最短経路問題
Shortest Path Problem

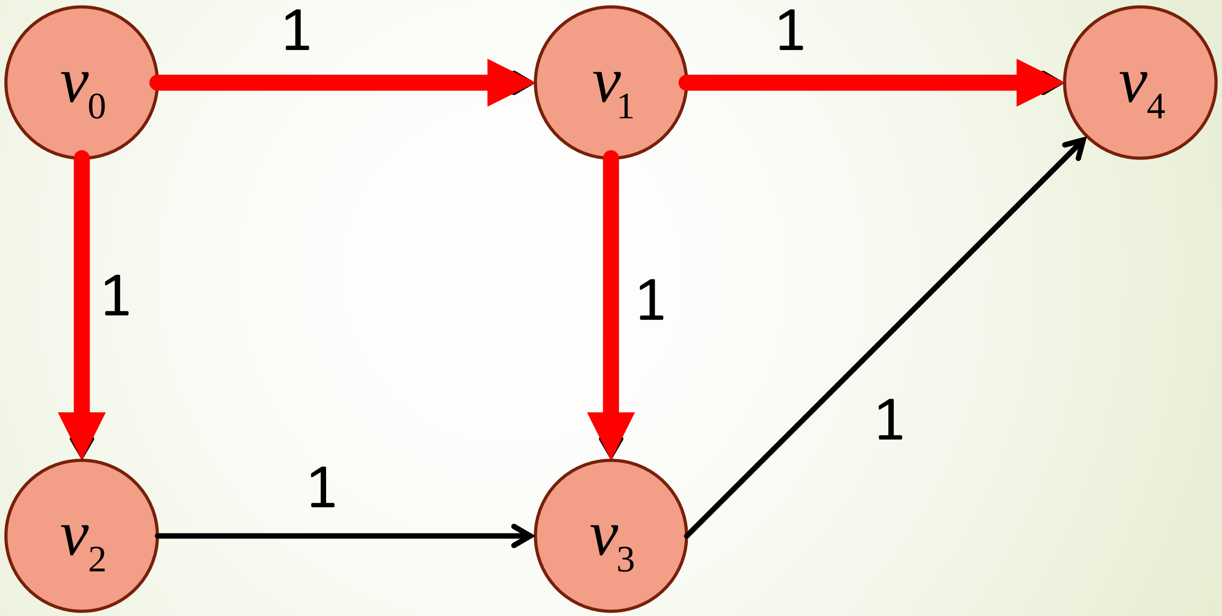
2019年度

担当：只木進一（理工学部)

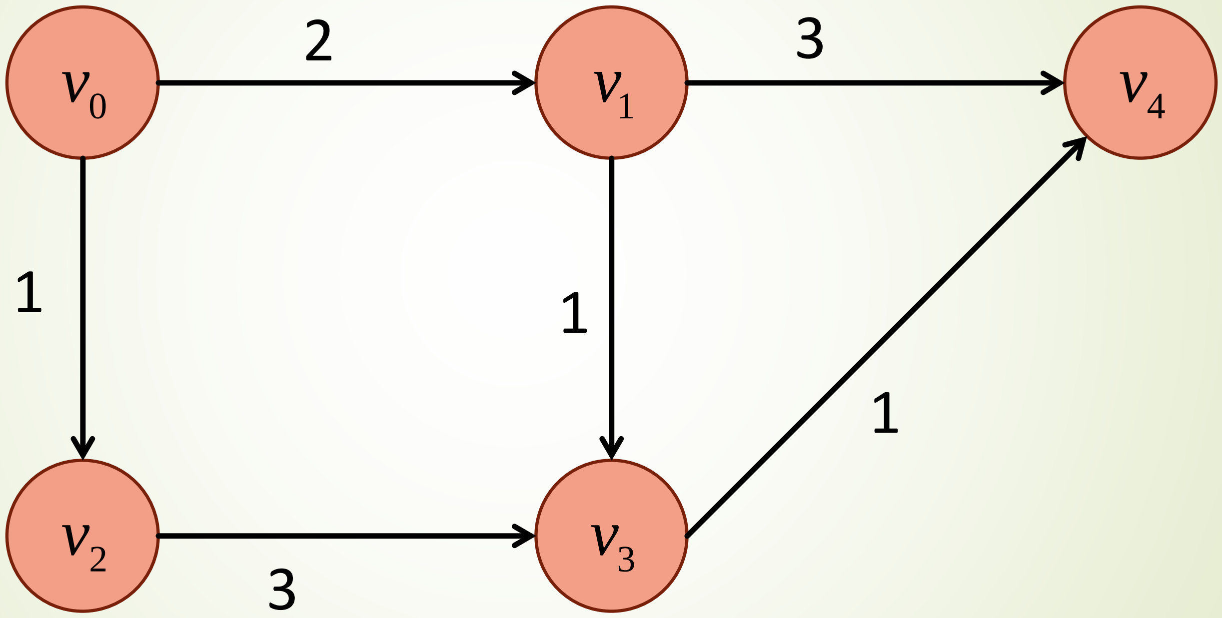
最短経路問題とは

- 有向ネットワーク
  - 各弧に距離・コスト(正の実数)
- 始点から終点までの最短有向道を見つける
  - 弧の向きがそろった道
- 距離・コストの組み合わせ最適化問題

すべての弧の距離が同じならば幅優先探索で十分

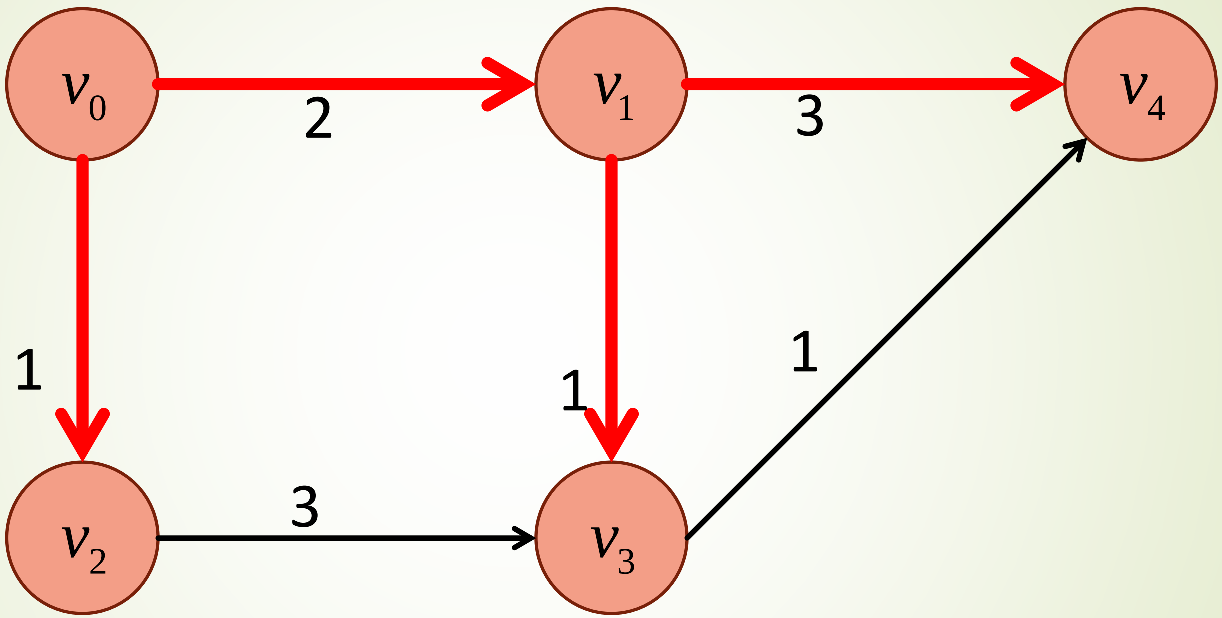


幅優先探索ではダメな理由



弧の長さがばらばらの値

幅優先探索では

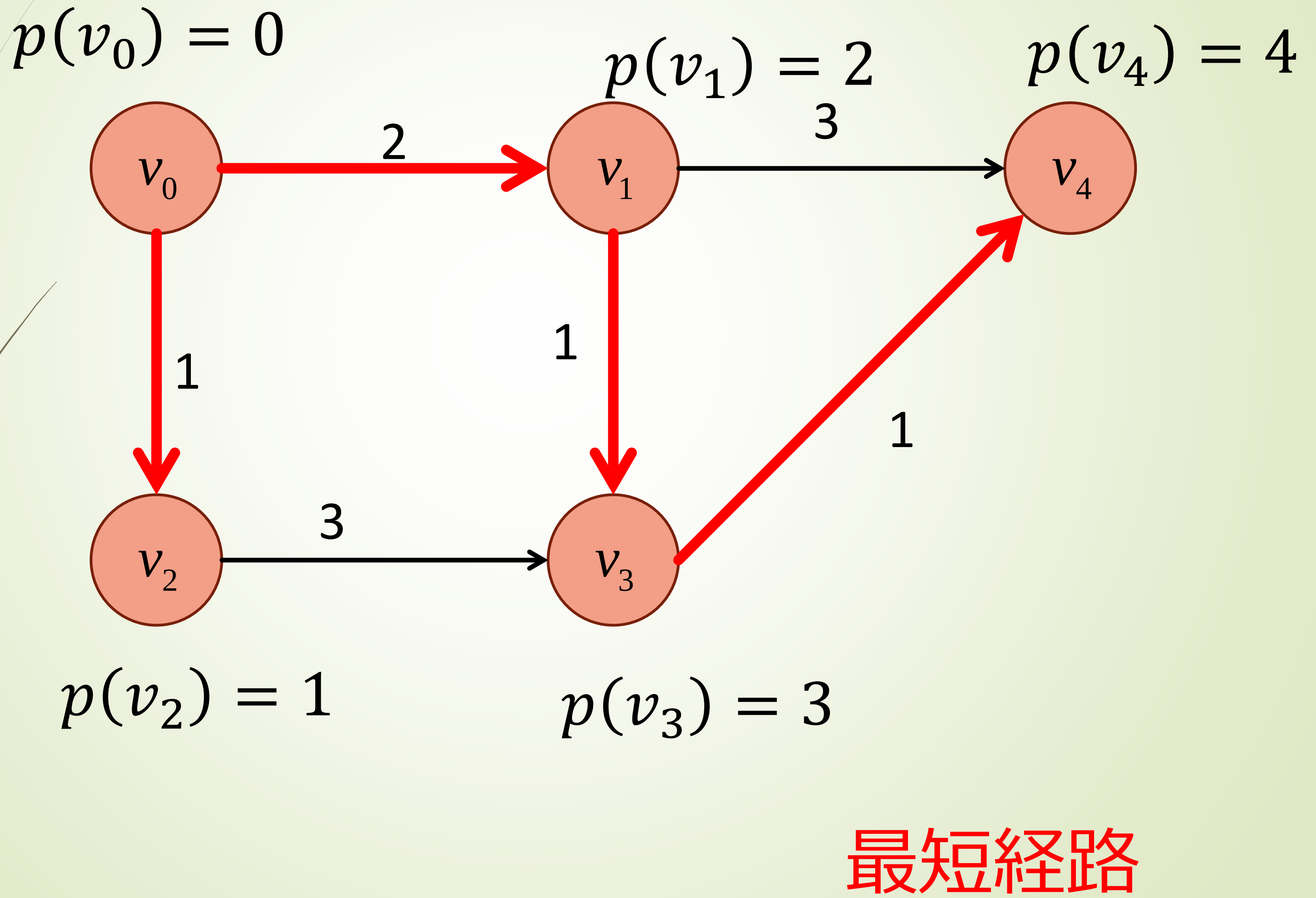


- v_4 への経路が$v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow v_4$となり、距離が5
- しかし、経路$v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow v_3 \rightarrow v_4$のほうが距離4
- 頂点の移動数が多くても、距離の短い道がある

