「グラフと組合せ」中間レポート (解答例)

–2020 年度前期–

締切:2020/6/13

1　数学的基礎

問 1　集合の演算

二つの集合

$$X = \{x \mid x \text{ は } 15 \text{ 以下の素数}\} \tag{1.1}$$

$$Y = \{y \mid y \text{ は } 15 \text{ 以下の自然数のうち、} 4 \text{ で割り切れないもの}\} \tag{1.2}$$

に対して、以下の集合を求め、要素を列挙することで答えなさい。

1. $X \cup Y$
2. $X \cap Y$
3. $Y \setminus X$

解答例　初めにそれぞれの集合の要素を列挙する。

$$X = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$$
$$Y = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 13, 14, 15\}$$

1. $X \cup Y = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 11, 13, 14, 15\}$
2. $X \cap Y = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$
3. $Y \setminus X = \{1, 6, 9, 10, 14, 15\}$

問 2　数学的帰納法

自然数 $n \geq 1$ に対する以下の公式を、数学的帰納法を用いて証明しなさい。計算途中も適切に記載すること。

$$\sum_{k=1}^{n} kx^k = \frac{x\left(1 - x^n\right)}{\left(1 - x\right)^2} - n\frac{x^{n+1}}{1 - x} \tag{1.3}$$

解答例

1. $n=1$ の場合、左辺は

$$\sum_{k=1}^{1} kx^k = x$$

であり、右辺は

$$\frac{x\left(1-x\right)}{\left(1-x\right)^2} - \frac{x^2}{1-x} = \frac{x-x^2}{1-x} = x$$

となり、等式が成り立つ。

2. ある n に対して式 (1.3) が成り立つと仮定する。$n+1$ の場合を考える。

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} kx^k &= \sum_{k=1}^{n} kx^k + \left(n+1\right)x^{n+1} \\
&= \frac{x\left(1-x^n\right)}{\left(1-x\right)^2} - n\frac{x^{n+1}}{1-x} + \left(n+1\right)x^{n+1} \\
&= \frac{x\left(1-x^{n+1}\right)}{\left(1-x\right)^2} + \frac{x^{n+2}-x^{n+1}}{\left(1-x\right)^2} \\
&\quad - \frac{1}{1-x}\left[nx^{n+1} - \left(n+1\right)x^{n+1} + \left(n+1\right)x^{n+2}\right] \\
&= \frac{x\left(1-x^{n+1}\right)}{\left(1-x\right)^2} - \frac{x^{n+1}}{1-x} - \frac{1}{1-x}\left[-x^{n+1} + \left(n+1\right)x^{n+2}\right] \\
&= \frac{x\left(1-x^{n+1}\right)}{\left(1-x\right)^2} - \left(n+1\right)\frac{x^{n+2}}{1-x}
\end{aligned}$$

