「グラフと組合せ」中間試験問題 (解答例)
–2019 年度前期–

2019/6/6

1　数学的基礎

問 1.1　集合の演算【15 点】

二つの集合

$$X = \left\{x \mid x \text{ は 15 以下の素数}\right\} \tag{1.1}$$

$$Y = \left\{y \mid y \text{ は 15 以下の自然数のうち、5 で割り切れないもの}\right\} \tag{1.2}$$

に対して、以下の集合を求め、要素を列挙することで答えなさい。

1. $X \cup Y$
2. $X \cap Y$
3. $Y \setminus X$

解答例　初めにそれぞれの集合の要素を列挙する。

$$X = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$$
$$Y = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14\}$$

1. $X \cup Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14\}$
2. $X \cap Y = \{2, 3, 7, 11, 13\}$
3. $Y \setminus X = \{1, 4, 6, 8, 9, 12, 14\}$

問 1.2　数学的帰納法【15 点】

自然数 $n \geq 1$ に対する以下の公式を、数学的帰納法を用いて証明しなさい。計算途中も適切に記載すること。

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2 = \frac{1}{3}n\left(4n^2-1\right) \tag{1.3}$$

解答例

1. $n=1$ の場合、左辺は

$$\sum_{k=1}^{1} (2k-1)^2 = (2-1)^2 = 1$$

であり、右辺は

$$\frac{1}{3} \times 1 \times (4-1) = 1$$

となり、等式が成り立つ。

2. ある n に対して式 (1.3) が成り立つと仮定する。$n+1$ の場合を考える。

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} (2k-1)^2 &= \sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2 + (2(n+1)-1)^2 \\
&= \frac{1}{3}n\left(4n^2-1\right) + (2(n+1)-1)^2 \\
&= \frac{1}{3}(2(n+1)-1)\left(2n^2+5n+3\right) \\
&= \frac{1}{3}(n+1)(2(n+1)-1)(2(n+1)+1) \\
&= \frac{1}{3}(n+1)\left(4(n+1)^2-1\right)
\end{aligned}$$

つまり、$n+1$ に対する式 (1.3) となっている。数学的帰納法より、任意の $n \in N$ に対して式 (1.3) が成り立つ。

2　グラフの記述

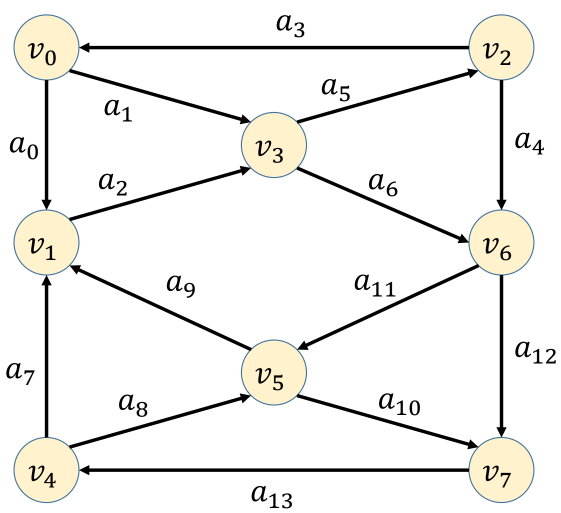
問 2.1　記号によるグラフの表記【30 点】

以下によって表現される有向グラフ $G = (V, A)$ を図示しなさい。

$$V = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$$
$$A = \{a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12}, a_{13}\}$$

$$\begin{array}{cccc}
\partial^+ a_0 = v_0, & \partial^- a_0 = v_1, & \partial^+ a_1 = v_0, & \partial^- a_1 = v_3, \\
\partial^+ a_2 = v_1, & \partial^- a_2 = v_3, & \partial^+ a_3 = v_2, & \partial^- a_3 = v_0, \\
\partial^+ a_4 = v_2, & \partial^- a_4 = v_6, & \partial^+ a_5 = v_3, & \partial^- a_5 = v_2, \\
\partial^+ a_6 = v_3, & \partial^- a_6 = v_6, & \partial^+ a_7 = v_4, & \partial^- a_7 = v_1, \\
\partial^+ a_8 = v_4, & \partial^- a_8 = v_5, & \partial^+ a_9 = v_5, & \partial^- a_9 = v_1, \\
\partial^+ a_{10} = v_5, & \partial^- a_{10} = v_7, & \partial^+ a_{11} = v_6, & \partial^- a_{11} = v_5, \\
\partial^+ a_{12} = v_6, & \partial^- a_{12} = v_7, & \partial^+ a_{13} = v_7, & \partial^- a_{13} = v_4
\end{array}$$

解答例



3　深さ優先探索

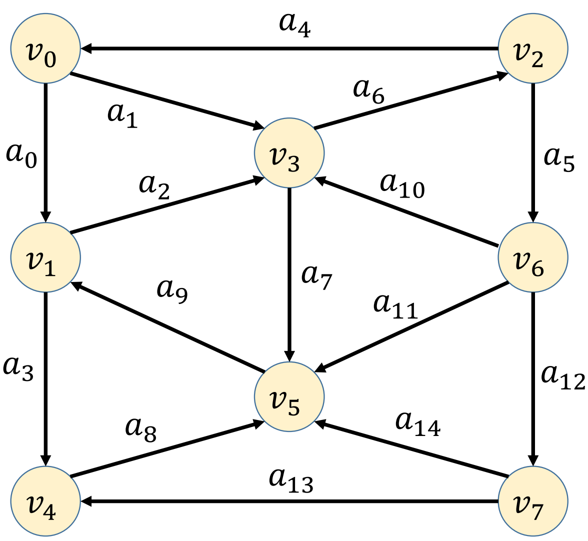


図 1　有向グラフ $G = (V, A)$

グラフ (図 1) に対して、深さ優先探索を行う。始点を v_0、既に通過した頂点のリスト L とし、Algorithm 1 を実行する。ただし、2 行目の `for` ループは、弧の番号の小さい順に実行することとする。

Algorithm 1 深さ優先探索

1: **procedure** SEARCH(v,L)　　▷ v は注目する頂点、L は経由した頂点のリスト
2: 　**for all** $a \in \delta^+ v$ **do**　　▷ v を始点とする全ての弧
3: 　　$w = \partial^- a$　　▷ v の反対側の頂点
4: 　　**if** $w \notin L$ **then**
5: 　　　L.append(w)
6: 　　　SEARCH(w,L)　　▷ 再帰
7: 　　**end if**
8: 　**end for**
9: **end procedure**

問 3.1　L へ追加される順序【10 点】

頂点が L へ追加される順序を示しなさい。

解答例

$$v_0 \to v_1 \to v_3 \to v_2 \to v_6 \to v_5 \to v_7 \to v_4$$

問 3.2　探索木【30 点】

深さ優先探索によって得られる探索木、つまり始点から各頂点への経路に使われる弧のみを残したグラフを示しなさい。

解答例