準備：ポテンシャル $p: V \to R$

- 各頂点に定義された実数値
  - 始点からの「高さ」(距離)をイメージ
- 最短の経路に沿った距離に対応

ポテンシャルの例

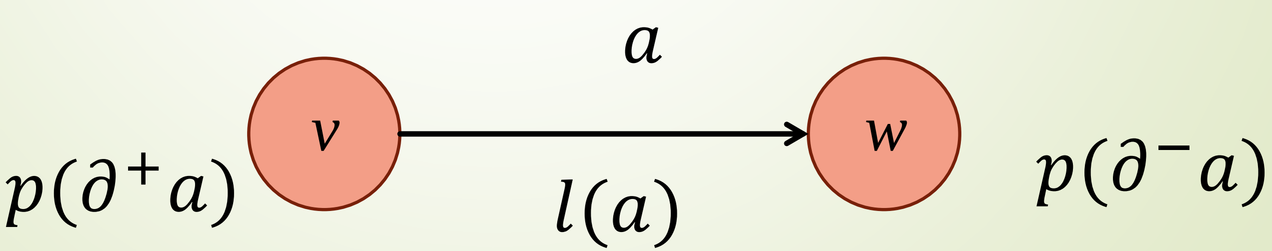


関数$l_p: A \to R$

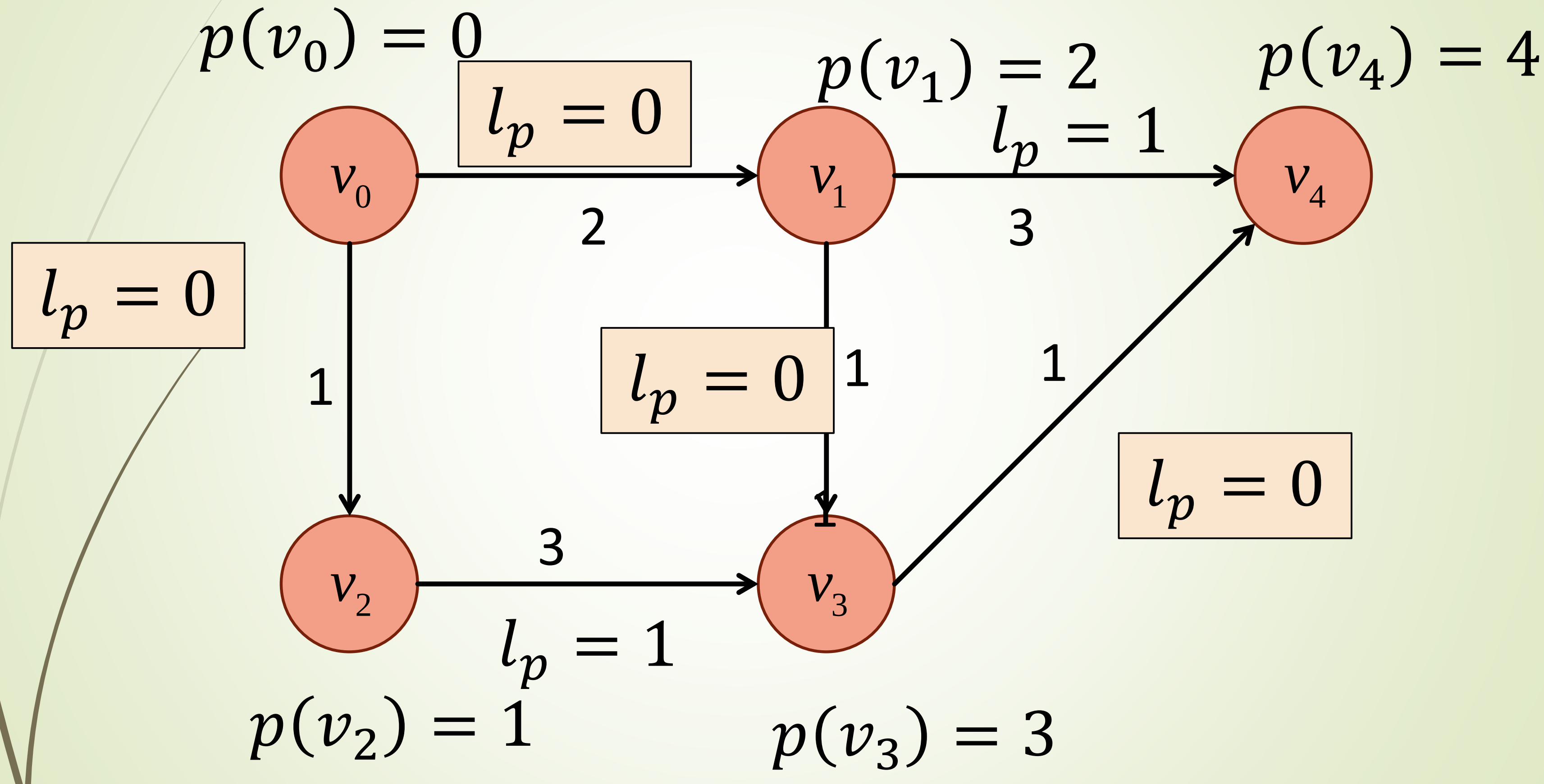
- 弧aの長さ(距離):$l(a)$
- 弧の始点(終点)のポテンシャル:$p(\partial^{\pm}a)$

$$l_p(a) = l(a) + p(\partial^{+}a) - p(\partial^{-}a)$$

- ポテンシャルの差と$l(a)$とのずれ



例



最短経路に沿って$l_p = 0$

有向道に沿って拡張

- 頂点u から 頂点v へ向かう有向道 P に対して以下が成り立つ

$$l_p(P) = l(P) + p(u) - p(v)$$

$$l_p(P) = \sum_{a \in P} l_p(a)$$

$$l(P) = \sum_{a \in P} l(a)$$

有向道に沿った例

$$P = \{u = v_0, a_1, v_1, a_2, \cdots, a_k, v_k = v\}$$

$$l_p(P) = \sum_{a \in P} l_p(a) = \sum_{i=1}^{k} l_p(a_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{k} [l(a_i) + p(v_{i-1}) - p(v_i)]$$

$$= \sum_{i=1}^{k} l(a_i) + p(u) - p(v) = l(P) + p(u) - p(v)$$

- 関数$l_p: A \to R$が非負関数であり、道P上の各弧aにおいて、$l_p(a) = 0$のとき、Pはuからvへの最短経路となる。
- 最短経路でない弧に対しては、$l_p(a) > 0$

- 始点uと終点v任意の道Pに対して、その経路長の下限は、$p(u)-p(v)$である。

$$l(P) = p(u) - p(v) + l_p(P) \geq p(u) - p(v)$$

- このようなポテンシャル（可能な道のうち最小値を与える）を構成することが課題となる。

ダイクストラ(Dijkstra)法

- $l(a) > 0$ の場合を考える
- グラフ G は単純(並列弧が無い)と仮定する

- $U \subseteq V$：始点v_0からの有向道が見つかっているが、距離が確定していない頂点の集合
- $W \subseteq V$ ：始点 v_0 からの有向道が見つかり、距離が確定した頂点の集合
- $p(v) \in R$：始点v_0からの頂点vへの経路に沿った距離
- $q(v) \in V$：最短経路を頂点vから逆にたどる際の頂点vの直前の頂点

Dijkstra法：初期化

$$U = \{v_0\}$$
$$W = \emptyset$$
$$p(v_0) = 0$$
$$p(u) = +\infty(\forall u \in V \setminus \{v_0\})$$
$$q(v) = \mathrm{NULL}(\forall u \in V)$$

