「グラフと組合せ」試験問題

2011 年度

1 数学的帰納法(20 点)

次の漸化式

$$P(1) = \frac{2}{3} \tag{1.1}$$

$$(k+2)P(k) = (k-1)P(k-1) \quad (k>1) \tag{1.2}$$

を満たす数列 $P(k)$ $(k \geq 1)$ は、以下の(1.3)式で表されることを、数学的帰納法を用いて証明しなさい。

$$P(k) = \frac{4}{(k+2)(k+1)k} \tag{1.3}$$

2 幅優先探索

単純な（孤立弧及び並列弧が無い）有向グラフ $G=(V,A)$ に対する、幅優先探索(Breadth-First Search）のアルゴリズムを以下に示す。ただし、頂点 $v \in V$ を始点とする弧の集合を $\delta^{+}v$、弧 a の終点となる頂点を $\partial^{-}a$ とする記法を用いている。$L \subseteq V$ は既に探索した頂点の集合、Q は、探索すべき頂点の待ち行列とする。探索の始点となる頂点を r とする。

$L=\varnothing$

$Q=[r]$

while($Q \neq \varnothing$){

  $v = Q.poll$ //待ち行列 Q の先頭の取出し

  forall($a \in \delta^{+} v$){

    $w = \partial^{-} a$

    if($w \notin L \wedge w \notin Q$){

      $Q.append(w)$ // w を Q に追加

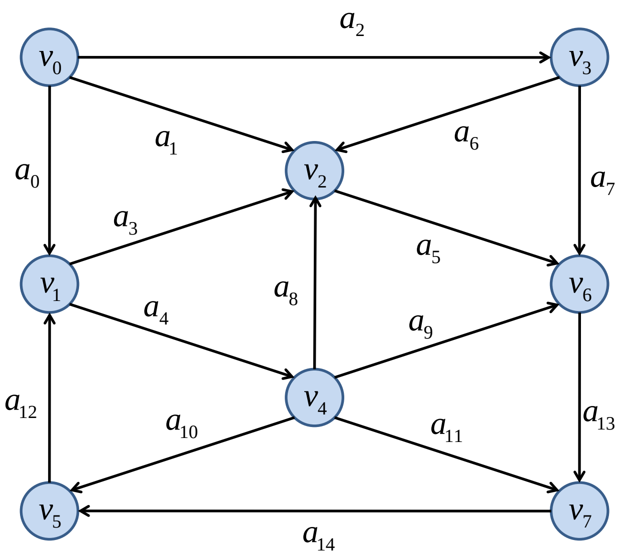
    }

  }

  $L \leftarrow L \cup \{v\}$

}

このアルゴリズムを用いて、下図のグラフを、v_0 を始点として幅優先探索を行う。



A) 探索の途中経過(20 点)

探索の途中経過を、注目している頂点 v、その時のリスト L 及び待ち行列 Q に保存されている頂点として以下のように示しなさい。

注目している頂点 v	リスト L	待ち行列 Q

	$\emptyset$	$[v_0]$
v_0	$\{v_0\}$	$[v_1, v_2, v_3]$
v_1	$\{v_0, v_1\}$	$[v_2, v_3, v_4]$

B)　**極大木(10 点)**

幅優先探索の結果として得られる極大木を示しなさい。

C)　**最短距離(20 点)**

弧に対応した頂点間の距離が全て 1 であると仮定すると、幅優先探索は始点からの最短距離を求める方法となっている。始点からある頂点vへの距離を$\phi(v)$とするとき、幅優先探索によって最短距離を求めることができるように、アルゴリズムを拡張しなさい。

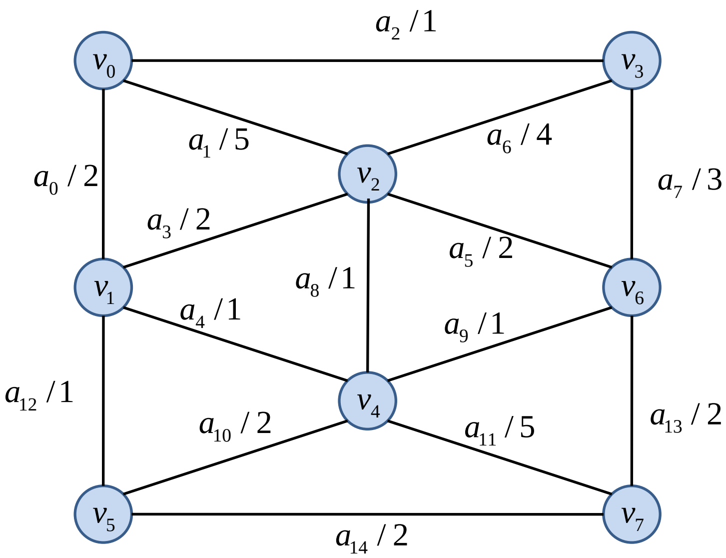
３最小木を求めるJarník-Primアルゴリズム

単純な無向グラフ$G=(V,A)$において、各弧$a \in A$に正の重み$w(a)$が定義されているとする。このとき、ある頂点$v_0 \in V$を起点として、重みの和が最小となる極大木を求める方法の一つが Jarník-Prim アルゴリズムである。

$U \subseteq V$を、最小木の一部となった頂点の集合、$T \subseteq A$を、最小木とする。アルゴリズムは以下のように表される。

```
U = {v_0}
T = ∅
while ( U ≠ V ) {
        UとV \ U を結ぶ弧のうち、最小の重みのものをaとする
        aのV \ U 側の端点をwとする
        U ← U ∪ {w}
        T ← T ∪ {a}
}
```

A)　アルゴリズムの実行(20 点)



上のグラフについて、Jarník-Prim アルゴリズムにより最小木を求める際に、最小木に追加される弧の順序を示しなさい。始点は v_0 とする。図中の弧のラベルの右の数字は重みを表している。

B)　最小木(10 点)

前問で得られた最小木を示しなさい。