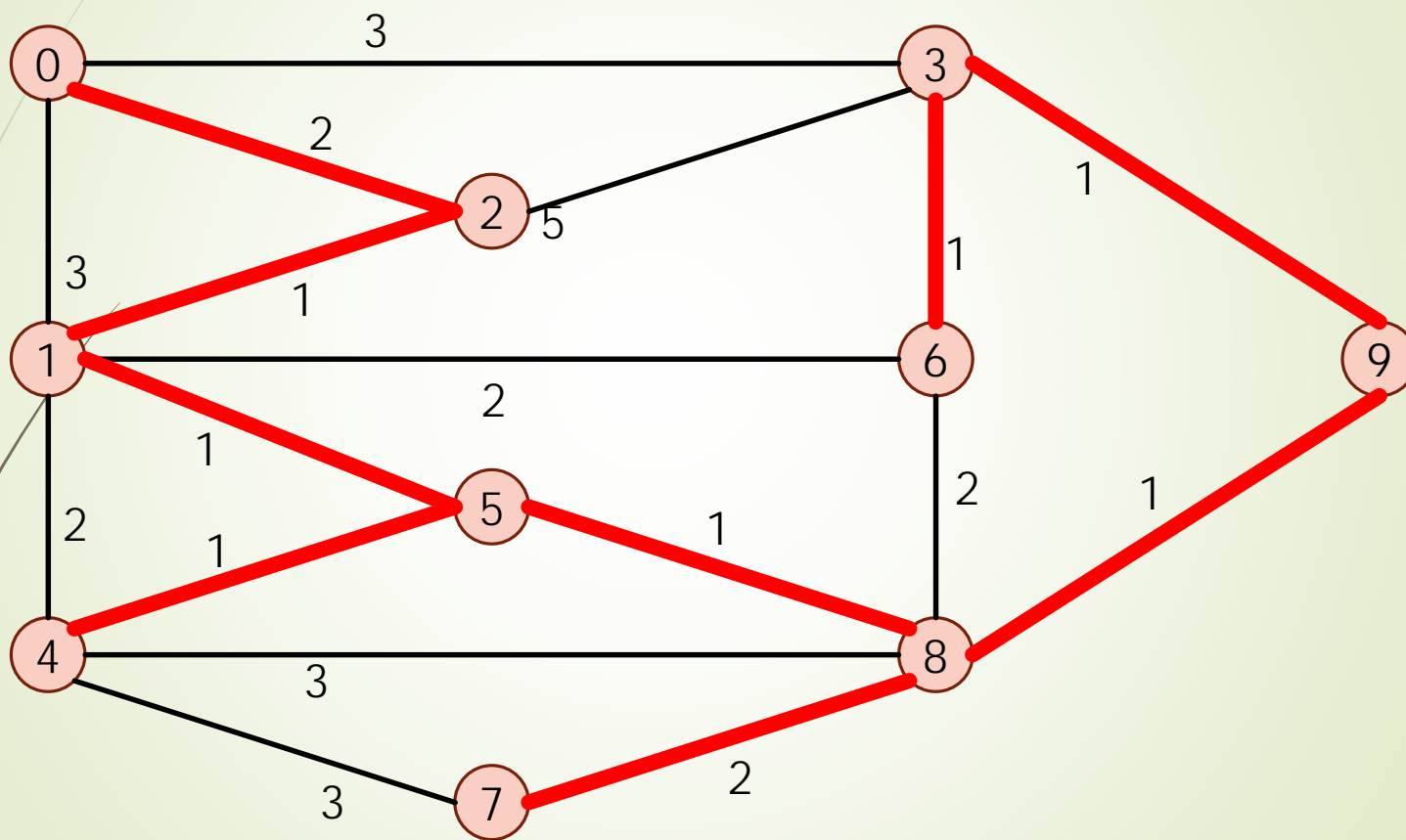
例1：途中プロセス

 U 

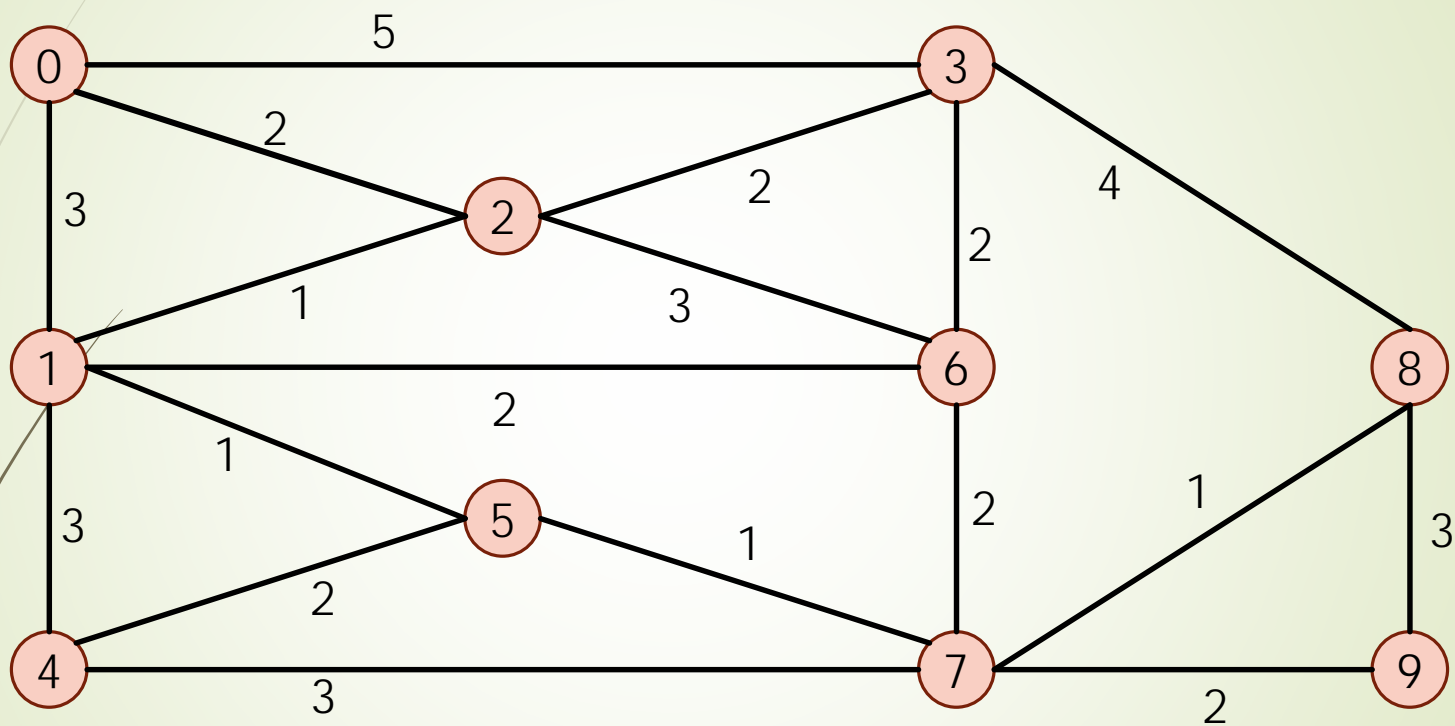
例1：途中プロセス

 U 

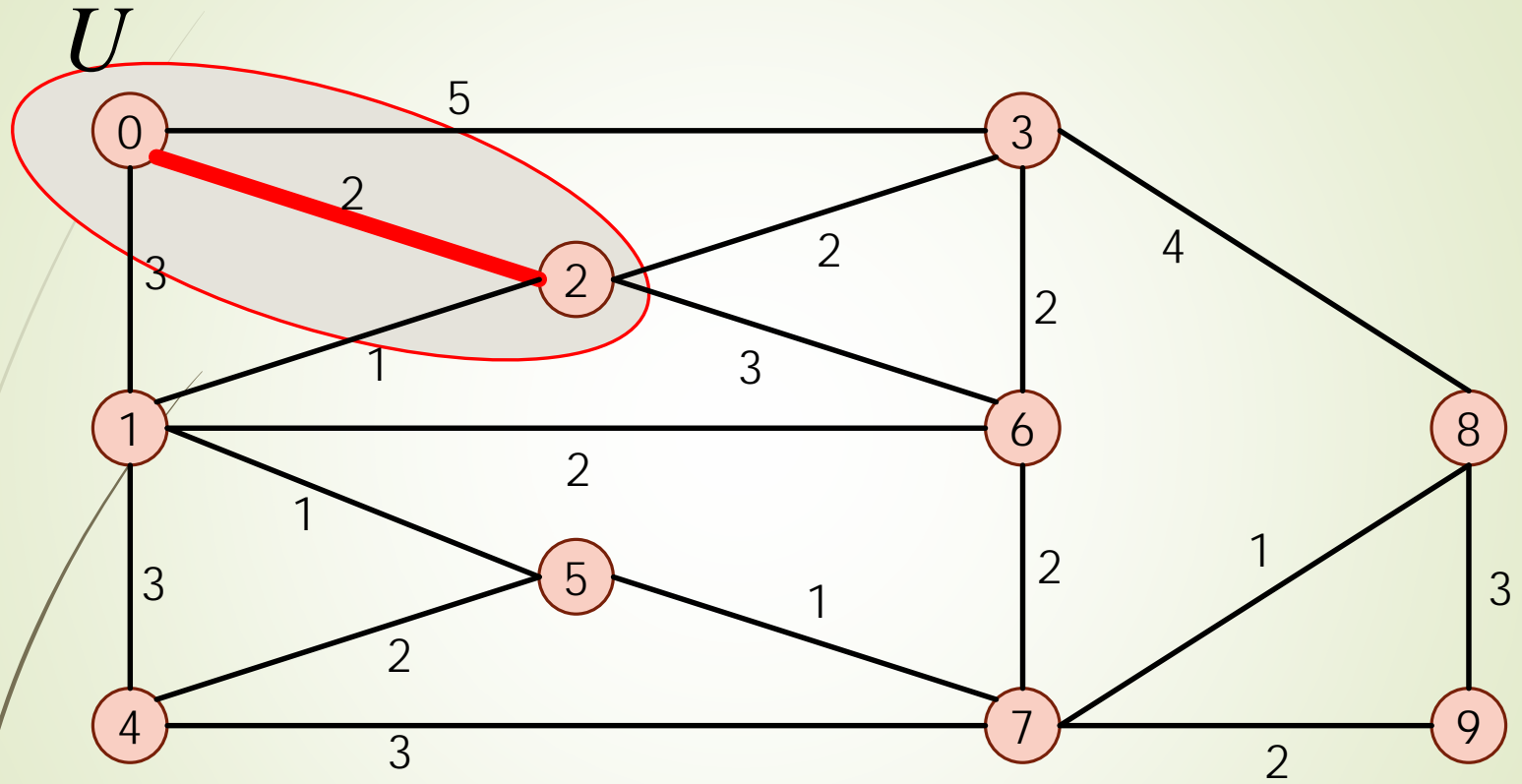