Uを$p(w)$によるヒープとして実装すると効率的

Dijkstra法：アルゴリズム

while ($U \neq \emptyset$) {

$\quad w = U.\mathrm{poll}()$ //$p(w)$が最小である$w \in U$

$\quad$forall ($a \in \delta^+ w$) {

$\quad\quad x = \partial^- a$ //wの隣接頂点

$\quad\quad$if ($p(x) > p(w) + l(a)$) {//aを使ったほうが近距離

$\quad\quad\quad q(x) \leftarrow w$

$\quad\quad\quad p(x) \leftarrow p(w) + l(a)$

$\quad\quad\quad$if ($x \in U$) { $U.\mathrm{reduceValue}(x)$ //xの値を変更}

$\quad\quad\quad$else { $U.\mathrm{add}(x)$ //Uにxを追加}

$\quad$}}

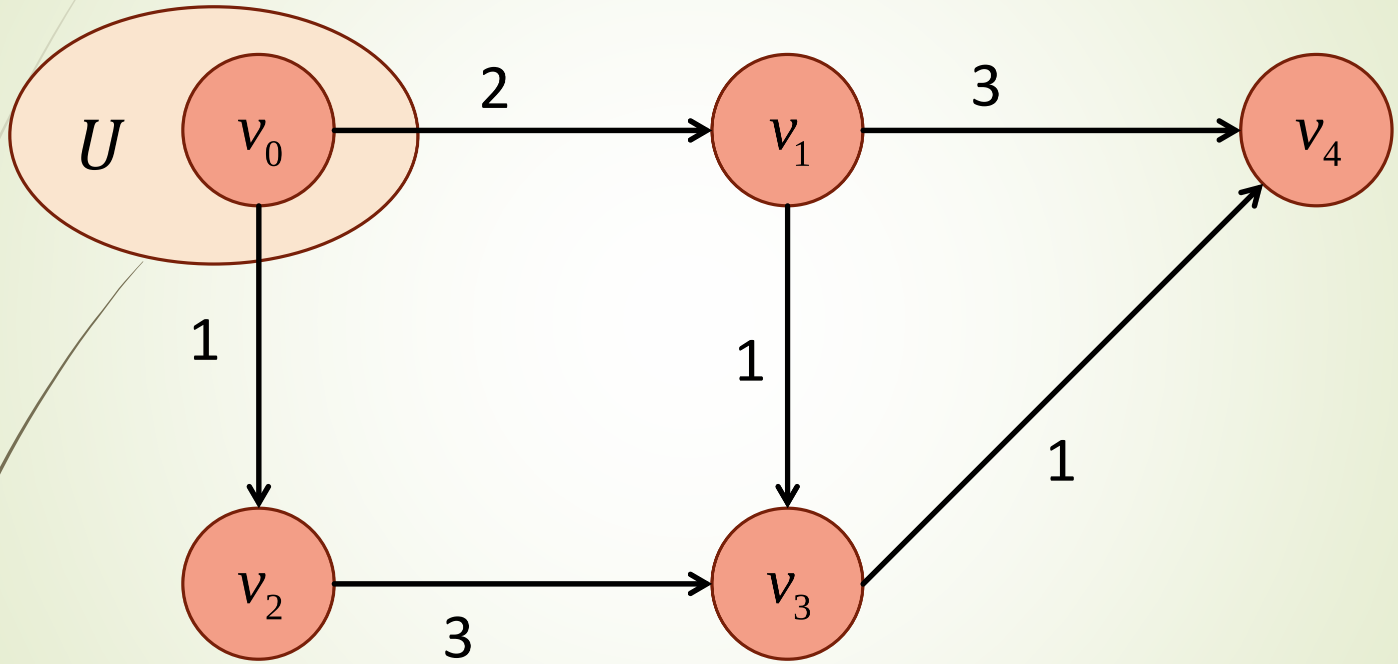
$\quad W \leftarrow W \cup \{w\}$

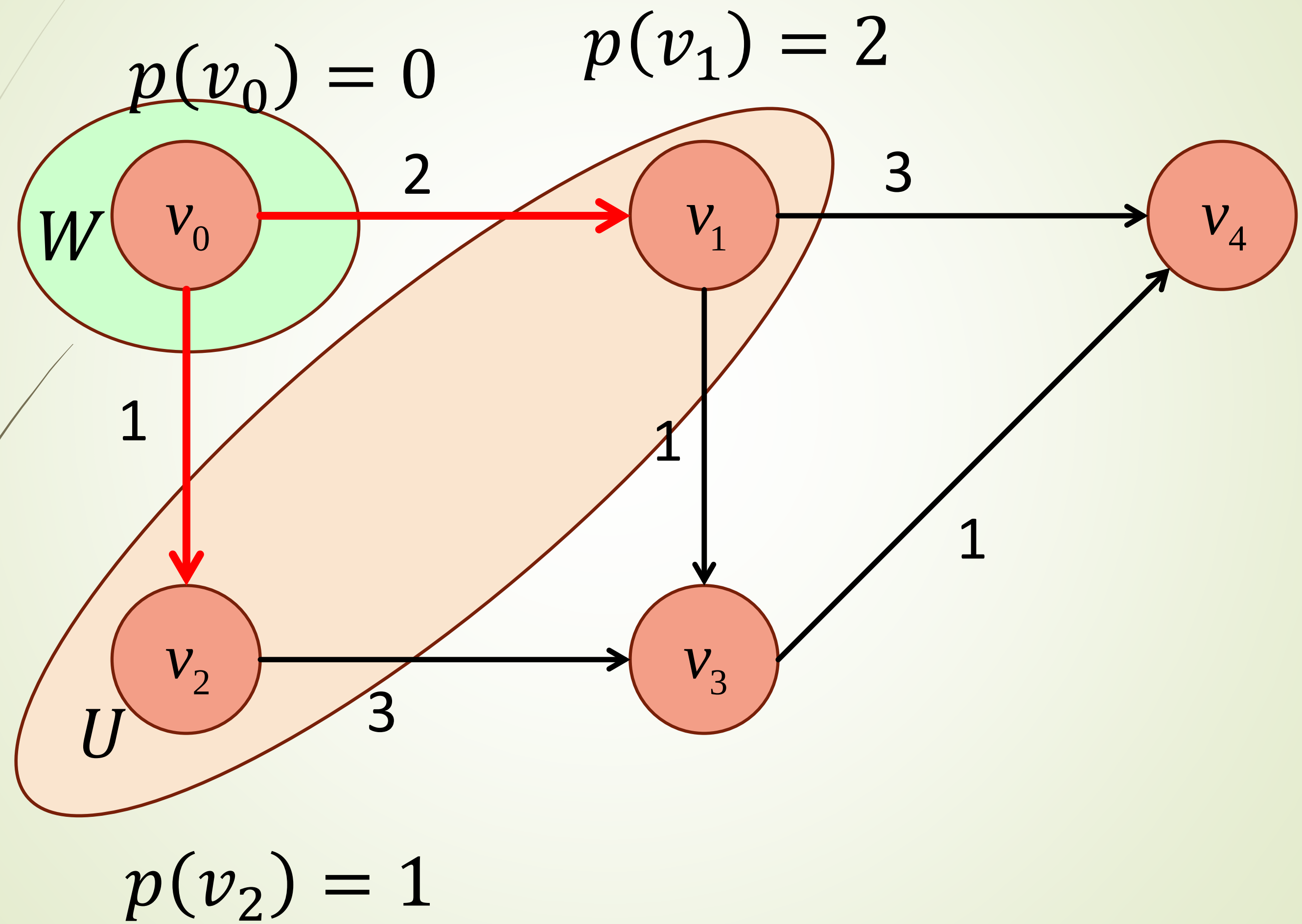
}

ヒープ中の$p(x)$の値が
減ることがあることに注意

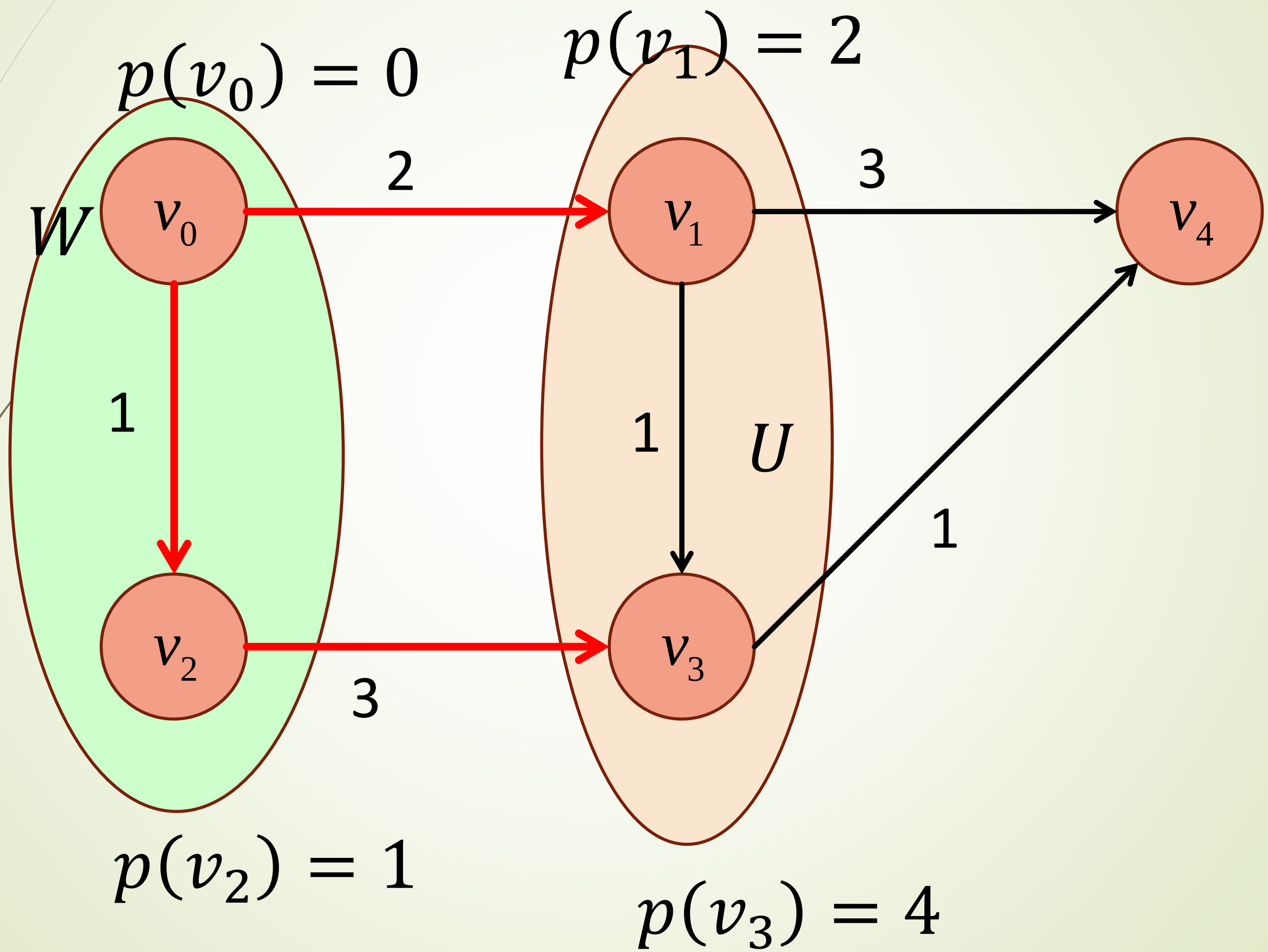
例 1

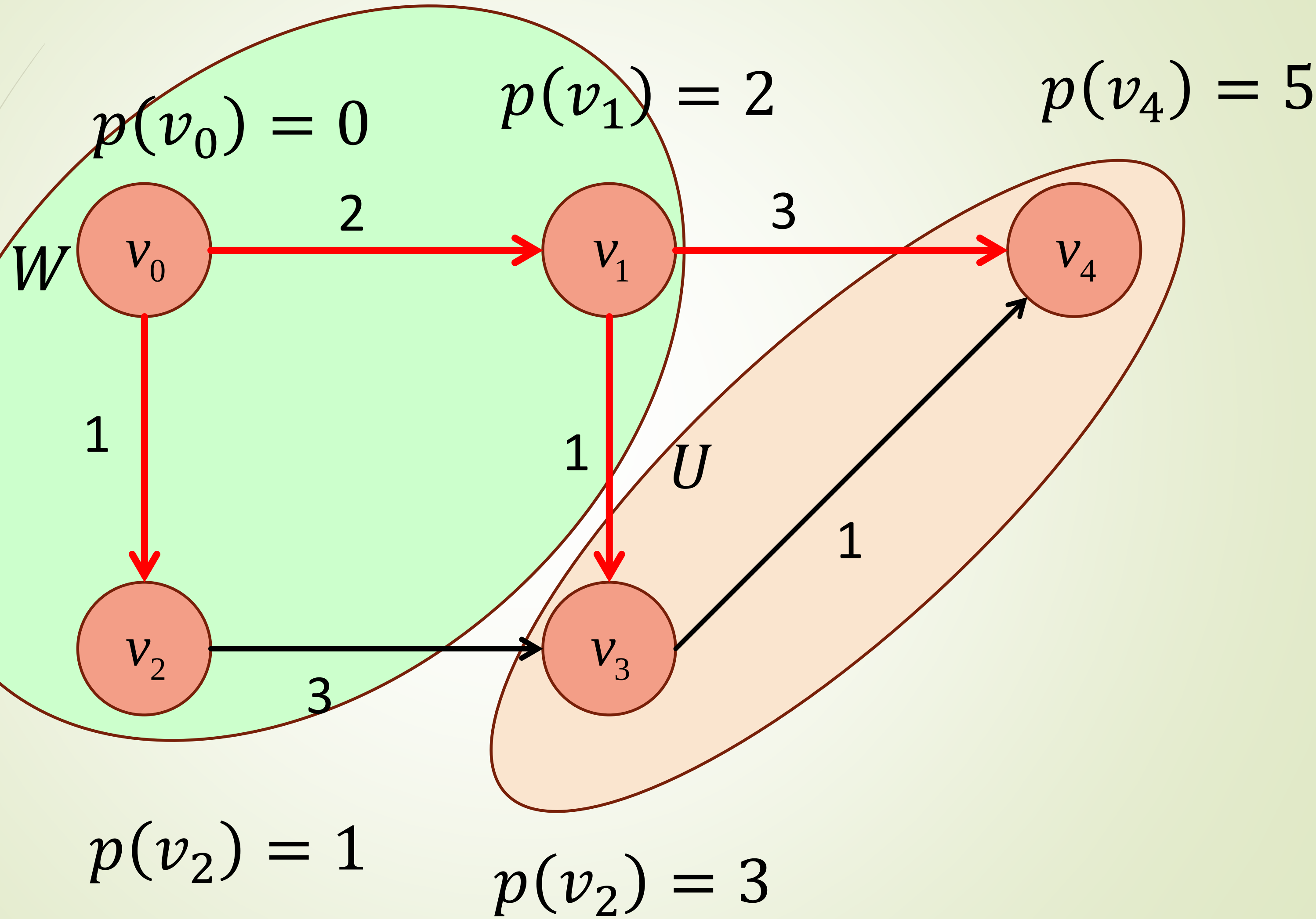
$p(v_0) = 0$





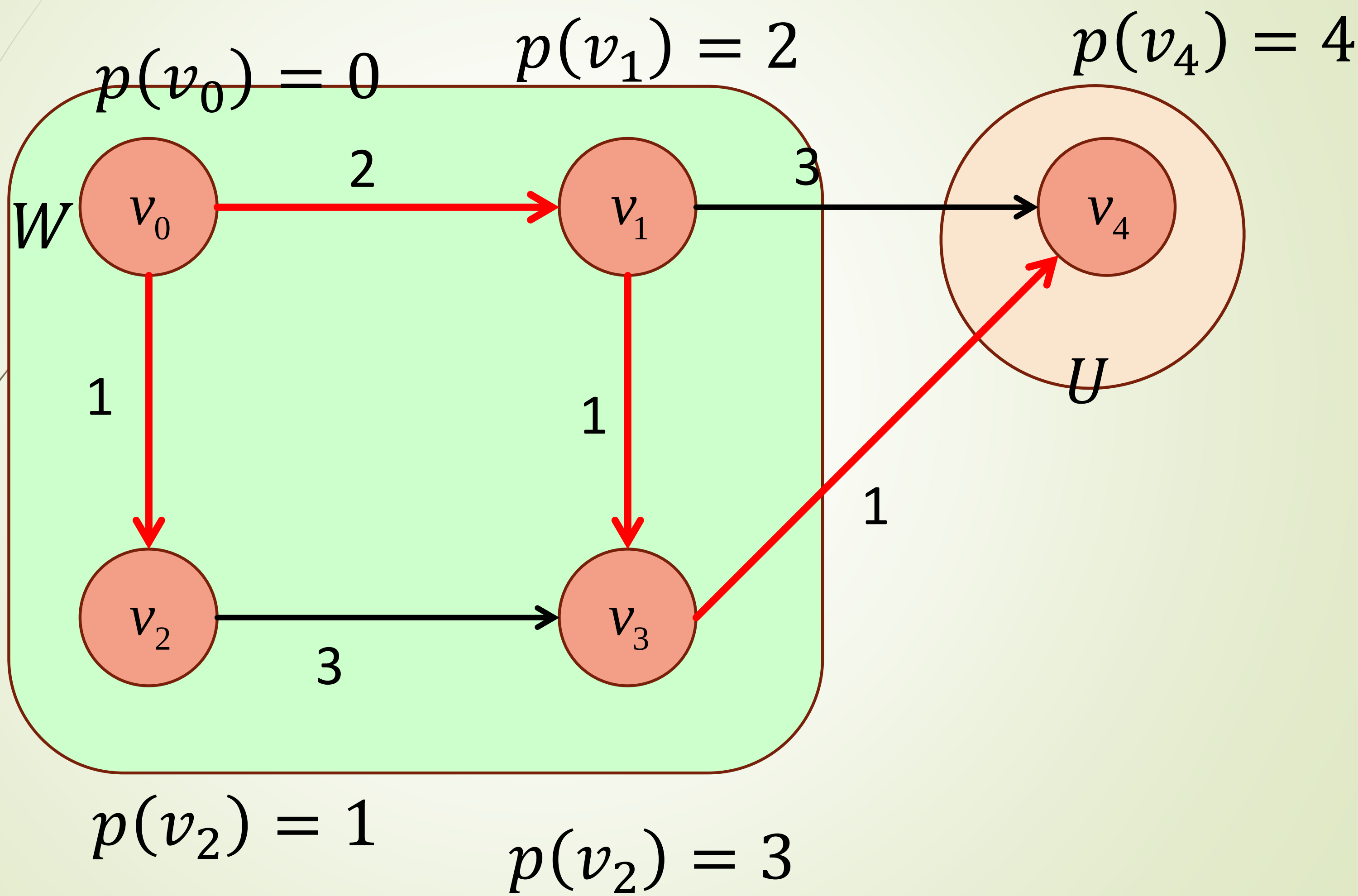
$p(v_0) = 0$
$p(v_1) = 2$
W
v_0
2
v_1
3
v_4
1
1
1
v_2
v_3
U
3
$p(v_2) = 1$


$p(v_0) = 0$
$p(v_1) = 2$
W
v_0
2
v_1
3
v_4
1
1
U
1
v_2
v_3
3
$p(v_2) = 1$
$p(v_3) = 4$



