



特殊なグラフ

2019年度

担当：只木進一（理工学部）

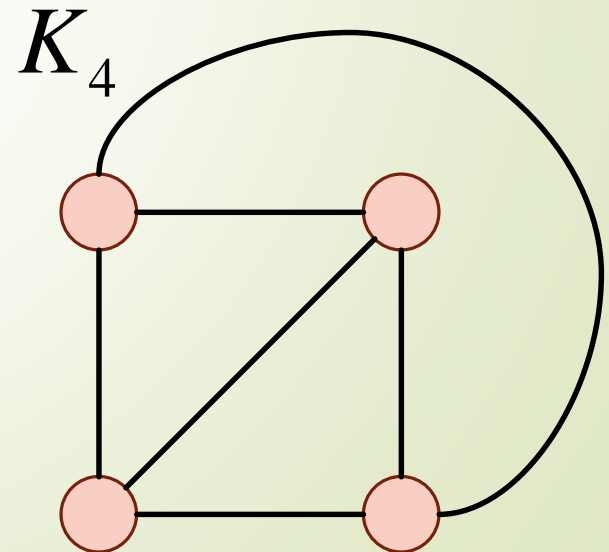
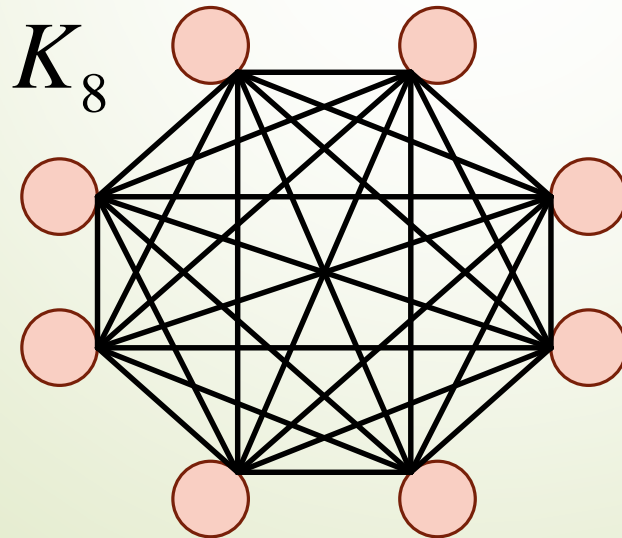
今回の目的：特別な構造のグラフの導入

- 完全グラフ (complete graphs)
- 正則グラフ (regular graphs)
- 二部グラフ (bipartite graphs)
- 道 (paths)
- 閉路 (circles)
- 木 (trees)
- 平面グラフ (planer graphs)
- 双対グラフ (dual graphs)

完全グラフ (Complete Graphs)

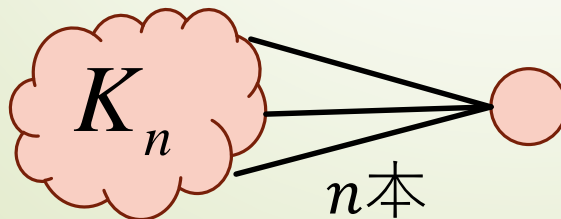
Komplett
ドイツ語：完全な

- 任意の相異なる頂点の組に**必ず一つの弧**が存在する無向グラフ



完全グラフの弧の数

- ➡ K_n の弧の数： $N_a(n) = n(n-1)/2$
- ➡ 数学的帰納法による証明
 - ➡ $n = 3$ の場合：明らか
 - ➡ ある n で正しいと仮定する。頂点を一つ追加することは、その頂点から既存の頂点群に向かって、弧を n 本追加することに対応する

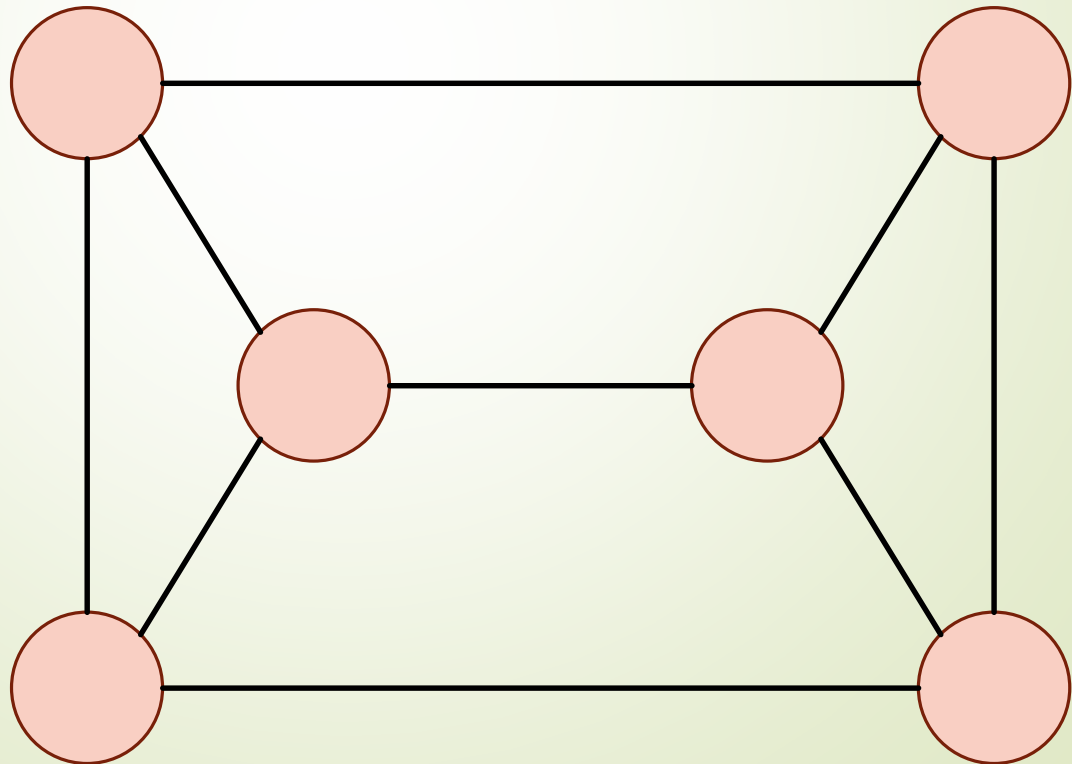


$$\begin{aligned}
 N_a(n+1) &= N_a(n) + n \\
 &= \frac{n(n-1)}{2} + n = \frac{n(n-1+2)}{2} \\
 &= \frac{n(n+1)}{2}
 \end{aligned}$$

