

「グラフと組み合わせ」試験問題 -2014年度前期-

2014/8/4

解答例

1 数学的帰納法

自然数 $n \geq 1$ に対する以下の公式を、数学的帰納法を用いて証明しなさい。

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \quad (1)$$

解答例

1. $n = 1$ の場合、左辺は

$$\sum_{k=1}^1 k^2 = 1^2 = 1$$

右辺は

$$\frac{1}{6}1(1+1)(2+1) = 1$$

となり、等式が成り立つ。

2. ある n について、式 (1) が成り立つと仮定する。 $n + 1$ の場合について考える。

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^n k^2 + (n+1)^2 \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2 = \frac{1}{6}(n+1)[n(2n+1) + 6(n+1)] \\ &= \frac{1}{6}(n+1)(2n^2 + 7n + 6) = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2(n+1)+1) \end{aligned}$$

つまり、 $n + 1$ についての式 (1) となっている。以上より、数学的帰納法より、任意の自然数 n について式 (1) が成り立つ。

2 深さ優先探索

有向グラフ $G = (V, A)$ に対する深さ優先探索のアルゴリズムを Algorithm 1 に示す。探索の始点を $v_0 \in V$ とすると、 $\text{search}(v_0, \{v_0\})$ で探索を再帰的に開始する。 $L \subseteq V$ は探索済みの頂点の集合である。

```
search(v, L){
  //v から出る全ての弧
  forall(a ∈ δ+w){
    w = ∂-a; //v の反対側の頂点
    if(w ∉ L){
      L = L ∪ {w}; //L に w を追加
      search(w, L);
    }
  }
  //これ以上進めない
  return;
}
```

Algorithm 1: 深さ優先探索。//はコメント。

2.1 探索の実行

Algorithm 1 の深さ優先探索を図 1 のグラフに対して、 v_0 を始点として行ないなさい。解答として探索済みの頂点集合 L に頂点が加えられる順番を示しなさい。

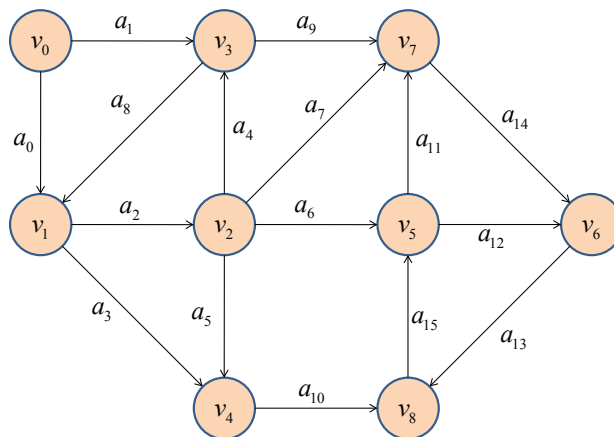
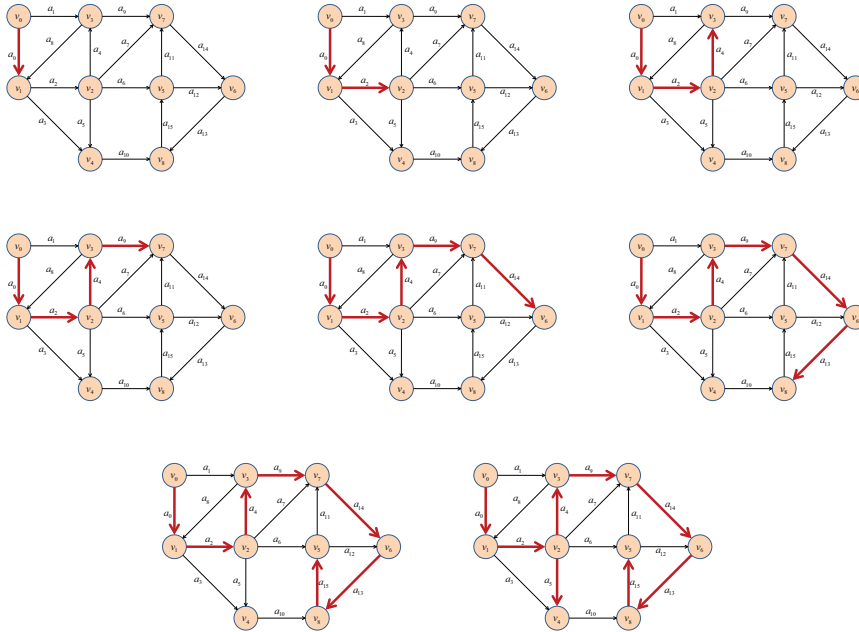


図 1: 深さ優先探索を行う対象グラフ

解答例 L に頂点が追加される順番は次のようになる。

$$v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow v_3 \rightarrow v_7 \rightarrow v_6 \rightarrow v_8 \rightarrow v_5 \rightarrow v_4$$