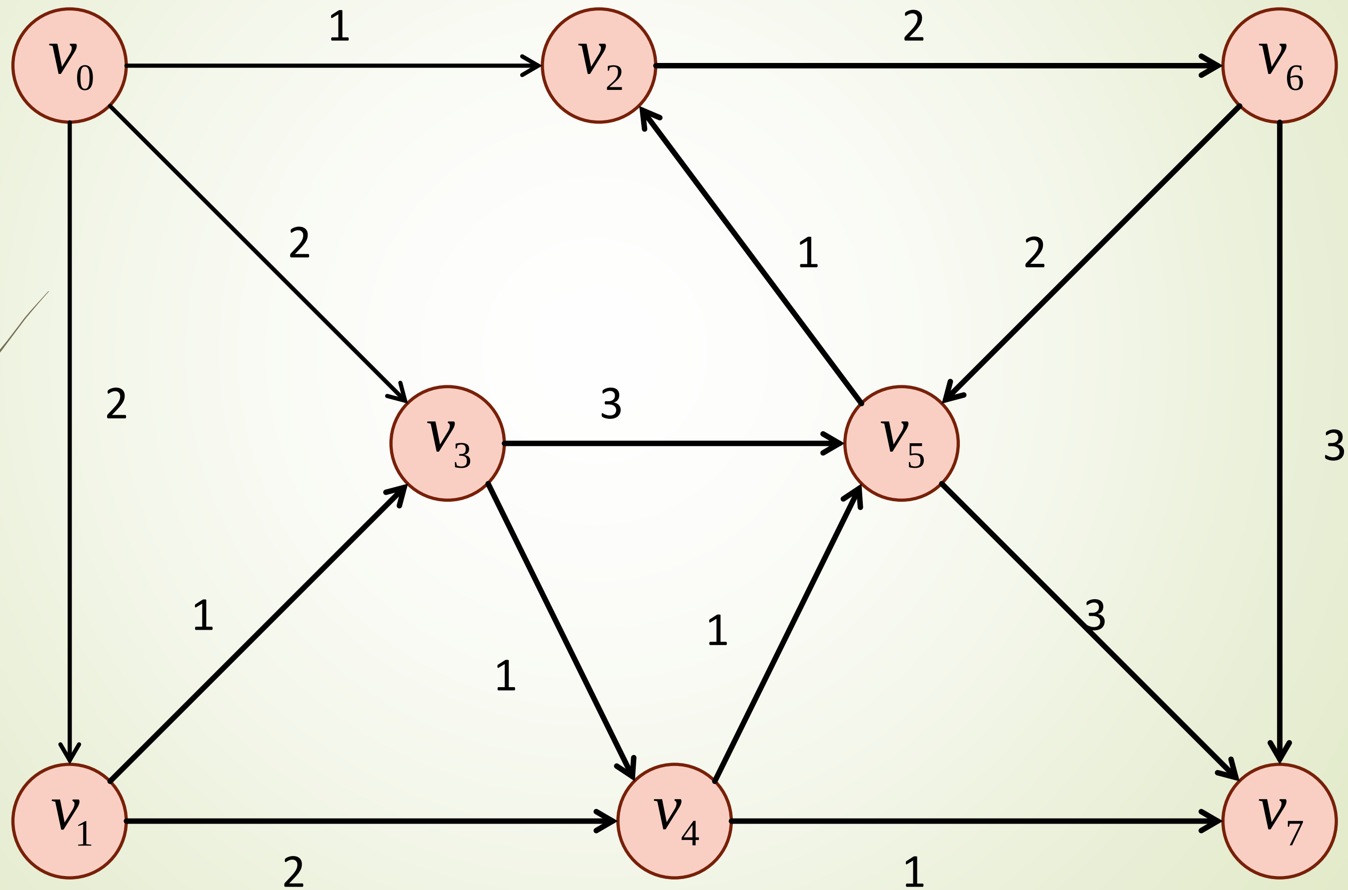
ここが更新されている

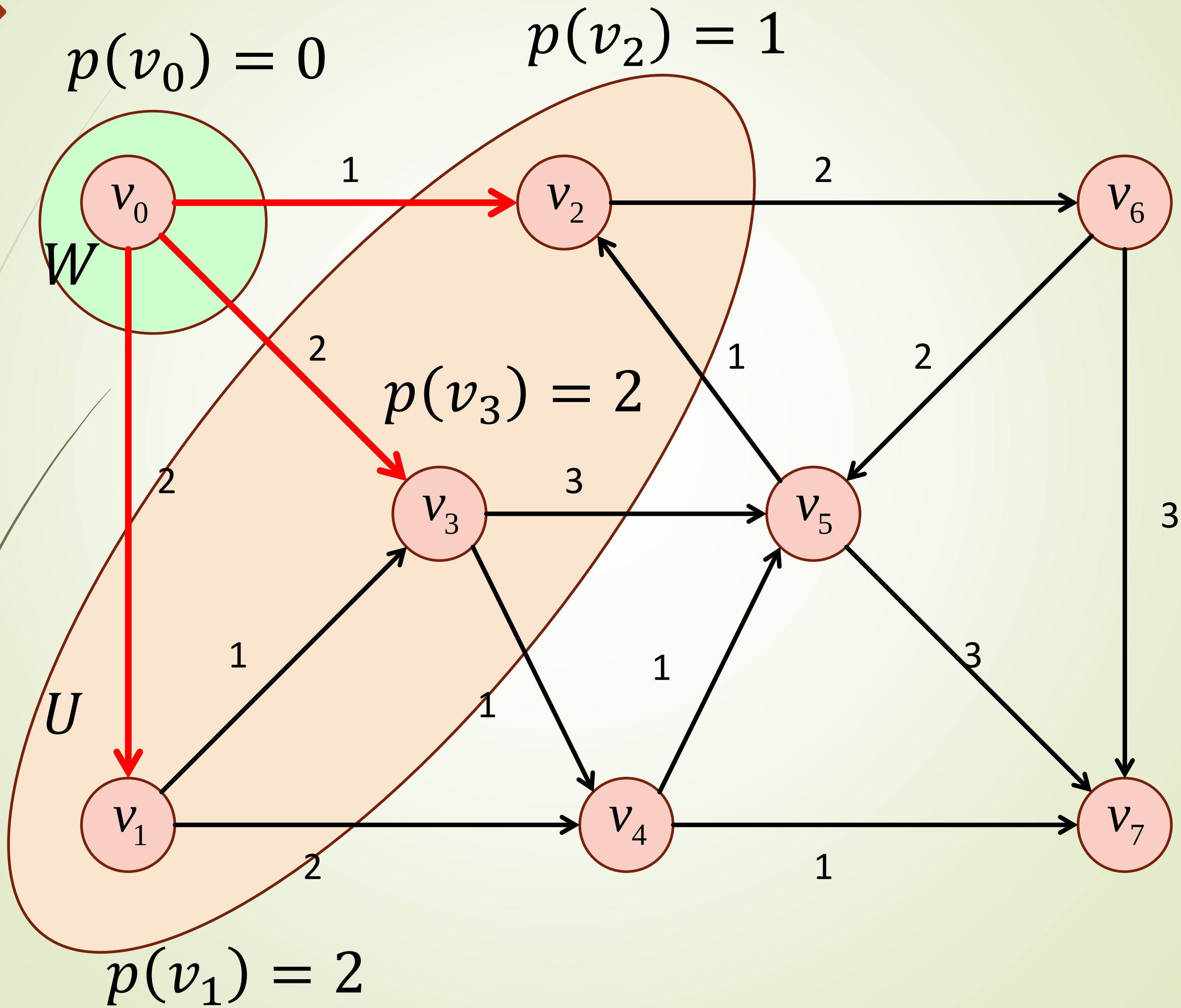
ここが更新されている

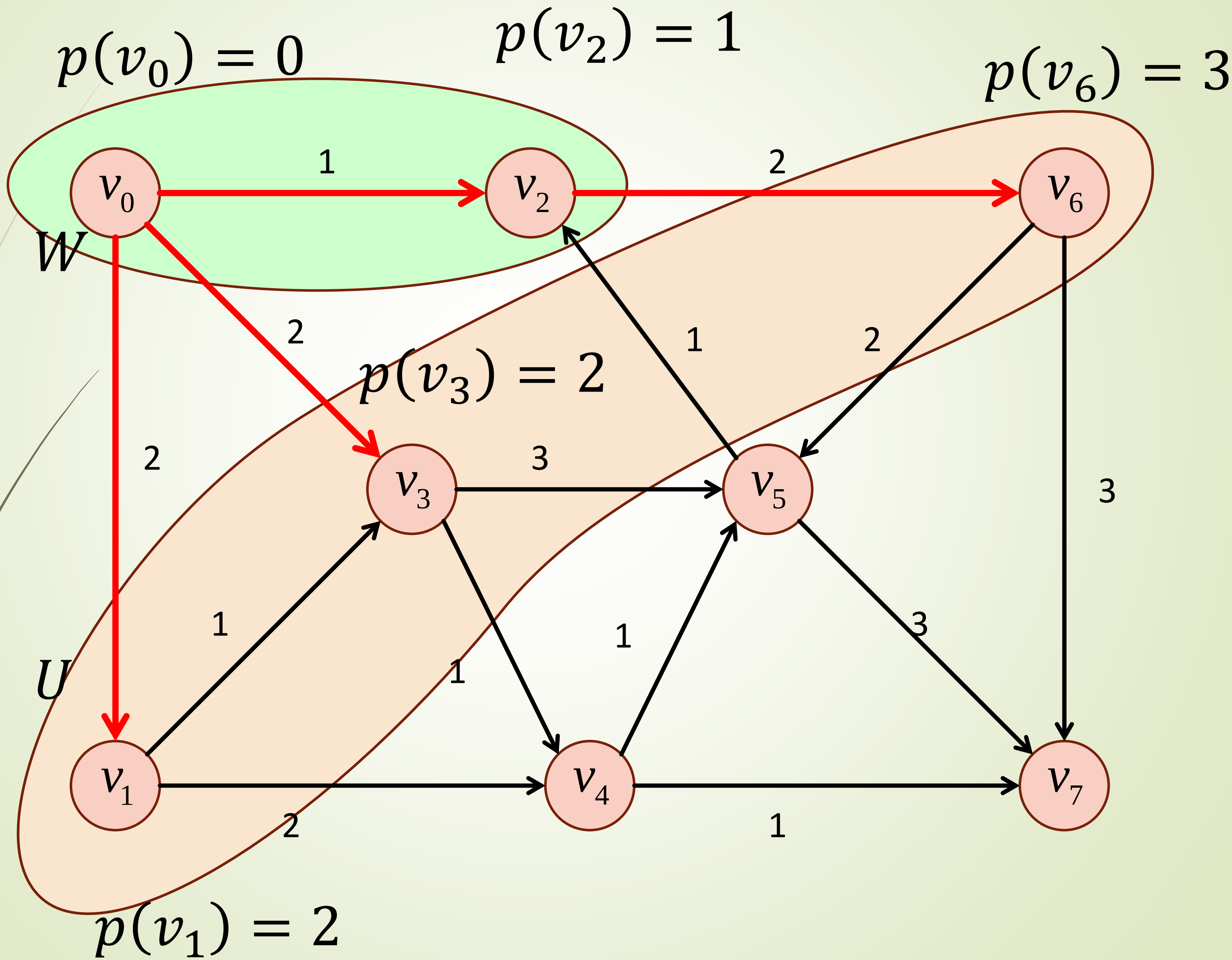


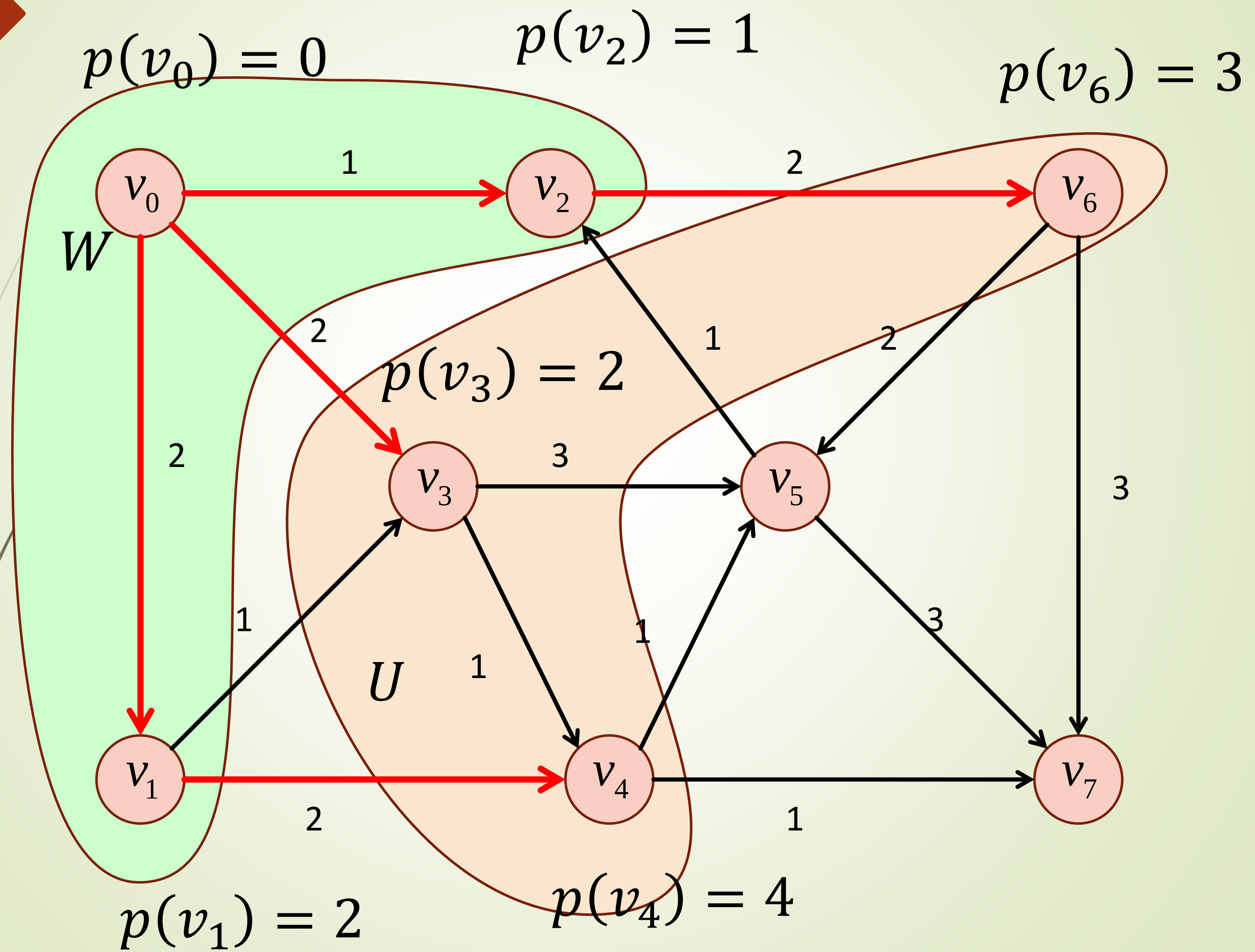
	注目している頂点	w	U	p	q	変更を受けた手順
0		$\emptyset$	$\{v_0\}$	$p(v_0) = 0$		
1	v_0	$\{v_0\}$	$\{v_1, v_2\}$	$p(v_1) = 2$	$q(v_1) = v_0$	
				$p(v_2) = 1$	$q(v_2) = v_0$	
2	v_2	$\{v_0, v_2\}$	$\{v_1, v_3\}$	$p(v_3) = 4$	$q(v_3) = v_2$	3
3	v_1	$\{v_0, v_1, v_2\}$	$\{v_3, v_4\}$	$p(v_4) = 5$	$q(v_4) = v_1$	4
				$p(v_3) = 3$	$q(v_3) = v_1$	
4	v_3	$\{v_0, v_1, v_2, v_3\}$	$\{v_4\}$	$p(v_4) = 4$	$q(v_4) = v_3$	
5	v_4	$\{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4$	$\emptyset$			