例1：解



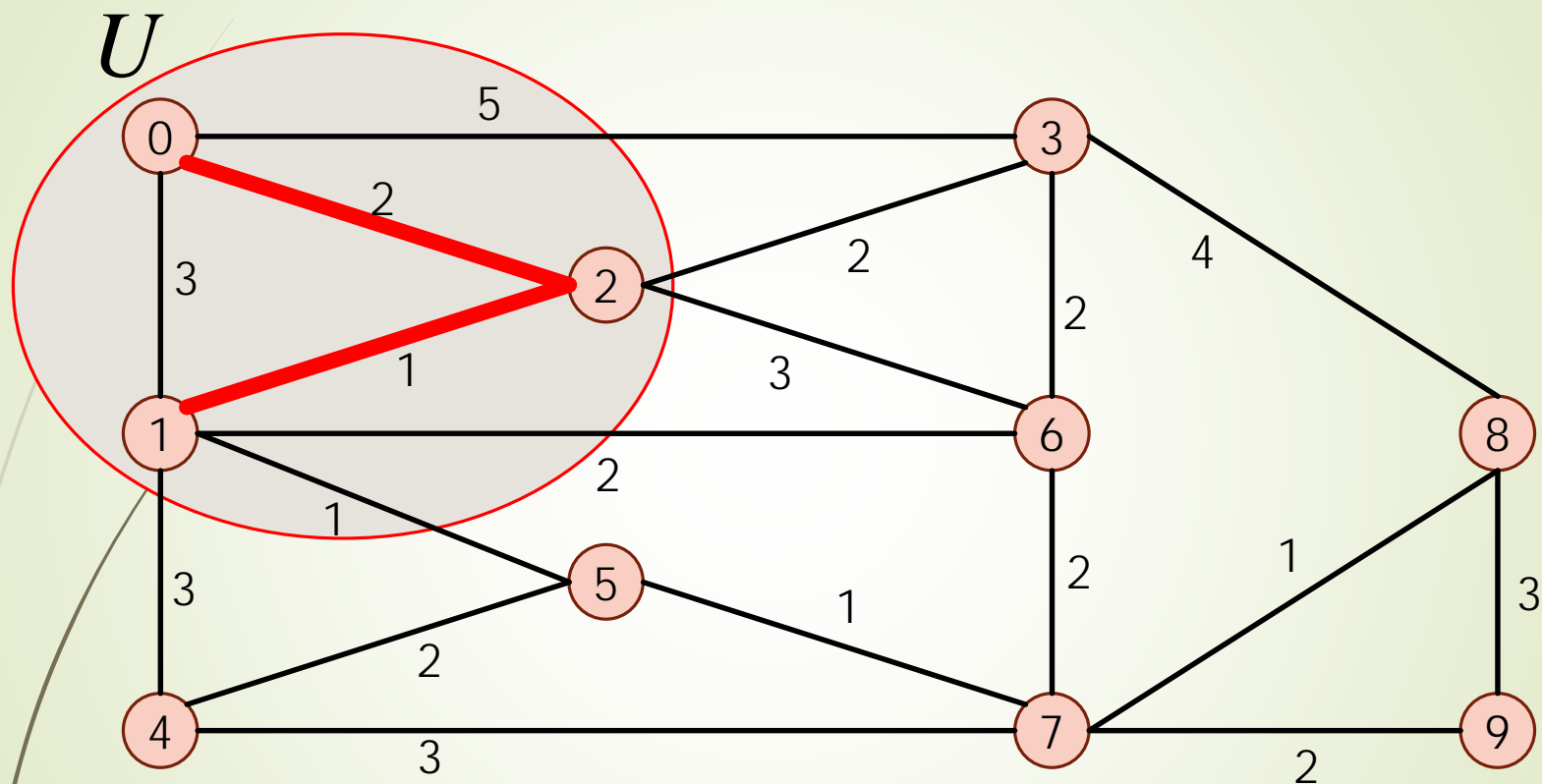
例2



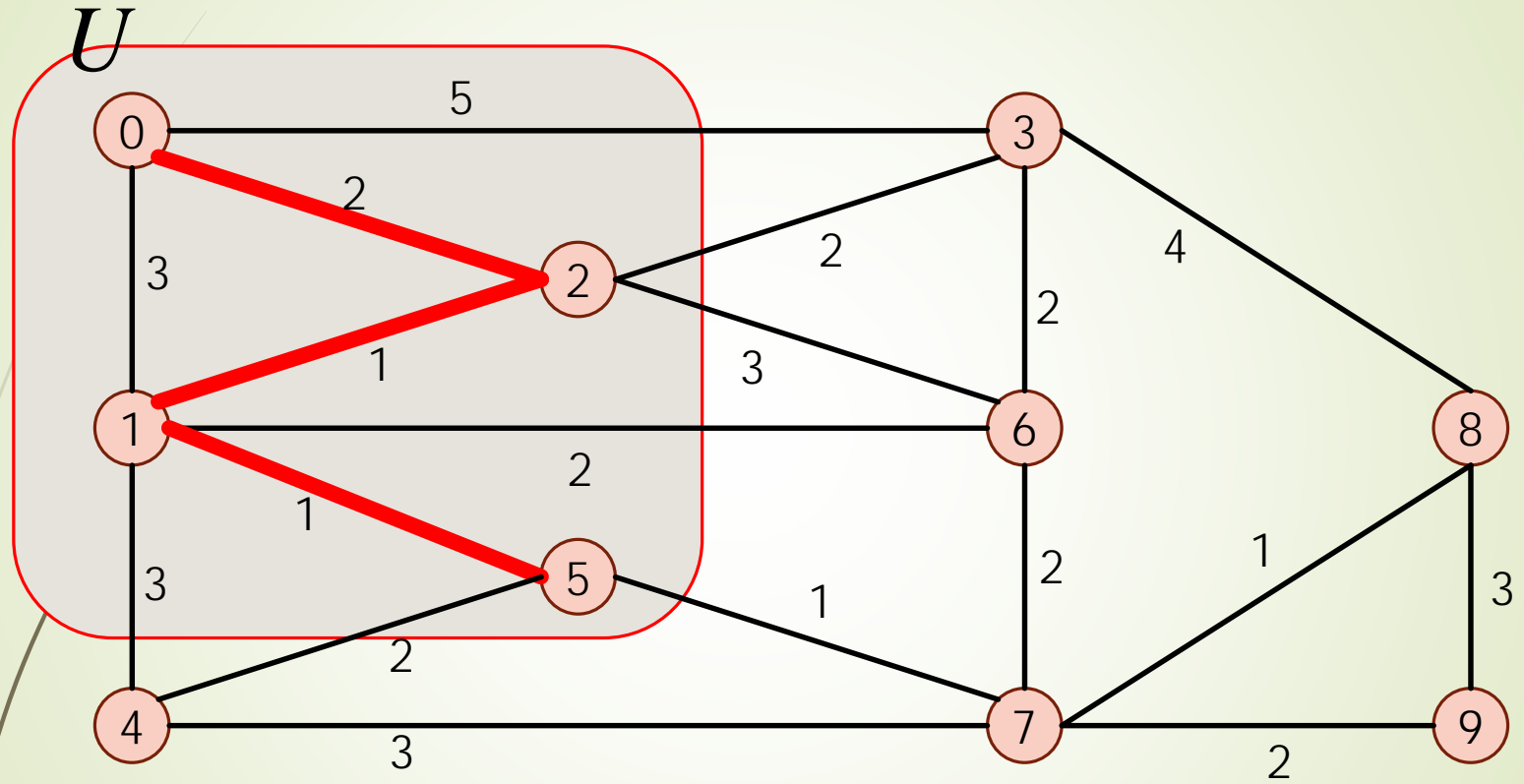
例2：途中プロセス



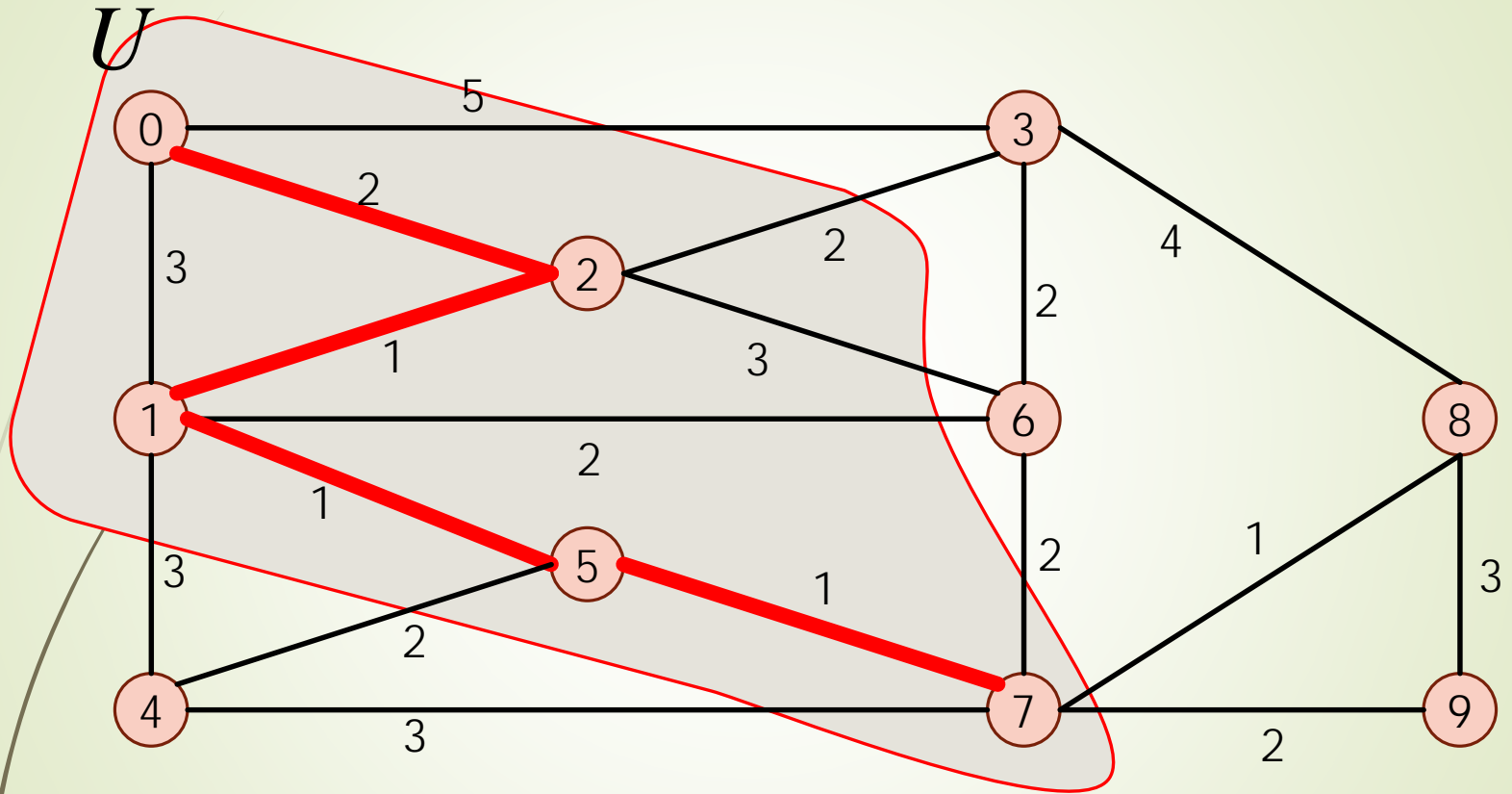
例2：途中プロセス