正則グラフ (Regular Graph)

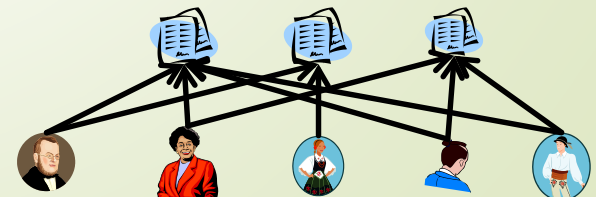
- ▶ 全ての頂点の次数が等しいグラフ

3-regular graph



二部グラフ (Bipartite Graphs)

- 二種類のモノの関係を表す
 - 俳優→映画
 - 研究者→論文
- ここから、以下のような関係を得ることができる
 - 俳優間の共演関係
 - 研究者間の共同研究の関係



例：共演関係のグラフ

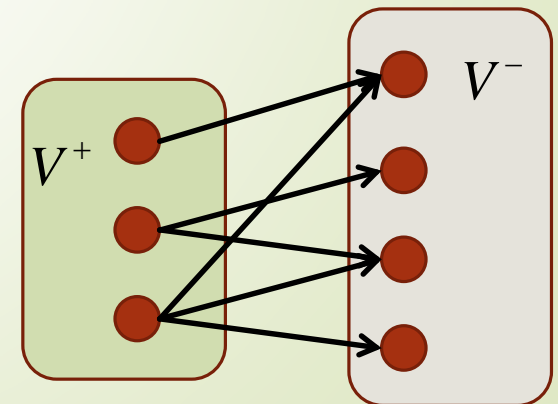
- ▶ ケビン・ベーコンゲーム
 - ▶ 俳優の「距離」を測る
 - ▶ <http://oracleofbacon.org>
 - ▶ 映画俳優のデータベース：<http://www.imdb.com>
- ▶ グラフの可視化
 - ▶ <http://www.math.ucsd.edu/~fan/complex/>
- ▶ 参考書
 - ▶ 増田直紀「私たちはどうつながっているのか—ネットワークの科学を応用する」(中公新書、2007)
 - ▶ 安田雪「『つながり』を突き止める」(光文社新書、2010)

二部グラフ (Bipartite Graphs)

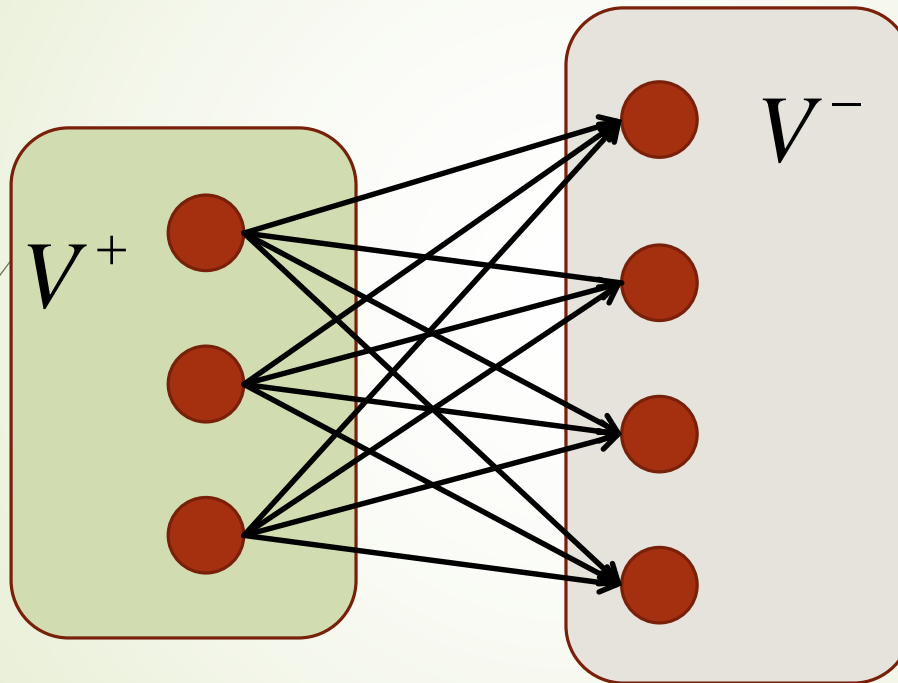
- ▶ グラフの頂点集合が二つに分割されている: $V = V^+ \cup V^-$, $V^+ \cap V^- = \emptyset$
- ▶ 各弧がその二つの集合の頂点を結ぶ
 - ▶ 弧の向きは V^+ から V^- へと、通常は定義する