例2

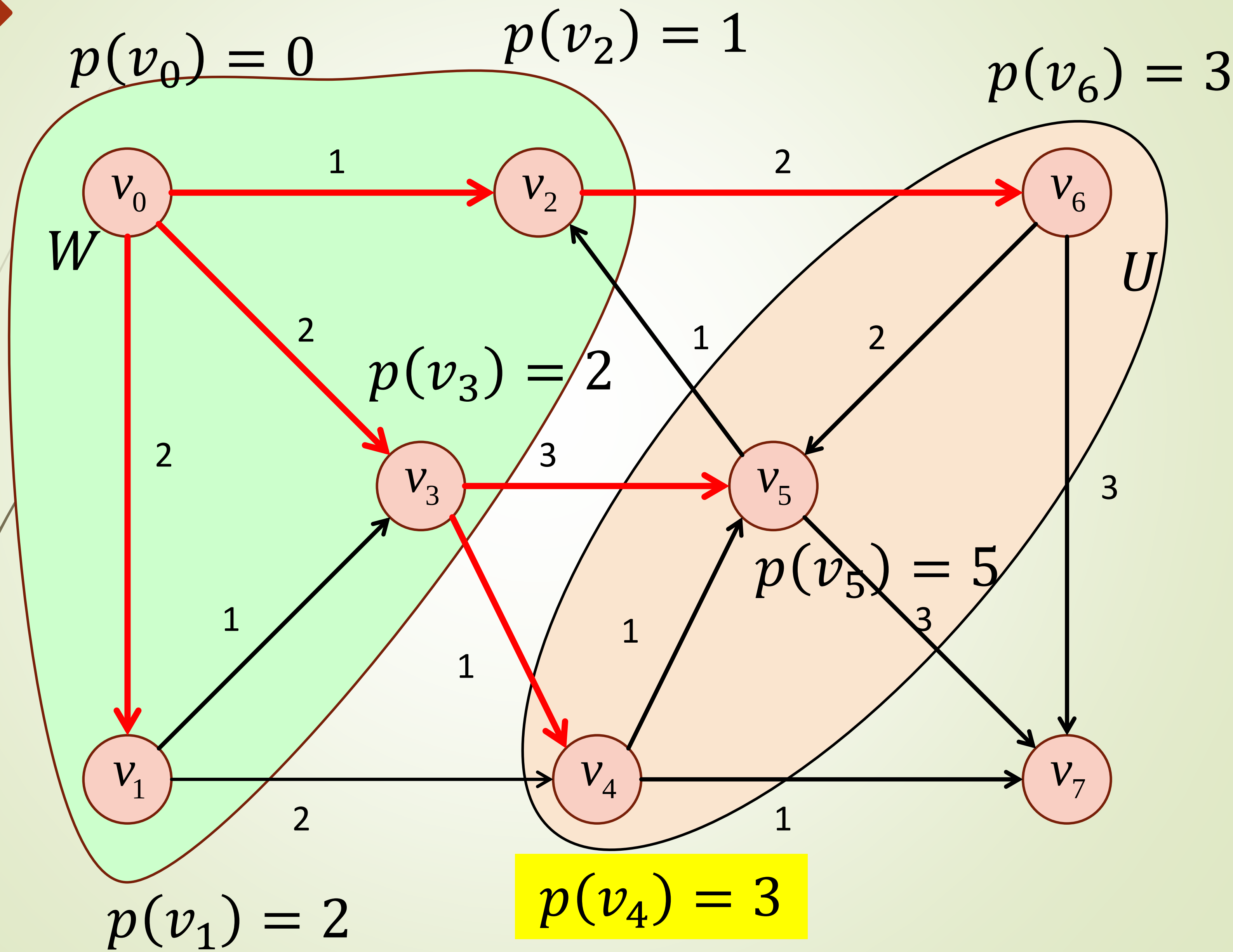



$p(v_0) = 0$
$p(v_2) = 1$
$p(v_3) = 2$
$p(v_1) = 2$
W
U
v_0
v_1
v_2
v_3
v_4
v_5
v_6
v_7
1
2
2
2
1
3
1
1
2
3
3
1
2
1

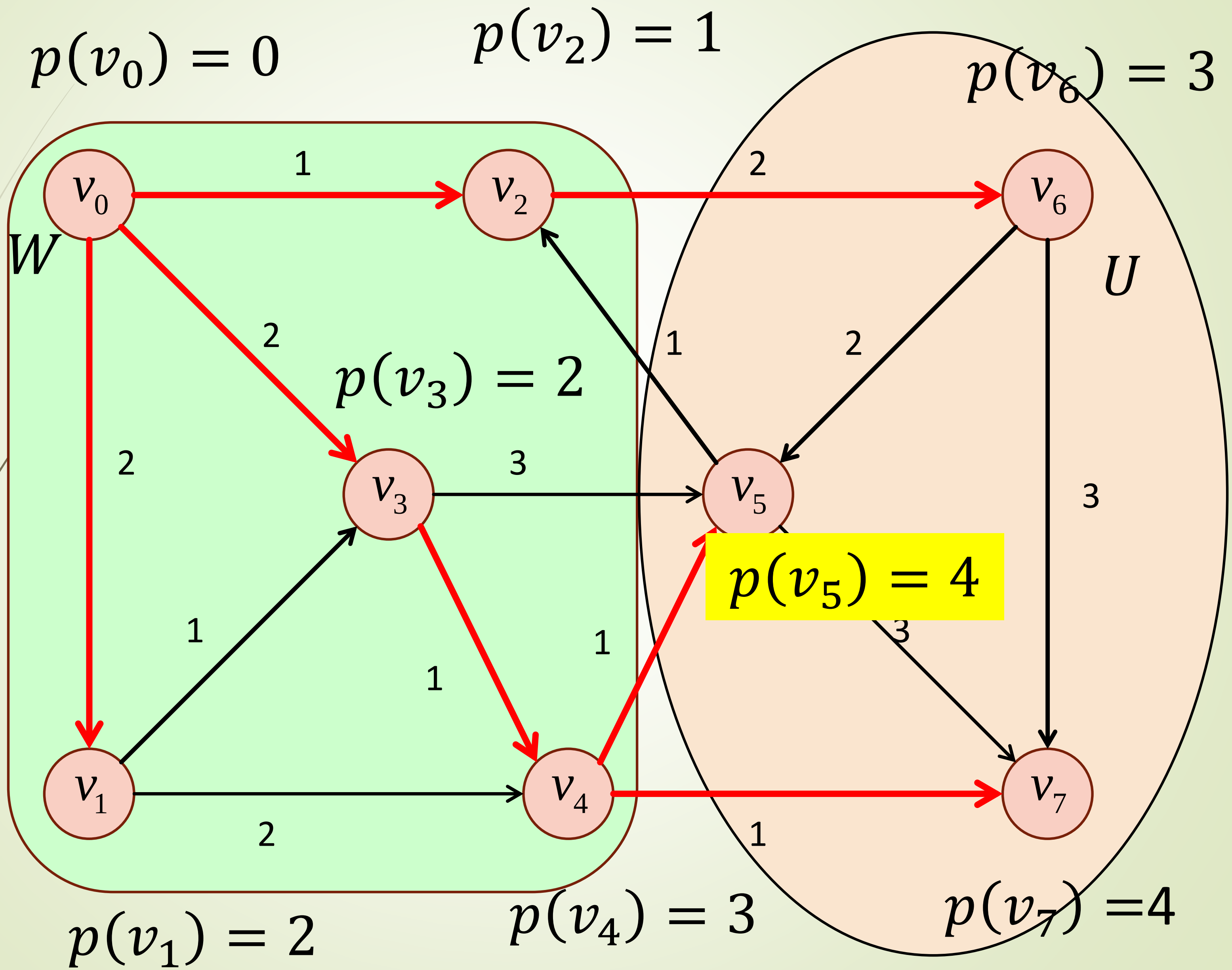

$p(v_0) = 0$
$p(v_2) = 1$
$p(v_6) = 3$
$p(v_3) = 2$
$p(v_1) = 2$
W
U
v_0
v_1
v_2
v_3
v_4
v_5
v_6
v_7
1
2
2
2
1
2
3
1
3
1
1
1
3
2
1