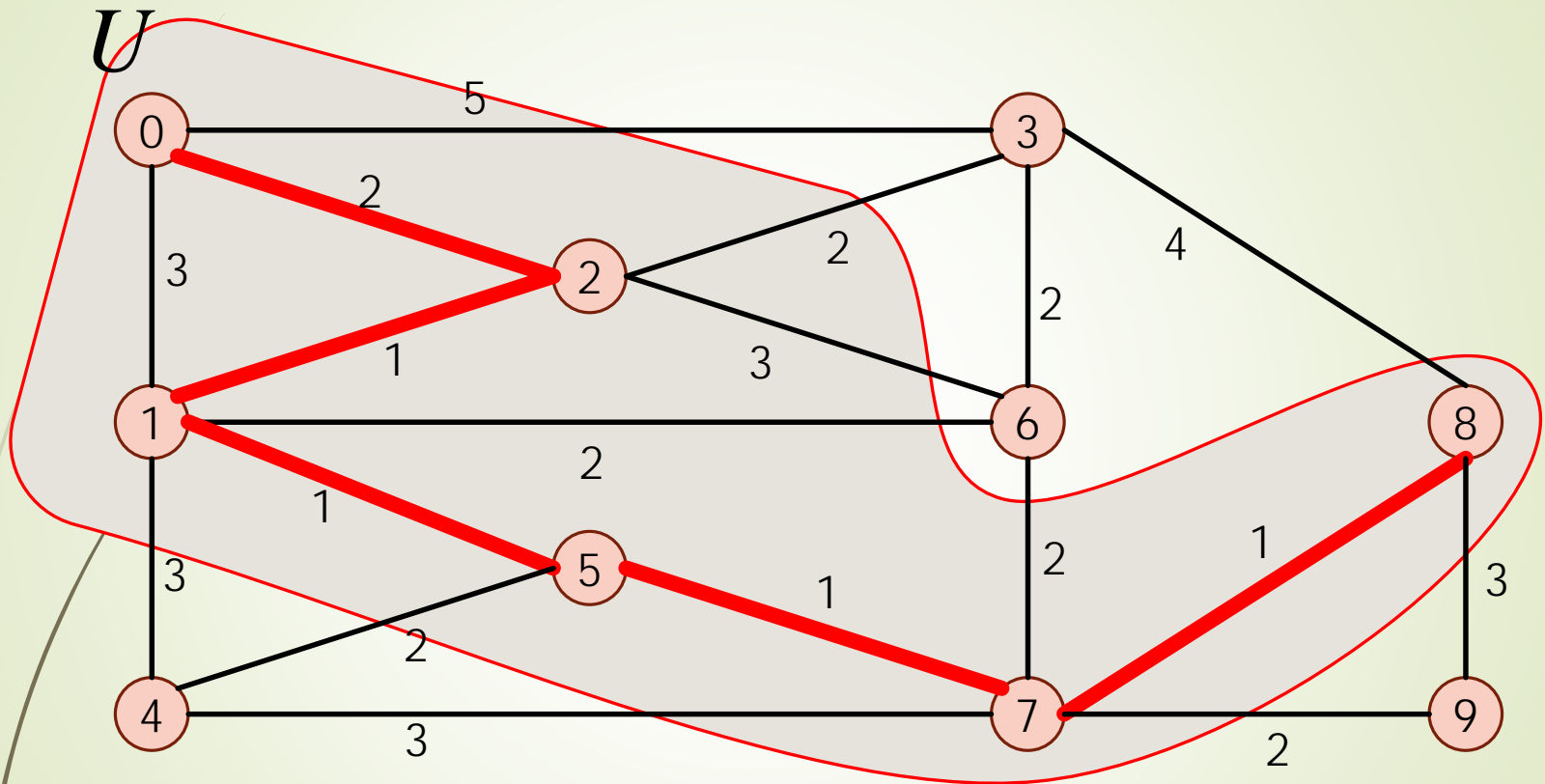
例2：途中プロセス



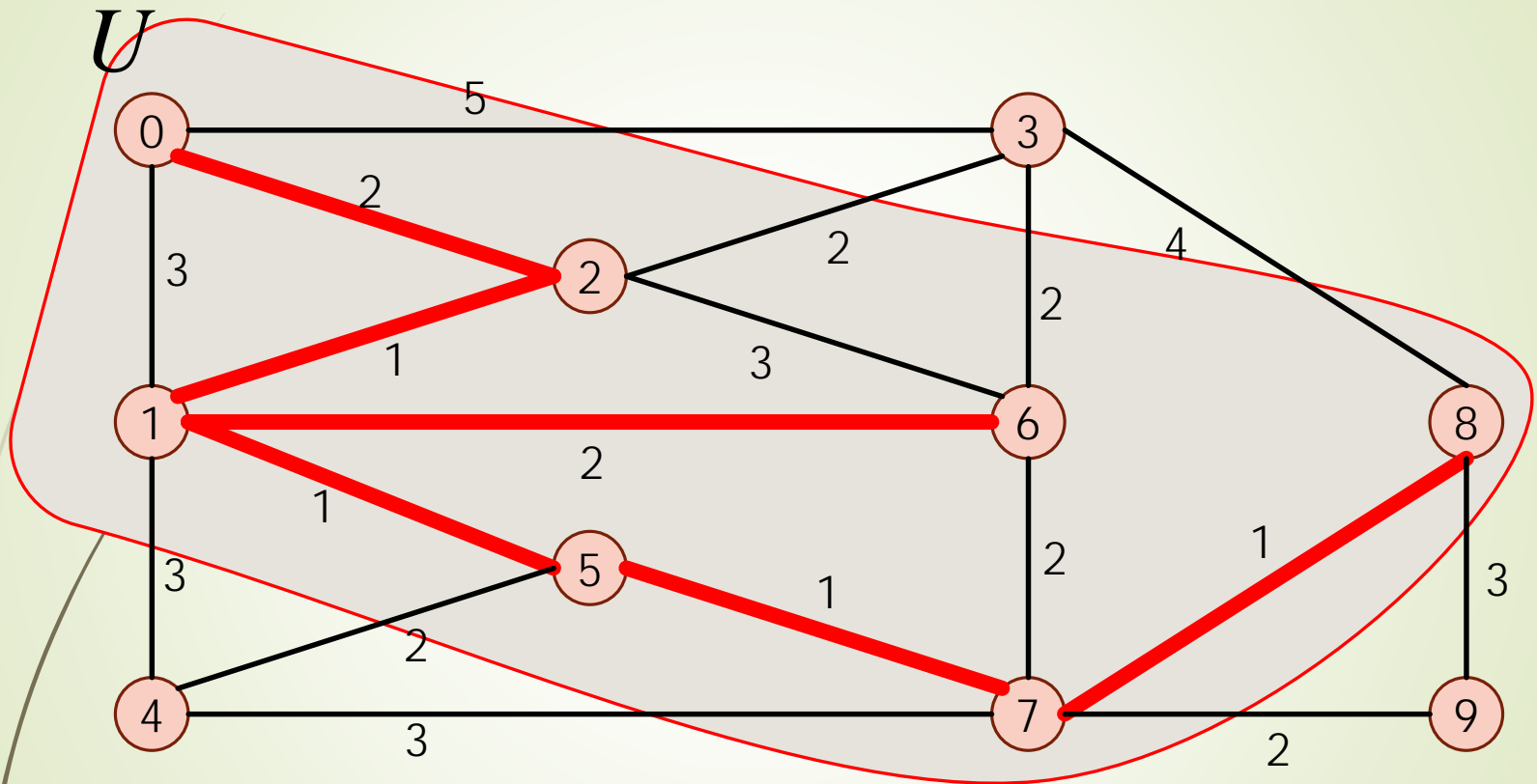
例2：途中プロセス



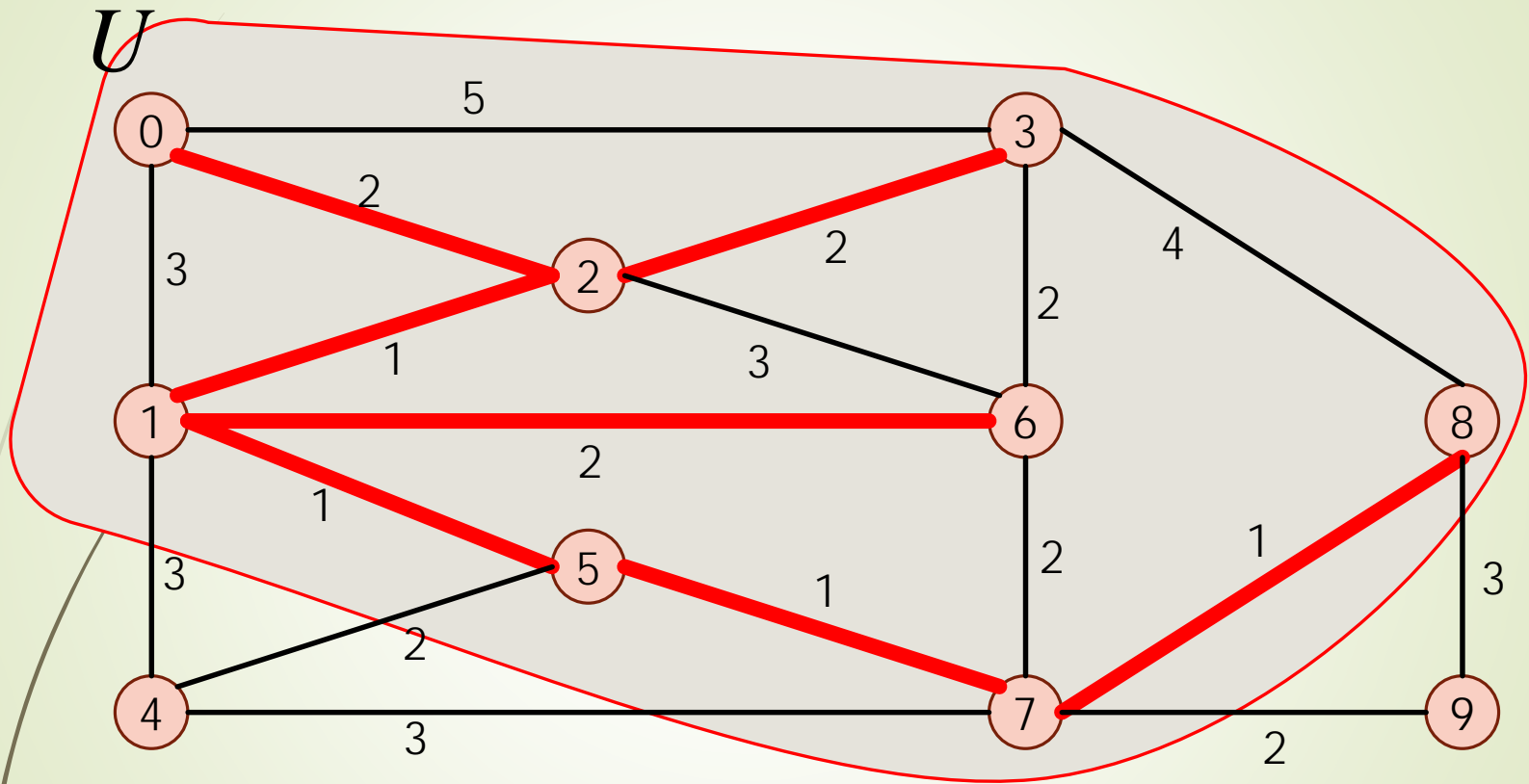
例2：途中プロセス