$$\forall a \in A$$

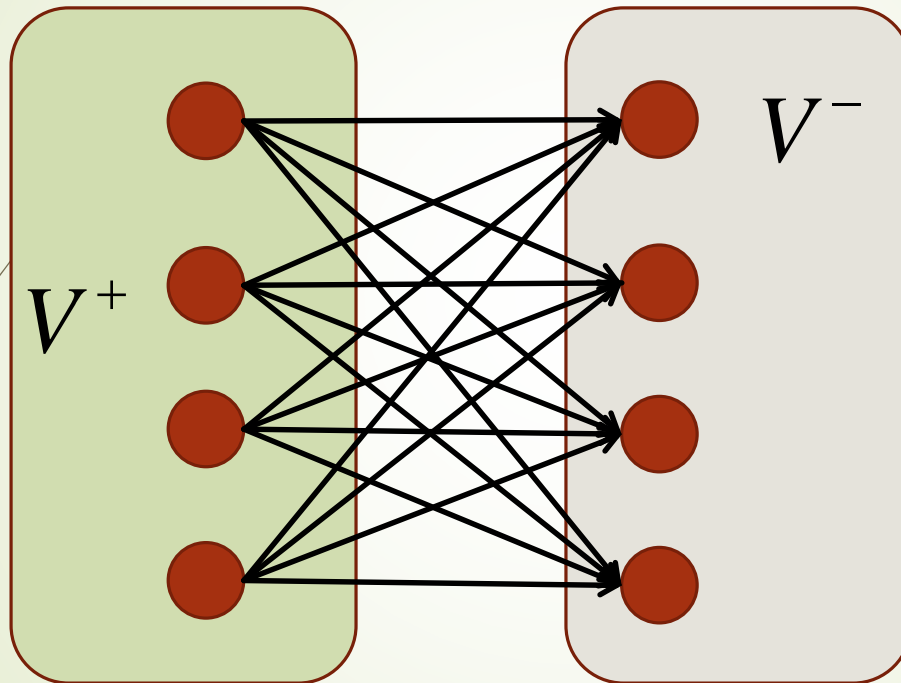
$$\partial^+ a \in V^+ \wedge \partial^- a \in V^-$$



完全二部グラフ (Complete Bipartite Graphs)

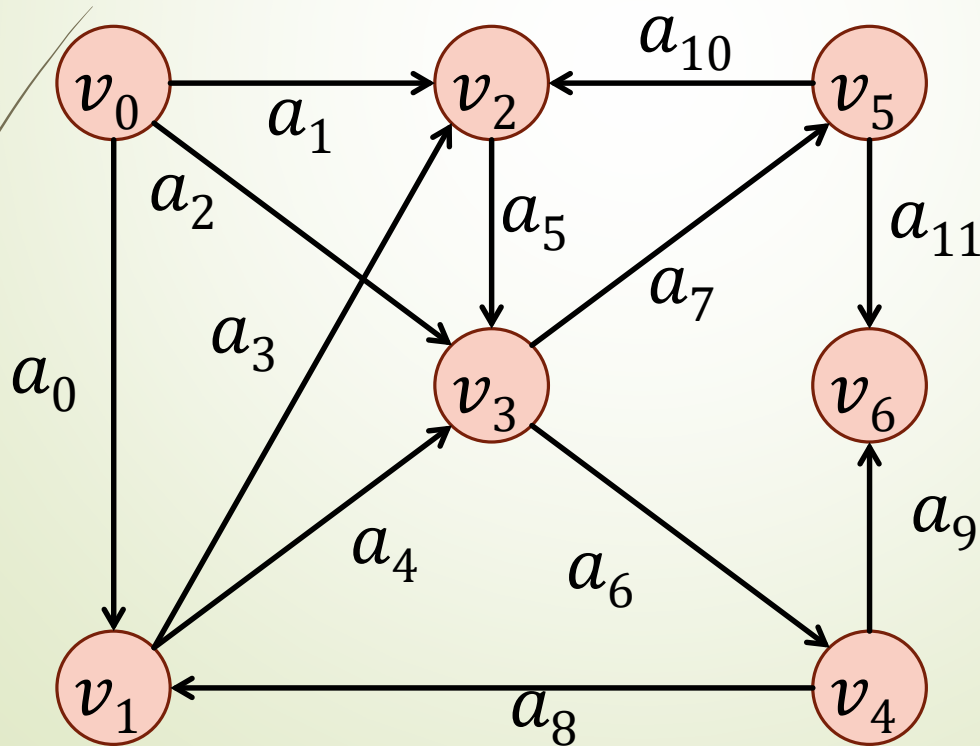


$K_{3,4}$ 任意の頂点の組
に対して辺がある $\{(v, w) \mid v \in V^+, w \in V^-\}$


$$K_{4,4}$$

道 (Paths)

- 始点から終点までの経路を「道」と言う (弧との区別)



v_0 から v_6 への道

$a_0 a_3 a_5 a_7 a_{11}$

$a_0 a_3 a_5 a_6 a_9$

$a_0 a_4 a_7 a_{11}$

$a_0 a_4 a_6 a_9$

$a_1 a_5 a_7 a_{11}$

$a_1 a_5 a_6 a_9$

...