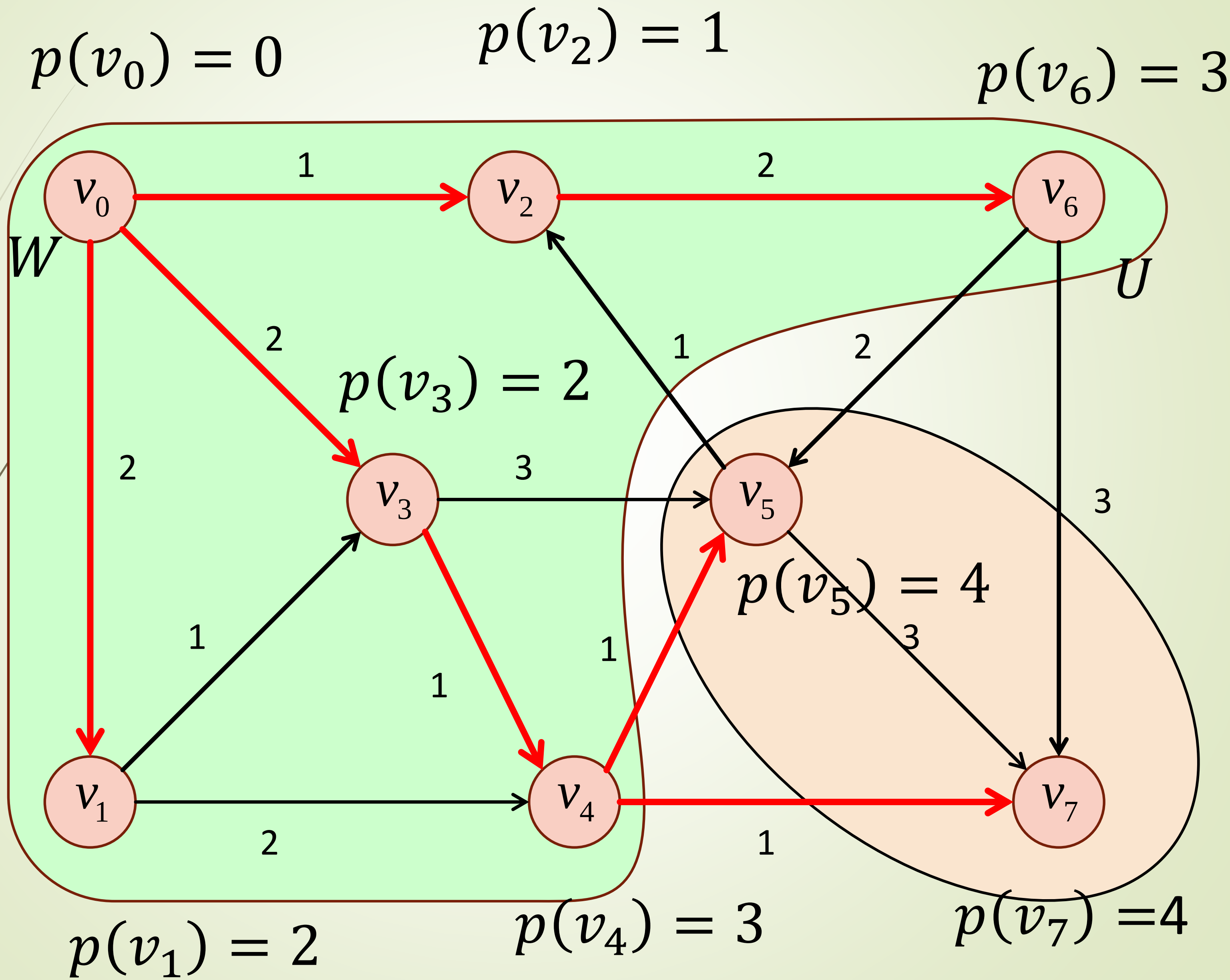


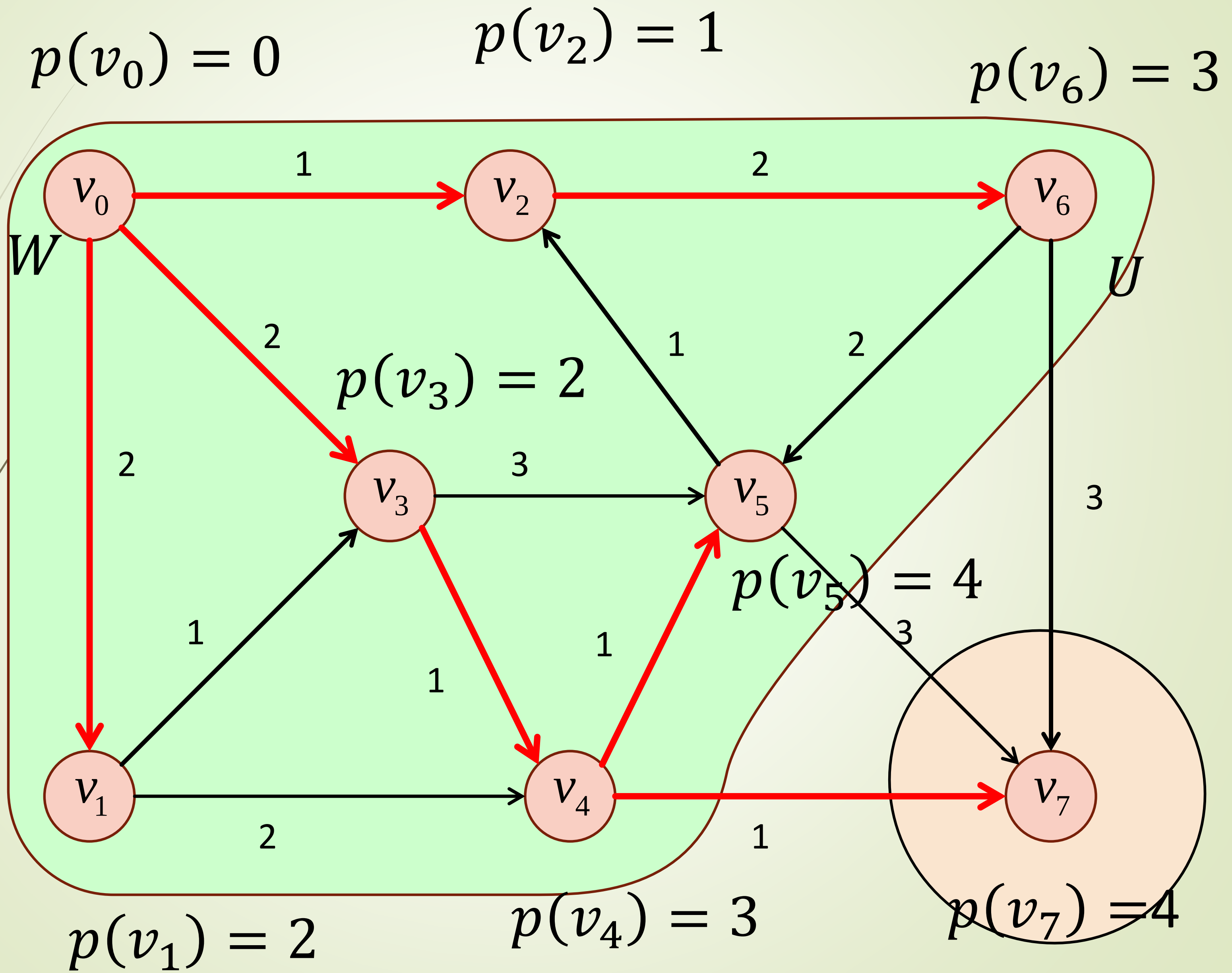
$p(v_0) = 0$
$p(v_2) = 1$
$p(v_6) = 3$
$p(v_3) = 2$
$p(v_1) = 2$
$p(v_4) = 4$
W
U
v_0
v_1
v_2
v_3
v_4
v_5
v_6
v_7
1
2
2
2
1
2
1
2
3
3
1
1
3
2
1



$p(v_0) = 0$
$p(v_2) = 1$
$p(v_6) = 3$
v_0
v_2
v_6
1
2
W
U
2
1
2
$p(v_3) = 2$
2
3
v_3
v_5
3
$p(v_5) = 5$
1
1
3
1
v_1
v_4
v_7
2
1
$p(v_4) = 3$
$p(v_1) = 2$


$p(v_0) = 0$
$p(v_2) = 1$
$p(v_6) = 3$
$p(v_3) = 2$
$p(v_5) = 4$
$p(v_1) = 2$
$p(v_4) = 3$
$p(v_7) = 4$
W
U
v_0
v_1
v_2
v_3
v_4
v_5
v_6
v_7
1
2
2
2
1
3
1
1
2
1
2
1
2
3
3
1


$p(v_0) = 0$
$p(v_2) = 1$
$p(v_6) = 3$
$p(v_3) = 2$
$p(v_5) = 4$
$p(v_1) = 2$
$p(v_4) = 3$
$p(v_7) = 4$
W
U
v_0
v_1
v_2
v_3
v_4
v_5
v_6
v_7
1
2
2
2
1
2
3
1
1
1
1
2
3
3
1



$p(v_0) = 0$
$p(v_2) = 1$
$p(v_6) = 3$
W
U
v_0
v_1
v_2
v_3
v_4
v_5
v_6
v_7
$p(v_3) = 2$
$p(v_5) = 4$
$p(v_1) = 2$
$p(v_4) = 3$
$p(v_7) = 4$
1
2
2
2
1
2
3
3
1
1
1
3
2
1

	注目している頂点	W	U	p	q	変更を受けた手順
0		$\emptyset$	$\{v_0\}$	$p(v_0) = 0$		
1	v_0	$\{v_0\}$	$\{v_1, v_2, v_3\}$	$p(v_1) = 2$	$q(v_1) = v_0$	
				$p(v_2) = 1$	$q(v_2) = v_0$	
				$p(v_3) = 2$	$q(v_3) = v_0$	
2	v_2	$\{v_0, v_2\}$	$\{v_1, v_3, v_6\}$	$p(v_6) = 3$	$q(v_6) = v_2$	
3	v_1	$\{v_0, v_1, v_2\}$	$\{v_3, v_4, v_6\}$	$p(v_4) = 4$	$q(v_4) = v_1$	4
4	v_3	$\{v_0, v_1, v_2, v_3\}$	$\{v_4, v_5, v_6\}$	$p(v_4) = 3$	$q(v_4) = v_3$	
				$p(v_5) = 5$	$q(v_5) = v_3$	5
5	v_4	$\{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4\}$	$\{v_5, v_6, v_7\}$	$p(v_5) = 4$	$q(v_5) = v_4$	
				$p(v_7) = 4$	$q(v_7) = v_4$	
6	v_6	$\{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_6\}$	$\{v_5, v_7\}$			
7	v_5	$\{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$	$\{v_5\}$			
8	v_7	$\{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$	$\emptyset$			

Dijkstra法が正しいことの証明

- 補題 1
  - 頂点集合Wに入った頂点までの距離は、後から更新されることはない
- 補題2
  - W 及び U の要素の頂点は、一意に直前の頂点があり、始点を根とする有向木の一部である
  - この木に沿って$l_p = 0$である
  - この木以外の道では$l_p \geq 0$となる
  - つまり、発見した経路の中で最短である
- 以上から、$W = V$となることで、すべての最短経路が見つかる

Dijkstra法の妥当性：補題1

- Dijkstra法の実行に伴って、頂点が$v_0, v_1, v_2, \cdots$の順に集合Wに追加されるとする
  - 頂点名は、元のネットワークの頂点名でないことに注意
- このとき

$$0 \leq p(v_0) \leq p(v_1) \leq p(v_2) \leq \cdots \leq p(v_i) \leq p(v_{i+1}) \leq \cdots$$