つまり、$n+1$ に対する式 (1.3) となっている。数学的帰納法より、任意の $n \in N$ に対して式 (1.3) が成り立つ。

2　グラフの記述

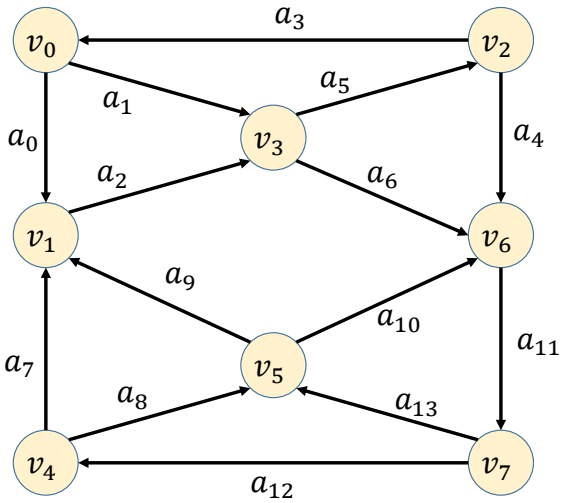
問 3　記号によるグラフの表記

以下によって表現される有向グラフ $G=(V,A)$ を図示しなさい。

$$\begin{aligned}
V &= \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\} \\
A &= \{a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12}, a_{13}\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{array}{llll}
\partial^+ a_0 = v_0, & \partial^- a_0 = v_1, & \partial^+ a_1 = v_0, & \partial^- a_1 = v_3, \\
\partial^+ a_2 = v_1, & \partial^- a_2 = v_3, & \partial^+ a_3 = v_2, & \partial^- a_3 = v_0, \\
\partial^+ a_4 = v_2, & \partial^- a_4 = v_6, & \partial^+ a_5 = v_3, & \partial^- a_5 = v_2, \\
\partial^+ a_6 = v_3, & \partial^- a_6 = v_6, & \partial^+ a_7 = v_4, & \partial^- a_7 = v_1, \\
\partial^+ a_8 = v_4, & \partial^- a_8 = v_5, & \partial^+ a_9 = v_5, & \partial^- a_9 = v_1, \\
\partial^+ a_{10} = v_5, & \partial^- a_{10} = v_6, & \partial^+ a_{11} = v_6, & \partial^- a_{11} = v_7, \\
\partial^+ a_{12} = v_7, & \partial^- a_{12} = v_4, & \partial^+ a_{13} = v_7, & \partial^- a_{13} = v_5
\end{array}
$$

解答例



3　深さ優先探索

グラフ (図 1) に対して、深さ優先探索を行う。始点を v_0、既に通過した頂点のリスト L とし、Algorithm 1 を実行する。ただし、2 行目の `for` ループは、弧の番号の小さい順に実行することとする。

問 4　L へ追加される順序

頂点が L へ追加される順序を示しなさい。

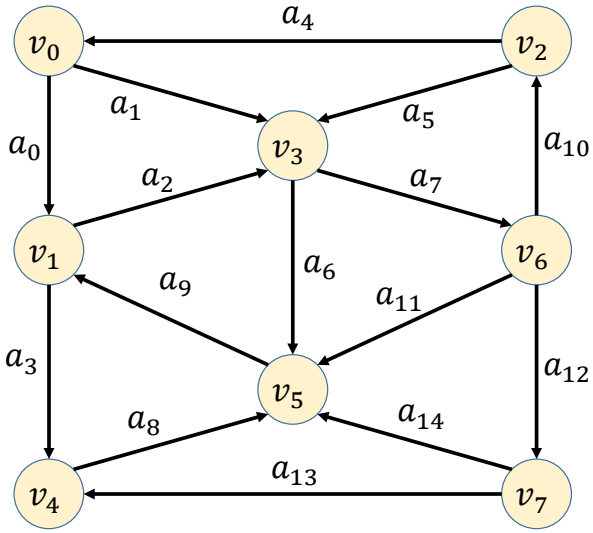


図 1　有向グラフ $G = (V, A)$

Algorithm 1 深さ優先探索

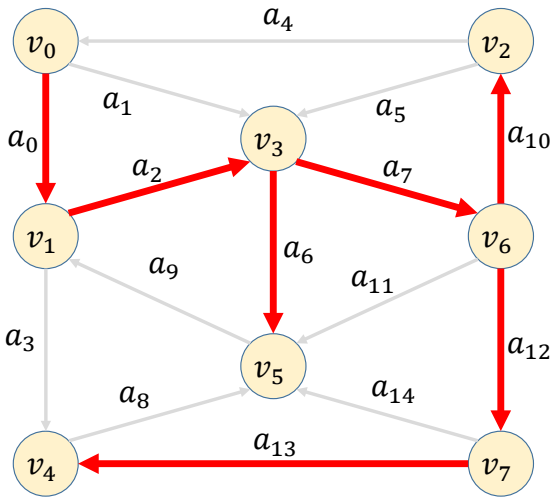
```
1: procedure SEARCH(v,L)          ▷ v は注目する頂点、L は経由した頂点のリスト
2:     for all a ∈ δ⁺v do          ▷ v を始点とする全ての弧
3:         w = ∂⁻a                 ▷ v の反対側の頂点
4:         if w ∉ L then
5:             L.append(w)
6:             SEARCH(w,L)         ▷ 再帰
7:         end if
8:     end for
9: end procedure
```

解答例

$$v_0 \to v_1 \to v_3 \to v_5 \to v_6 \to v_2 \to v_7 \to v_4$$

問 5　探索木

深さ優先探索によって得られる探索木、つまり始点から各頂点への経路に使われる弧のみ

を残したグラフを示しなさい。

解答例