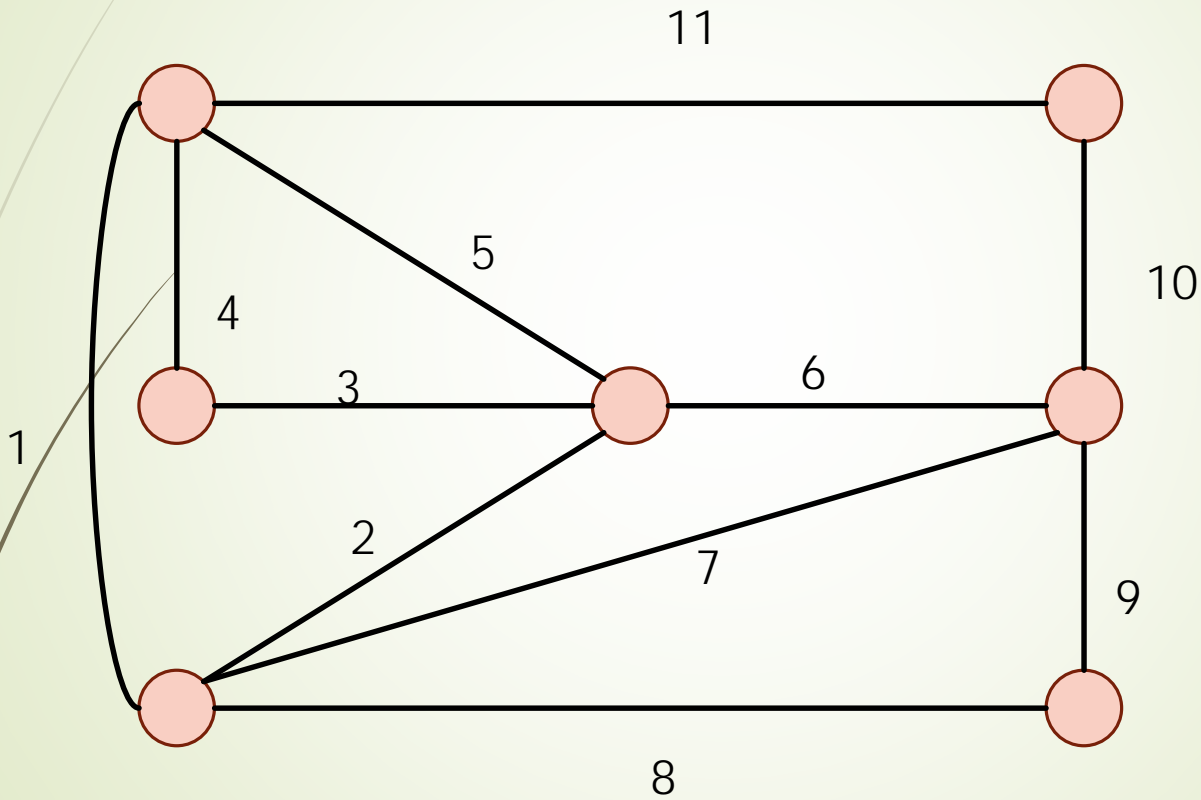
道いろいろ

- ➡ 弧の向きが揃っている場合
 - ➡ 有向道 (directed path)
- ➡ 同じ弧を一度しか通らない道
 - ➡ 単純な道 (simple path)
- ➡ 同じ頂点を一度しか通らない道
 - ➡ 初等的な道 (elementary path)
- ➡ 始点と終点と同じ道
 - ➡ 閉路 (closed path)

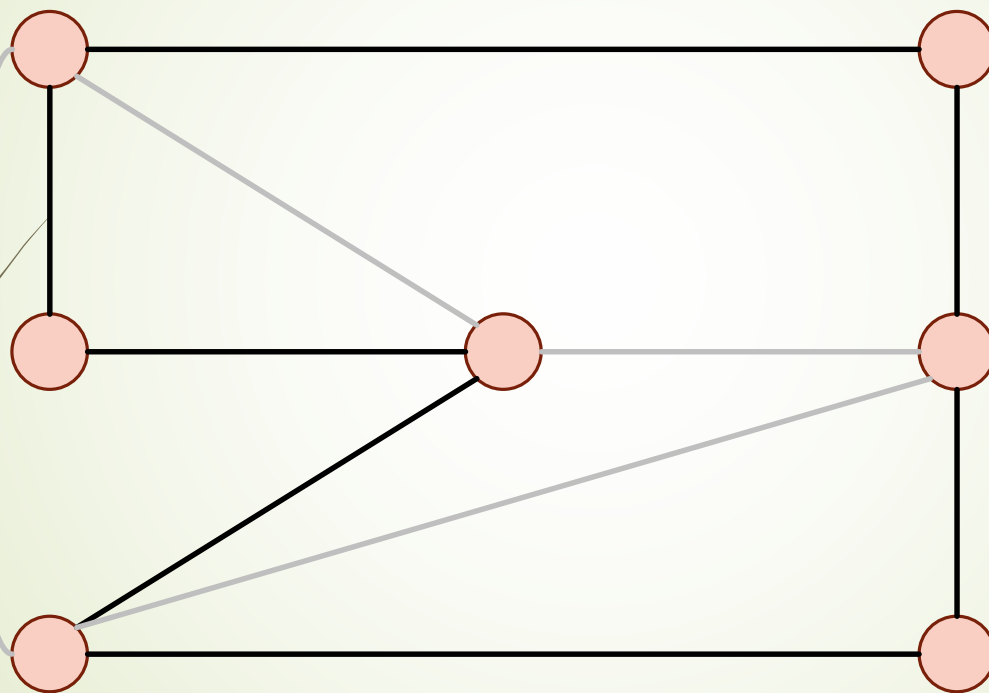
閉路 (Closed path, Circles)

- 始点と終点が同じ道を「閉路」と呼ぶ
- Euler閉路
 - 全ての弧を一度ずつ経由する閉路
 - 一筆書き
- Hamilton閉路
 - 全ての頂点を一度ずつ経由する閉路
- 無閉路グラフ (acyclic graphs)
 - 閉路を含まないグラフ