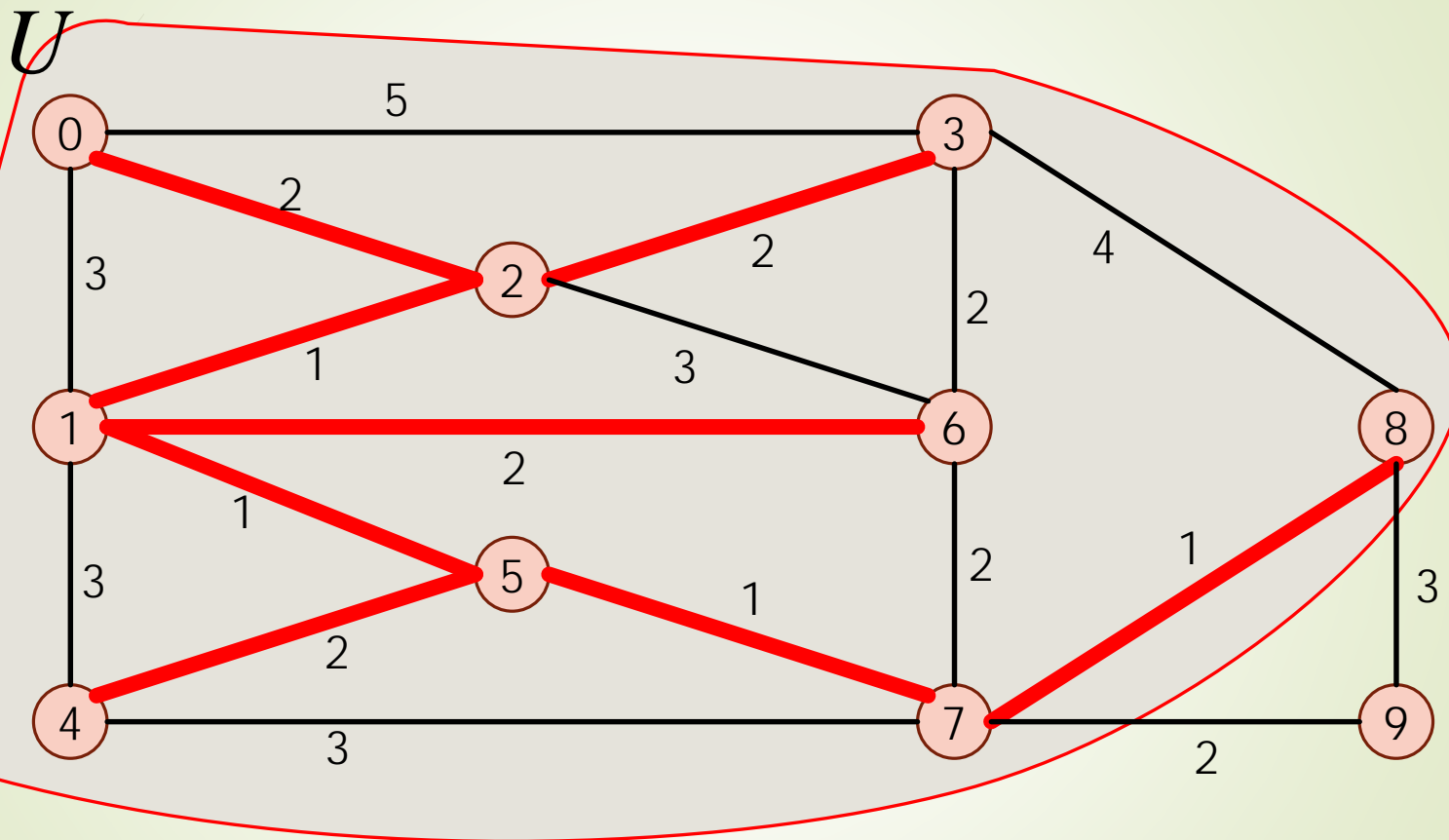
例2：途中プロセス



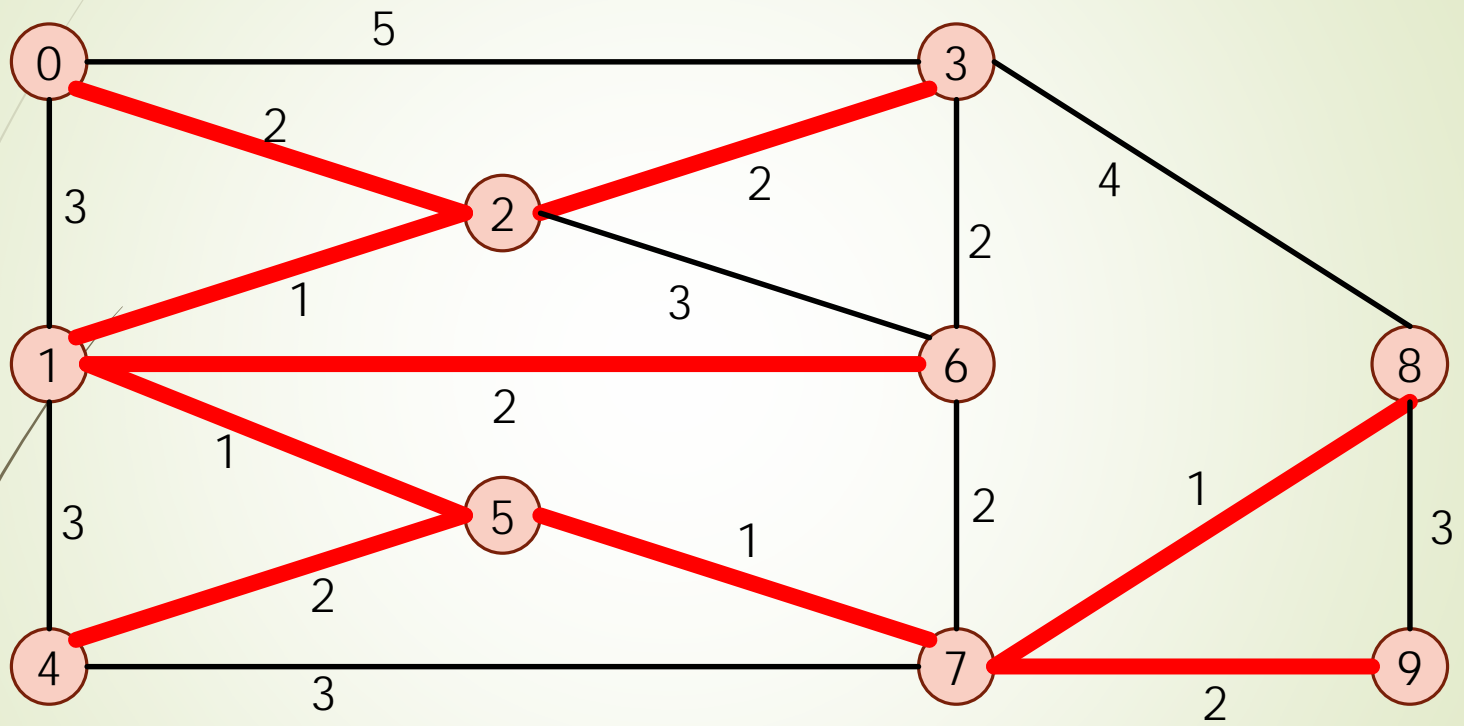
例2：途中プロセス



例2：途中プロセス

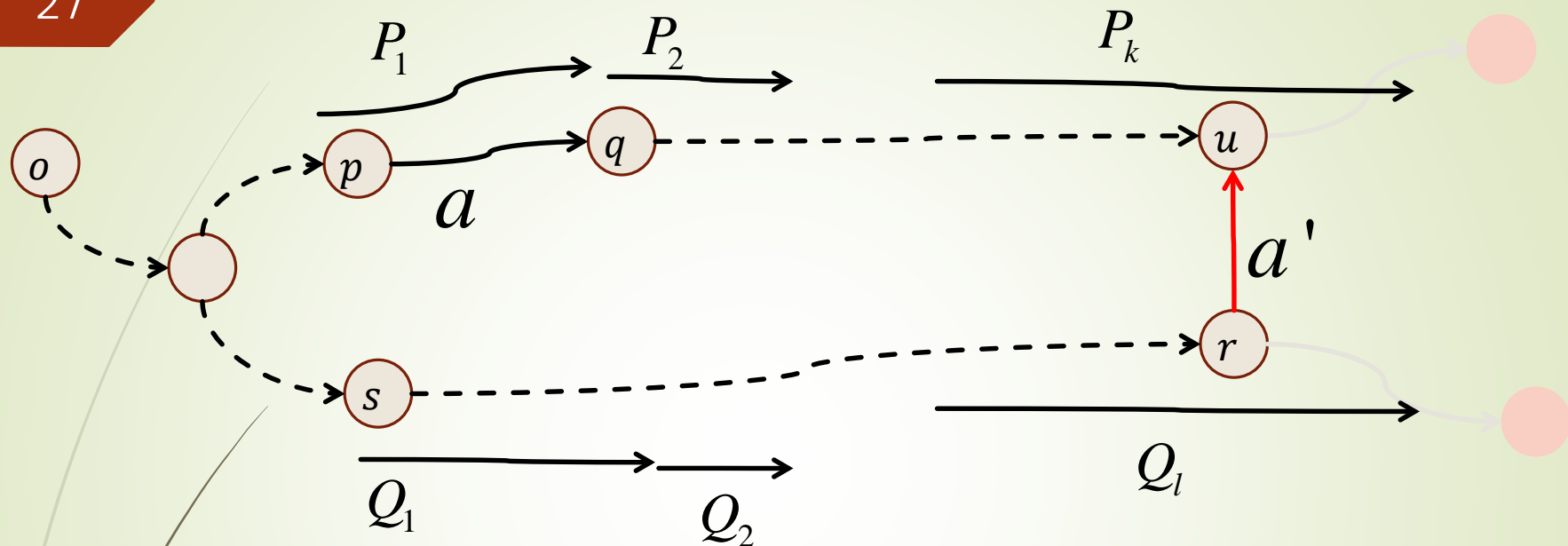