- つまりWには、距離の小さい頂点から順に追加されていく。従って、Wに入った頂点のポテンシャルが後から更新されることはない。

補題1証明

- Dijkstra法の実行中に、以下が常に成り立つことを示す
  - Wに追加された頂点のポテンシャルは、Wに含まれない任意の頂点のポテンシャルより大きいことはない

$$\max\{p(u) \mid u \in W\} \leq \min\{p(u) \mid u \in V \setminus W\}$$

補題1証明

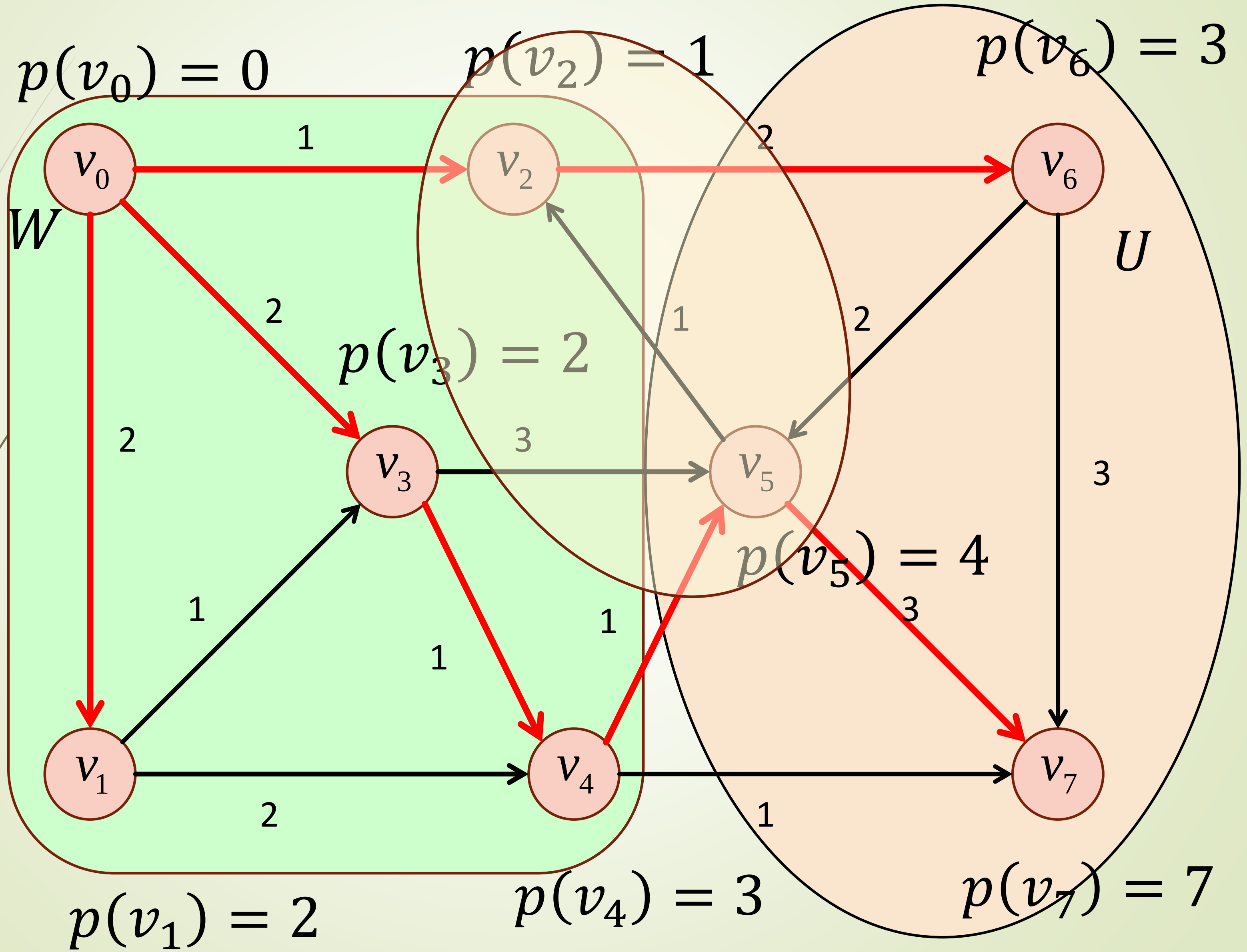
- 一回目のループ実行後：自明
  - $W = \{v_o\}, p(v_0) = 0$
- あるステップで成り立つと仮定
  - 次に選ばれる頂点：$w \in U \subseteq V \setminus W$
    - $V \setminus W$の中でポテンシャルが最小
  - ポテンシャルの更新前

$$\max\{\, p(u) \mid u \in W \,\} \leq p(w) \leq \min\{p(u) \mid u \in V \setminus (W \cup \{w\})\}$$

  - ポテンシャルの更新後

$$\max\{\, p(u) \mid u \in W \,\} \leq \min\{p(u) \mid u \in V \setminus W\}$$

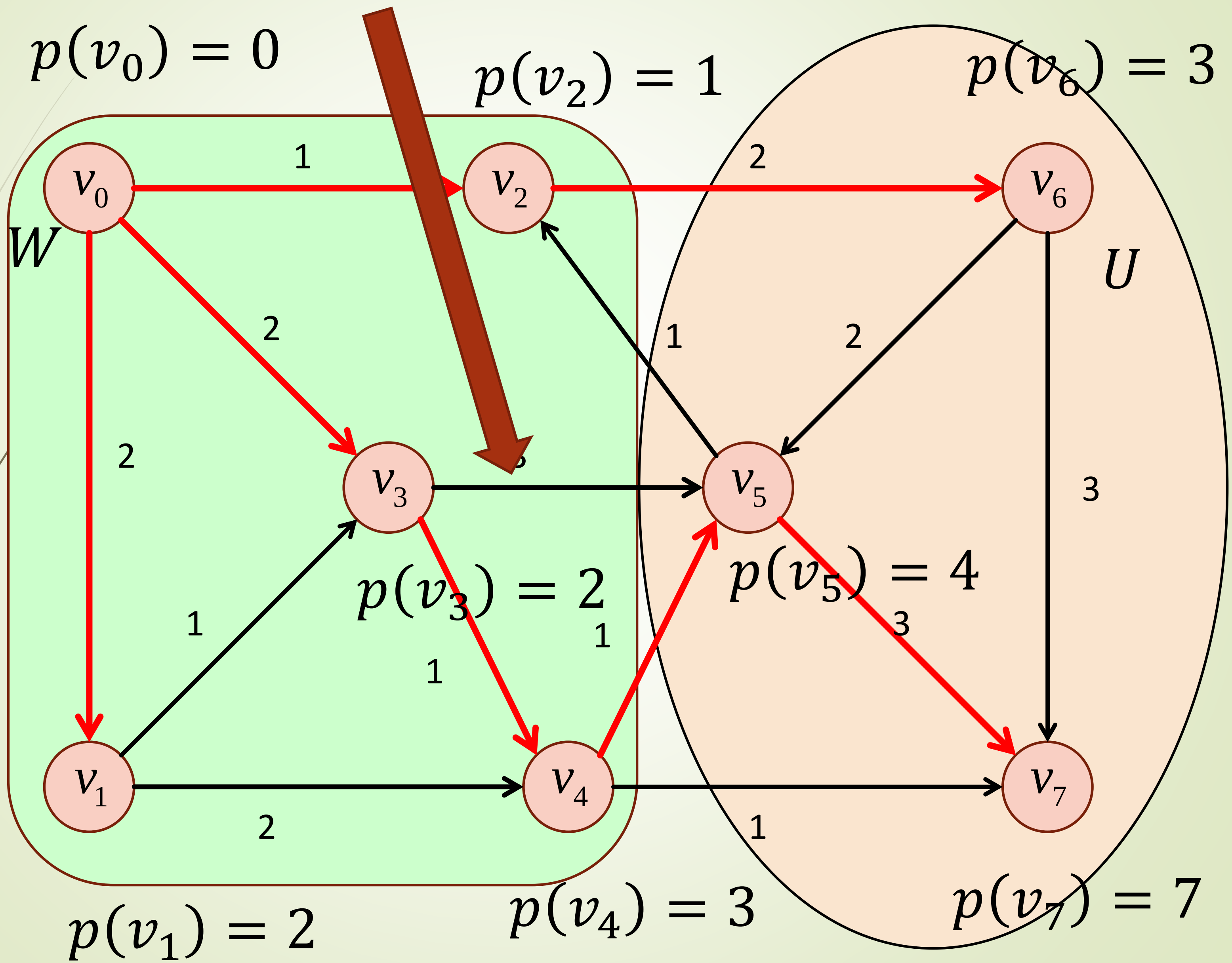
v_2のポテンシャルが更新されることはない



Dijkstra法の妥当性：補題2

- Wに始点を持ち、 Uに終点を有するGの弧の集合δ^+W
  - $G_W = (W \cup U, \delta^+W)$に対して$l_p(a) \geq 0 (\forall a \in \delta^+W)$
- 経路がわかっているならば
  - $l_p(q(u), u) = 0 \quad (\forall u \in (W \cup U) \setminus \{v_0\})$
- $\forall u \in (U \cup W) \setminus \{v_0\}$に対して定まる弧$(q(u), u)$の全体は、$v_0$を根とする有向木である。
- つまり、経路が指定されると、頂点uはv_0を根とする有向木の一部となり、その経路に沿って$l_p(v_0, u) = 0$となる

$$l_p(v_3, v_5) = l(v_3, v_5) + p(v_3) - p(v_5)$$
$$= 3 + 2 - 4 = 1 > 0$$



補題2証明

- Dijkstra法の手順から、$a \in \delta^+ W$に対して

$$p(\partial^- a) \leq p(\partial^+ a) + l(a)$$
$$\Downarrow$$
$$l_p(a) = l(a) + p(\partial^+ a) - p(\partial^- a) \geq 0$$

- $\forall u \in U$に対して

$$p(u) = p\big(q(u)\big) + l(q(u), u)$$
$$\Downarrow$$
$$l_p(q(u), u) = l(q(u), u) + p\big(q(u)\big) - p(u) = 0$$

補題2証明

- 補題1より、Wの要素は順序付けられている
- $\forall v_i \in W$ に対して、 $q(v_i) = v_j$ ならば、$j < i$
  - v_iに対して、一意に親の頂点が定まる
- $\forall v \in U$に対して、$q(v) = w \in W$
  - 一意に親が定まる
- v_0を根とした有向木が定まる

Dijkstra法で最短経路が求まるのは

- 始点uから各頂点vへの道$P(u,v)$が定まる
- その経路に沿って
  - $l\left(P(u,v)\right)=p(v)-p(u)=0$
- 他の経路$P'(u,v)$に対しては、その経路長が$P(u,v)$よりも長い

$$l\left(P'(u,v)\right)=p(v)-p(u)+l_p\left(P'(u,v)\right)\geq p(v)-p(u)$$