Euler閉路

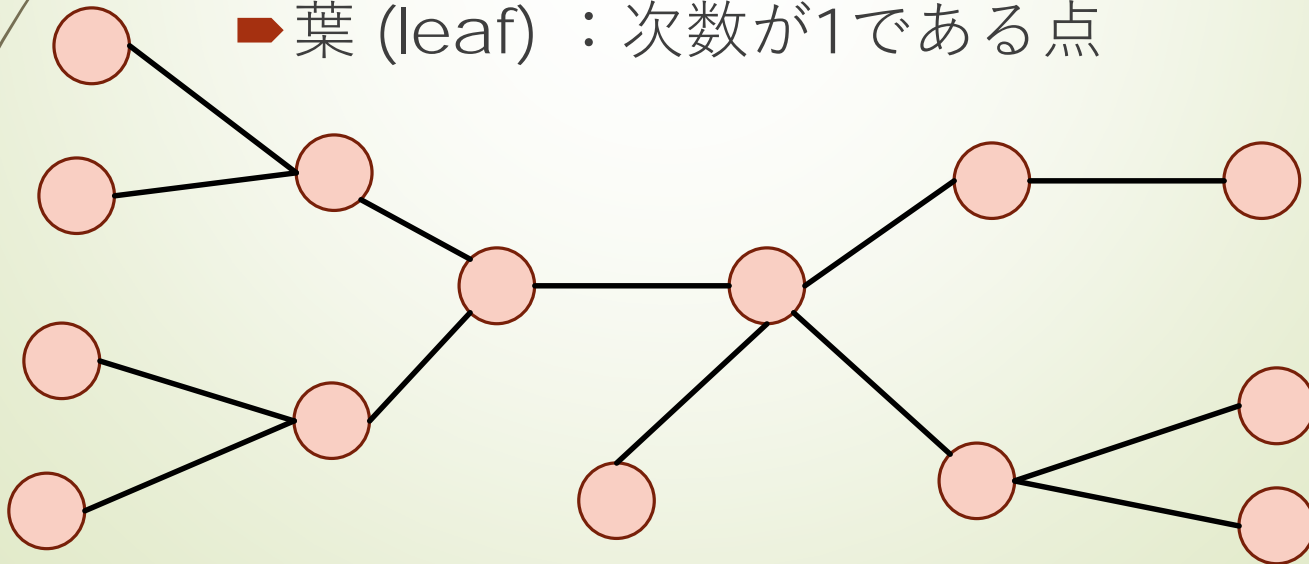


Hamilton閉路



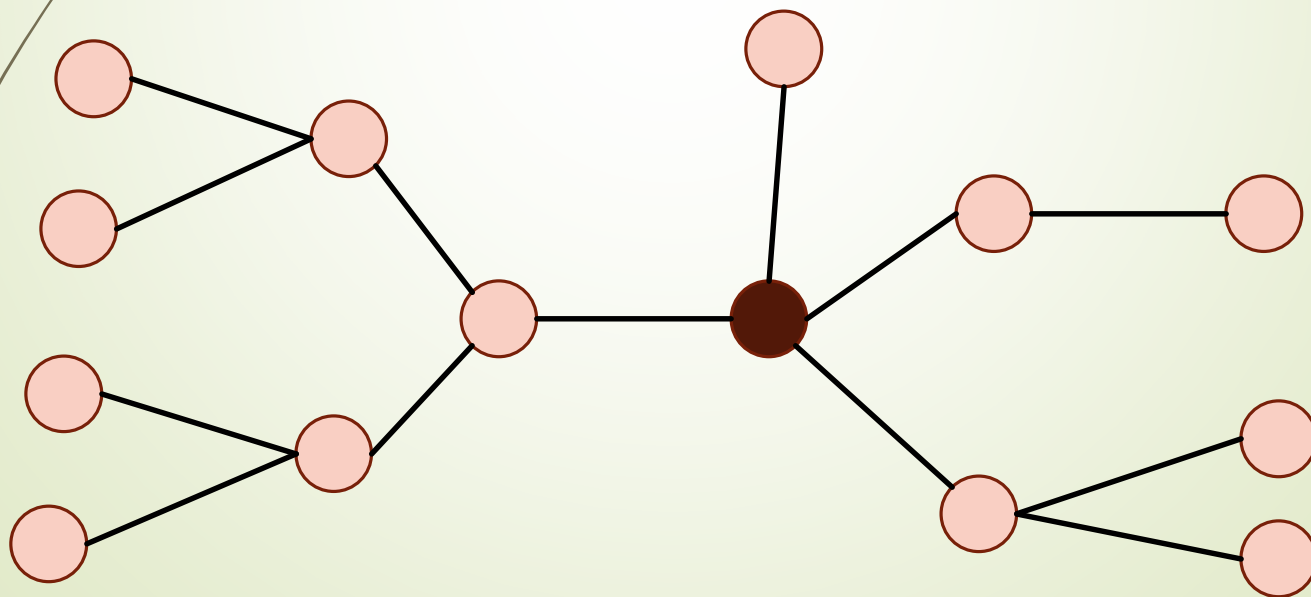
木 (Tree)

- 閉路を含まない連結なグラフ
 - 「木」の形
 - 通常は無向グラフ
 - 葉 (leaf) : 次数が1である点

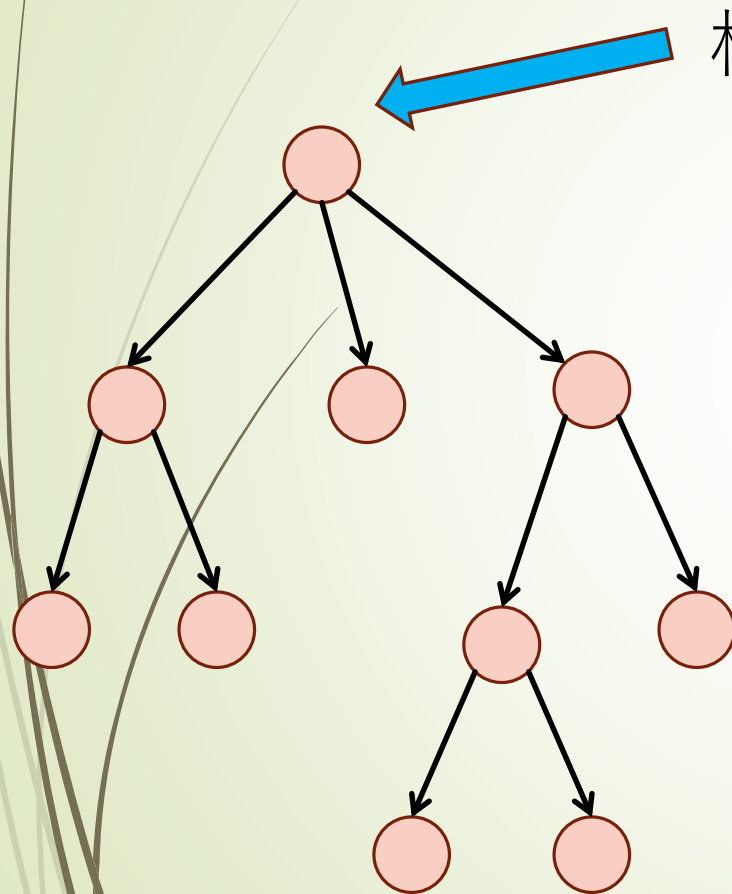


木 (Tree)