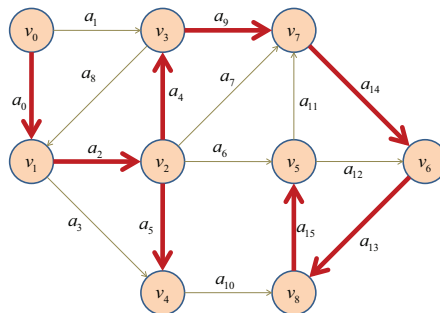
探索の様子を以下に図示する。



2.2 探索の結果

深さ優先探索を実行して得られる極大木を示しなさい。

解答例



3 最小木

無向グラフ $G = (V, A)$ の各弧 $a \in A$ に重み $w : A \rightarrow R$ が定義されているとき、グラフ G のすべての頂点を接続する極大木のうち、重みの総和が最小になる木を最小木と呼ぶ。最小木を求めるアルゴリズムに Jarník-Prim のアルゴリズムがある。

$U \subseteq V$ をすでに極大木 $T \subseteq A$ の一部となった頂点の集合とする。探索の始点を $v_0 \in V$ とし、初期値は $U = \{v_0\}$ 、 $T = \emptyset$ とすると、アルゴリズムは Algorithm 2 と記述できる。

```
while( $U \neq V$ ){  
     $U$  と  $V \setminus U$  を結ぶ弧のうち重み最小のものを  $a$  とする;  
     $a$  の  $V \setminus U$  側の頂点を  $w$  とする;  
     $U = U \cup \{w\}$ ; //  $U$  に  $w$  を追加  
     $T = T \cup \{a\}$ ; //  $T$  に  $a$  を追加  
}
```

Algorithm 2: Jarník-Prim のアルゴリズム。//はコメント。

3.1 最小木を求める

Algorithm 2 を図 2 のグラフに適用し、探索の始点を v_0 として、最小木を求めることを考える。解答として集合 U に頂点が追加される順番を示しなさい。図 2 中の数字は各弧の重みを表す。

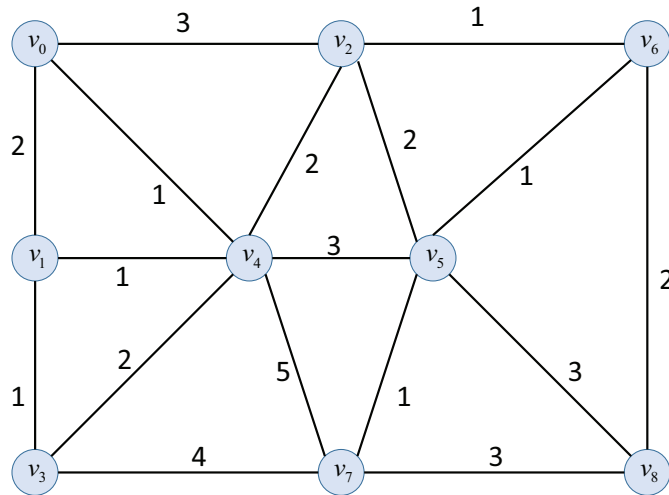
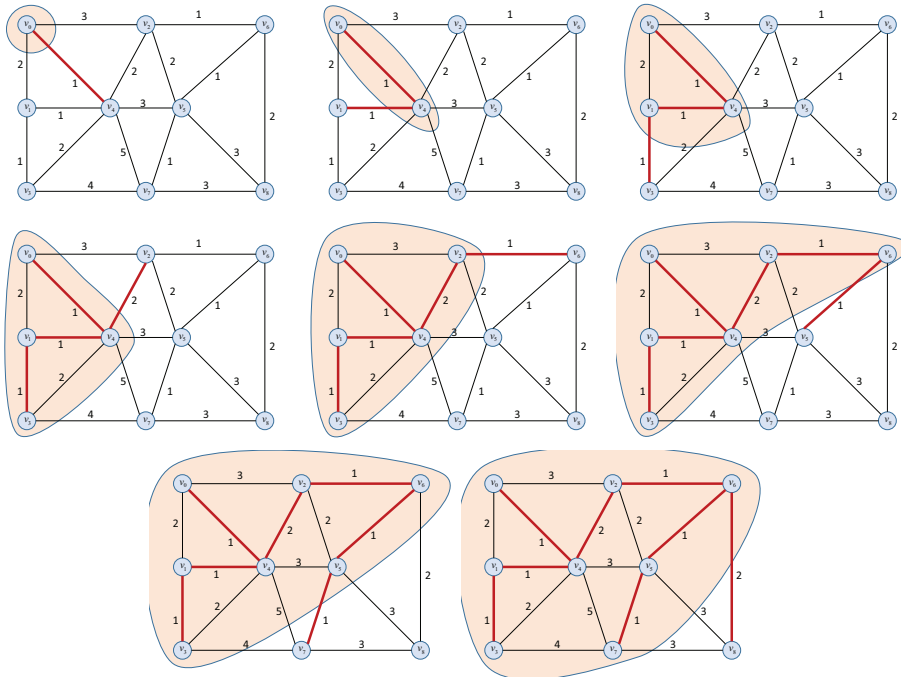


図 2: Algorithm 2 を用いる対象グラフ。数字は各弧の重みを表す。

解答例最小木が生成される様子を下図に示す。頂点の集合を囲む塗りつぶしが、 U に相当する。 U に頂点が追加される順番は以下ようになる。

$$v_0 \rightarrow v_4 \rightarrow v_1 \rightarrow v_3 \rightarrow v_2 \rightarrow v_6 \rightarrow v_5 \rightarrow v_7 \rightarrow v_8$$



3.2 最小木

得られた最小木を示しなさい。

解答例