例2：解



Jarník-Primアルゴリズムが正しいこと

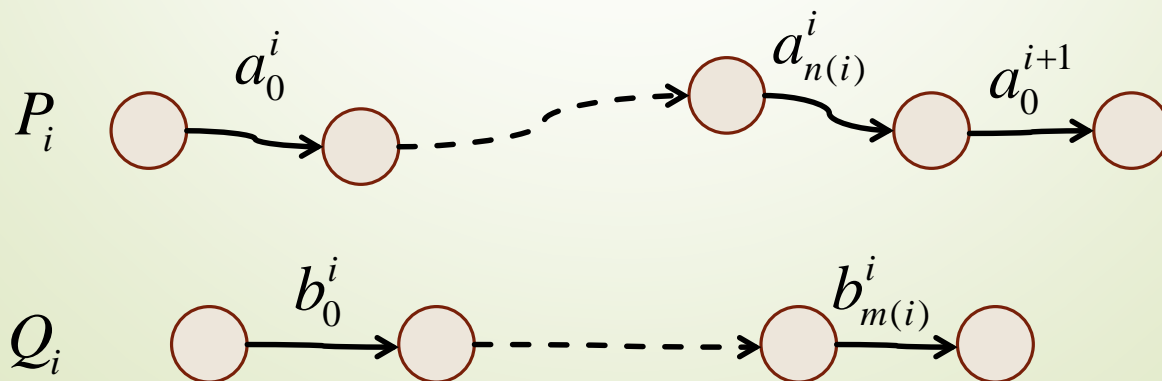
- ▶ Jarník-Primアルゴリズム実行中の木 T は、 U によって誘導される G の部分グラフ $G(U)$ における最小木になっている。
- ▶ 証明
 - ▶ ある弧 $\exists a \in T$ をある弧 $\exists a' \notin T$ に置き換えることで、より小さい木ができる ($w(a') < w(a)$) ことを仮定して、矛盾を導く。



- o を根とする木 T において、弧 a の代わりに弧 a' としたときに、重みが小さくなると仮定する。 $w(a') < w(a)$
- 上の枝で、弧 a を先頭に連続して伸びた道を P_1 とし、その後、下の枝で連続して伸びた道を Q_1 とする。その後、 P_2 、 Q_2 と交互に伸びるとする。他の道は無視する。
- 弧 a' の両端の頂点は道 P_k と Q_l に属しているとする。