- ➡ 無向木では、任意の点を選んで根 (root) とできる



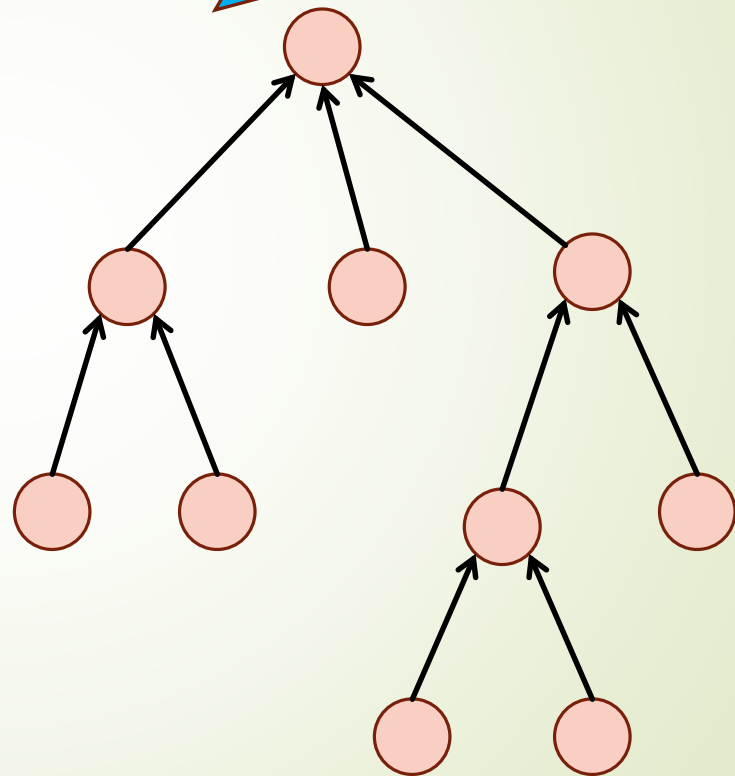
有向木(Directed Tree)



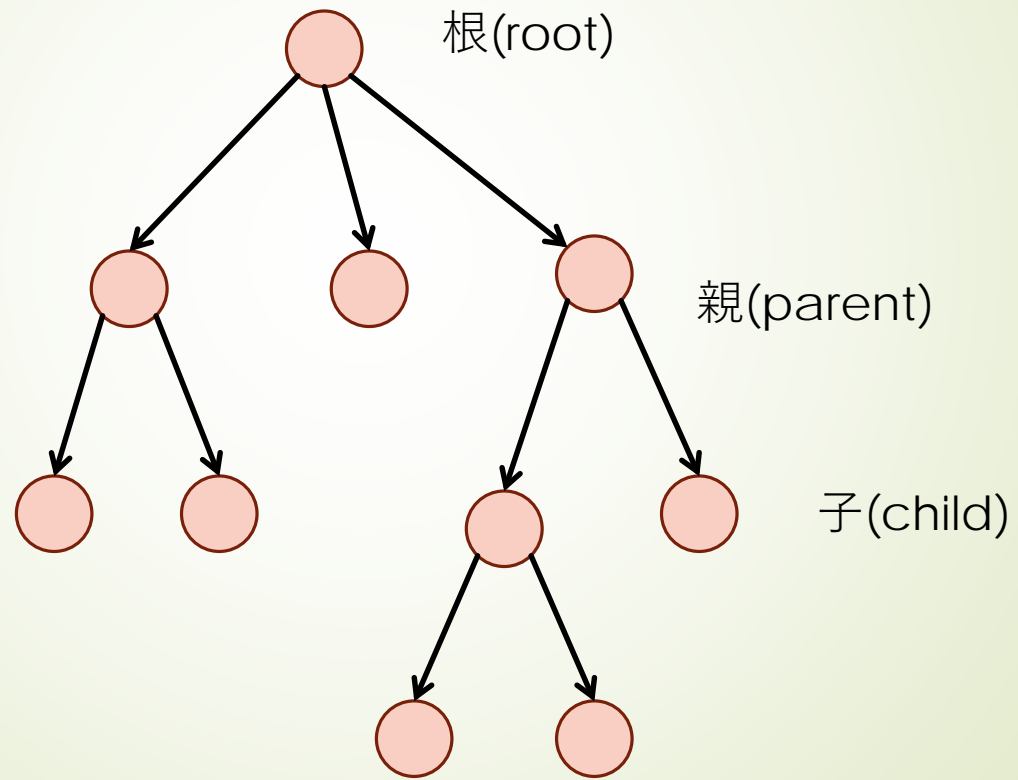
外向木(out-tree)

根(root)

向きが揃っている

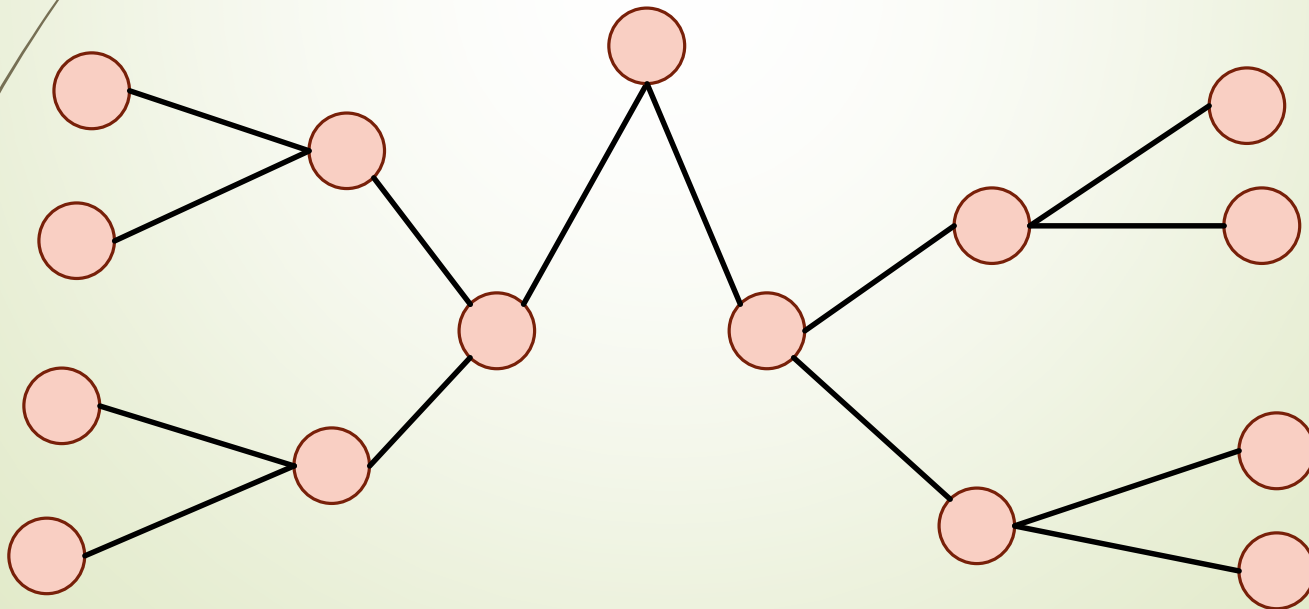


内向木(in-tree)