- P_i を構成する弧 $\{a_0^i, a_1^i, \dots, a_{n(i)}^i\}$ 、 Q_i を構成する弧 $\{b_0^i, b_1^i, \dots, b_{m(i)}^i\}$ とする。
- P_i の後で Q_i が伸びることから
 - P_i が伸びている最中は Q_i は伸び始めない
 - Q_i が伸びている最中は、 P_i の次 P_{i+1} の部分は伸び始めない

$$\forall i, \forall j, w(a_j^i) \leq w(b_0^i), w(b_j^i) \leq w(a_0^{i+1})$$

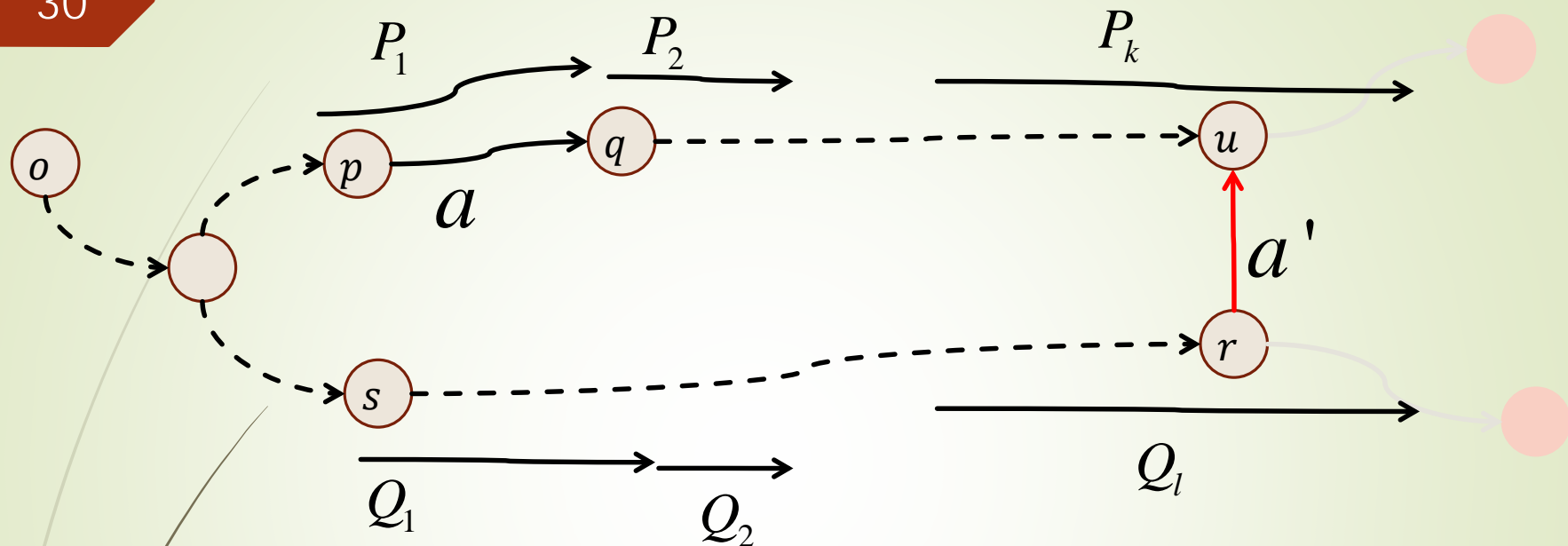


➡ 先頭の弧に注目

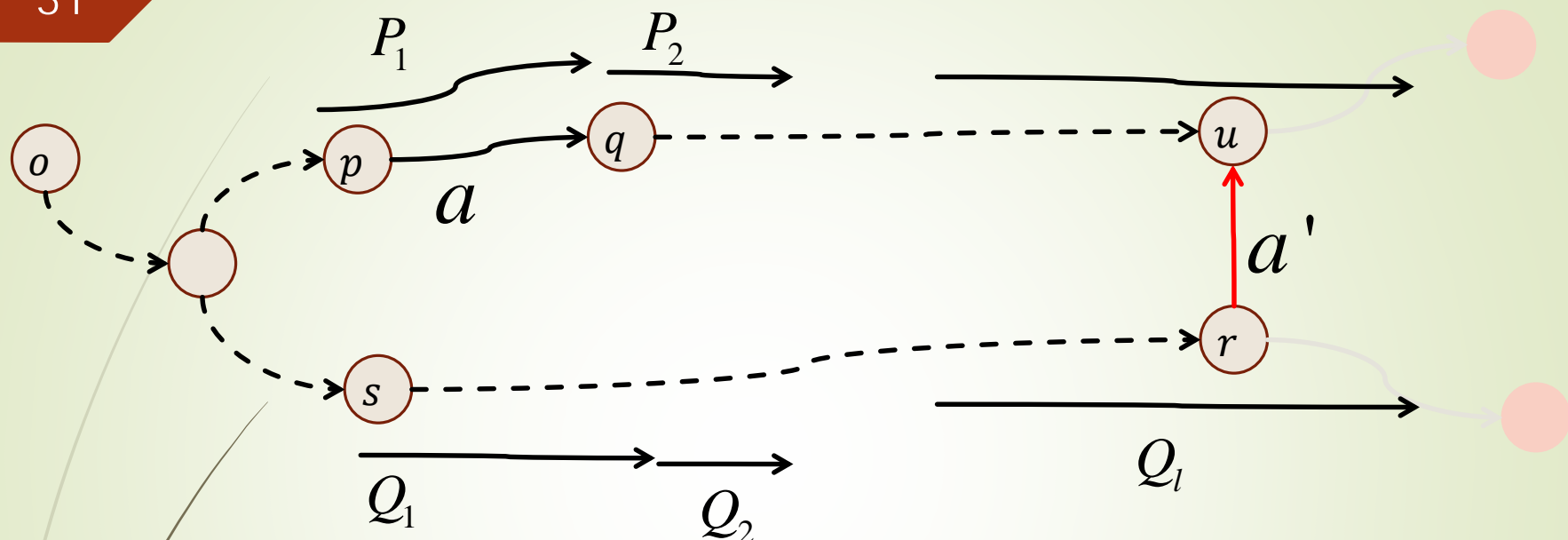
$$\forall i, w(a_0^i) \leq w(b_0^i) \leq w(a_0^{i+1})$$

➡ つまり、各道の先頭の弧の重みは以下を満たす

$$\forall i, w(a) \leq w(a_0^i), w(a) \leq w(b_0^i)$$



- ▶ $k \leq l$ の場合：上の道が頂点 u まで伸びたとき、下の道は頂点 r まで伸びていない場合に相当
 - ▶ 上の道 P_k が伸びるとき、弧 a' が採用されなかったことから $w(a) \leq w(b_0^k) \leq w(a')$ となり矛盾



- $k > l$ の場合：上の道が頂点 u まで伸びたとき、下の道は頂点 r を過ぎて伸びていた場合に相当
 - 下の道 Q_l が伸びるとき、弧 a' が選ばれたことから

$$w(a) \leq w(a_0^{l+1}) \leq w(a')$$

- となり矛盾