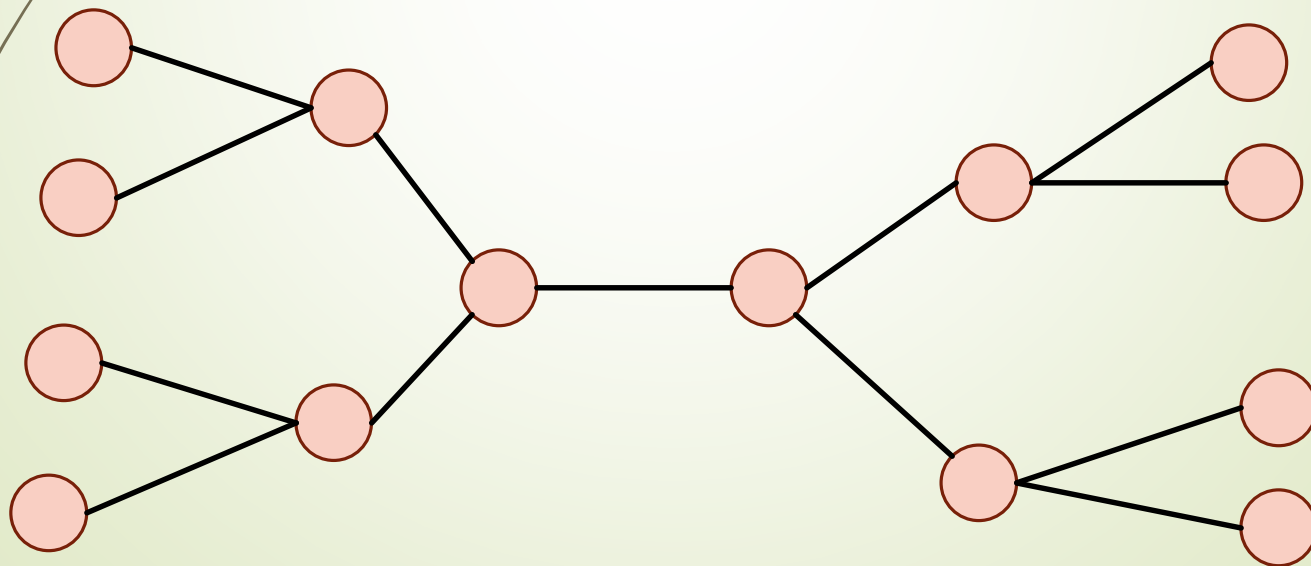
二分木(Binary Tree)

- 葉以外の点が、二個の子を持つ木



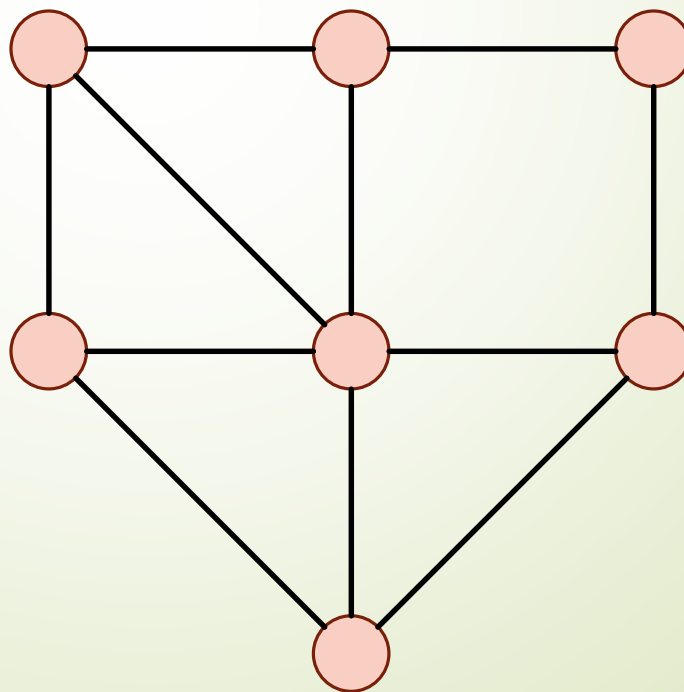
ケーリー木(Cayley tree)

- 葉以外の点の次数が等しい木



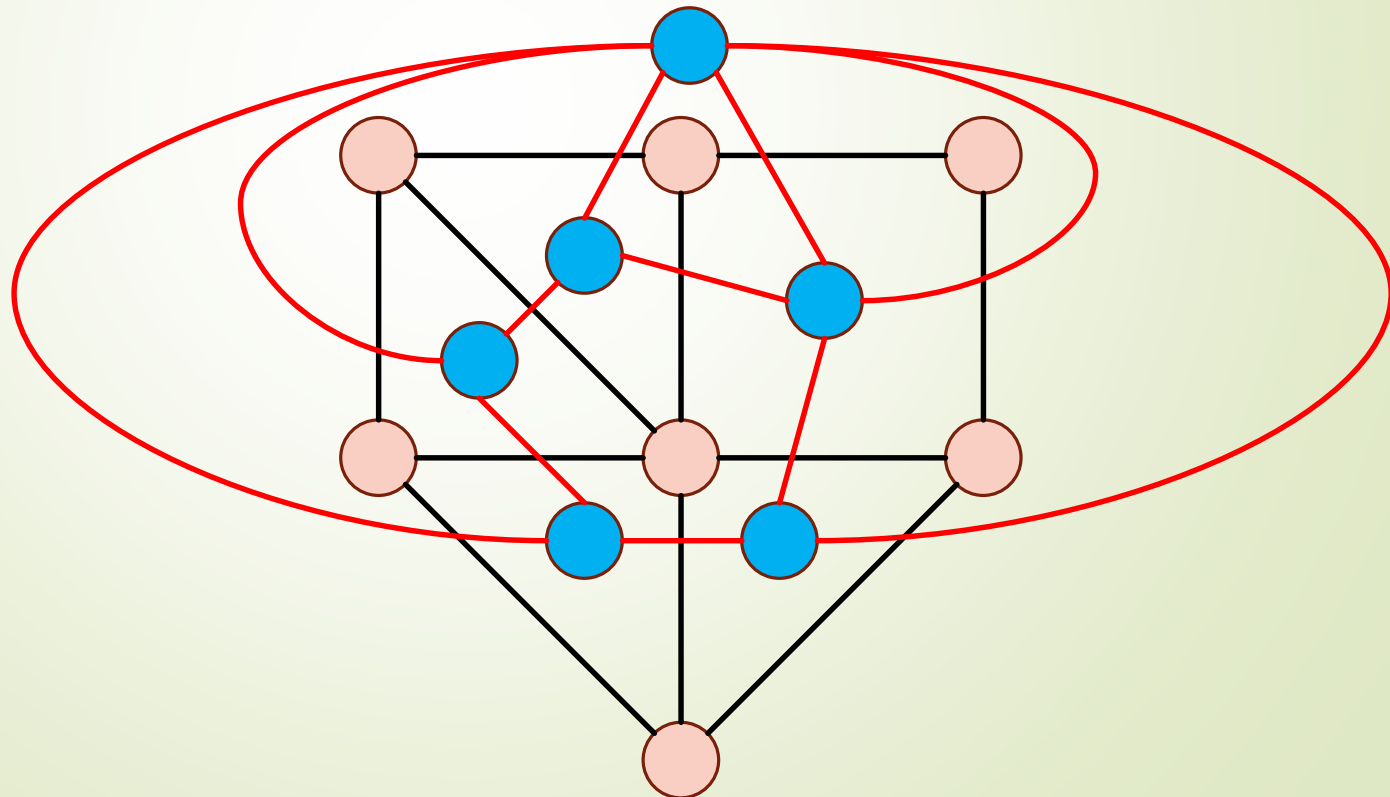
平面グラフ (Planer Graph)

- ▶ 頂点の配置によって、弧が交差しないように描くことができるグラフ



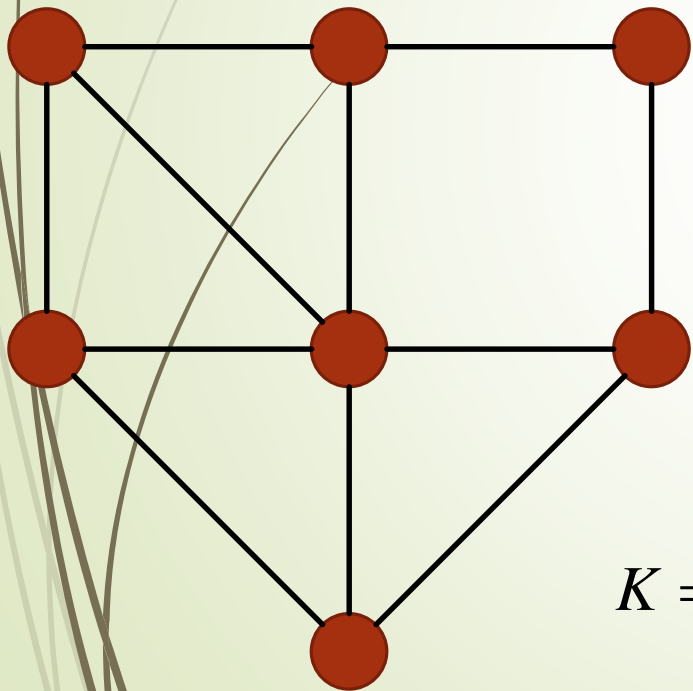
平面グラフの双対グラフ (Dual Graph)

- ▶ 平面グラフの弧で囲まれた面ごとに、一つの頂点を置き、面の境界に対応した弧を持つグラフ

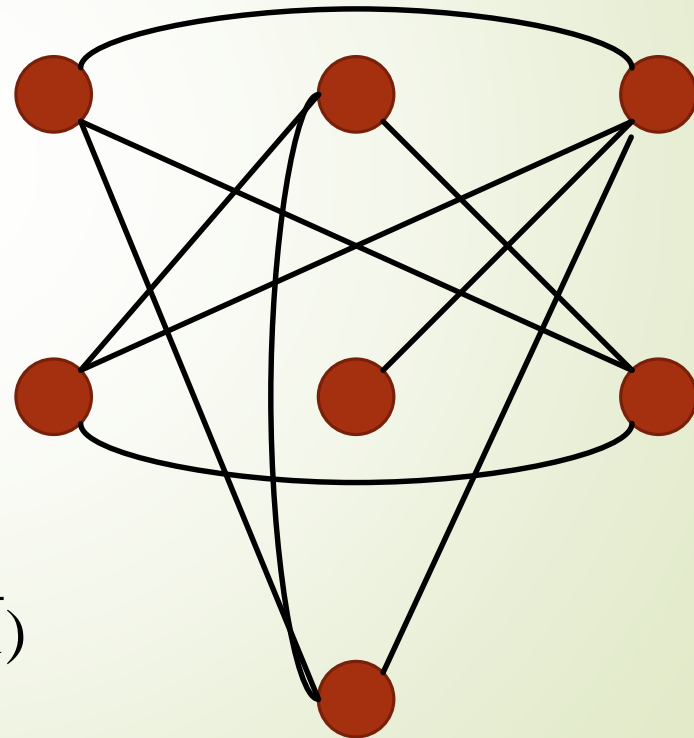


補グラフ (Complement)

$$G = (V, A)$$



$$\bar{G} = (V, \bar{A})$$



$$K = (V, A \cup \bar{A})$$

$$A \cap \bar{A} = \emptyset$$