暗号の仕組み

情報科学の世界 2
2023 年度前期
佐賀大学理工学部 只木進一

atbash 暗号: 旧約聖書

- 人類が秘密を持つようになって以来、暗号が出現
- 宗教団体が弾圧を逃れるために、重要情報を暗号化
- 旧約聖書: 紀元前 5 世紀
  - 重要な都市名のアルファベットを置き換え

スパルタの暗号: scytale 暗号

- 戦争の際にも暗号が必要
  - 前線に作戦を指令
  - 前線の状況を司令部に報告
  - 文書を持った兵士が走る・乗馬
- scytale 暗号: 紀元前 5 世紀
- 皮に書いた文字を円筒に巻き付ける
- 数文字毎に読み解く

https://ja.wikipedia.org/wiki/%E3%82%B9%E3%82%AD%E3%83%A5%E3%82%BF%E3%83%AC%E3%83%BC

Caesar の暗号

- 紀元前 1 世紀
- アルファベットの先頭から鍵の文字列に置き換える
- 残りは、鍵の終端の後ろに残ったアルファベットを順番に対応させる
- 例: 鍵 JULISCAER

a	b	c	d	e	f	g	h	I	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z
J	u	l	I	s	c	a	e	r	t	v	w	x	y	z	b	d	f	g	h	k	m	n	o	p	q

上杉暗号: 16 世紀

- いろはを数字にコード化

	七	六	五	四	三	二	一
一	ゑ	あ	や	ら	よ	ち	い
二	ひ	さ	ま	む	た	り	ろ
三	も	き	け	う	れ	ぬ	は
四	せ	ゆ	ふ	ゐ	そ	る	に
五	す	め	こ	の	つ	を	ほ
六	ん	み	え	お	ね	わ	へ
七	nan	し	て	く	な	か	と

近代以前の暗号の弱点

- 文字の置き換えが固定
- 文字の出現頻度から推測できる
  - 英語で一文字の単語: "a" と"I"
  - 二文字単語が推測できる: "an"、"in"、"if"
  - いまでは、単語の出現頻度も知られている

第二次世界大戦中の暗号

- Bombe (1939)
  https://www.cryptomuseum.com/crypto/bombe/
- COLOSSUS (1943)
  http://www.cryptomuseum.com/crypto/colossus/

暗号方式と暗号鍵

- 暗号の方式
  - どういう方法で文字を置き換えるのか
- 暗号の鍵
  - 何文字ずらす
  - 何文字置きに読む

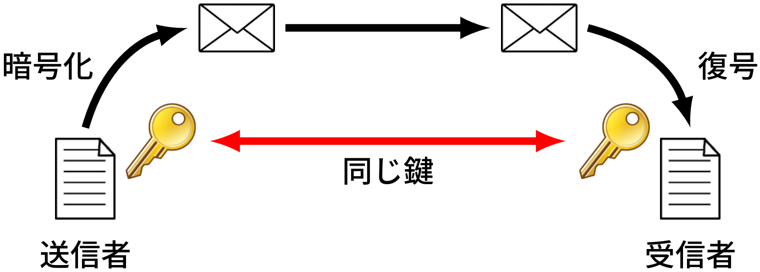
基本的用語

- **符号化、暗号化**: Encode, Encipher, Encrypt
  - 平文テキスト (plain text) を暗号テキスト (cipher text) にする
- **復号化**: Decode, Decipher, Decrypt
  - 暗号テキストを平文テキストに戻す

cipher /'saɪfə(r)/ a secret way of writing, especially one in which a set of letters or symbols is used to represent others.

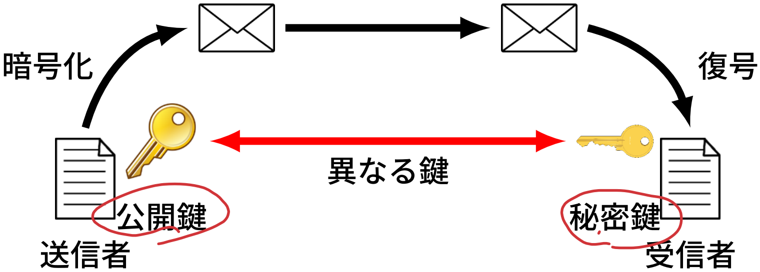
鍵の共有方法: 共通鍵方式/共有鍵方式

- 鍵を送信者と受信者が共有する方法
  - 符号化と復号化で同じ鍵
  - どうやって鍵を送る？



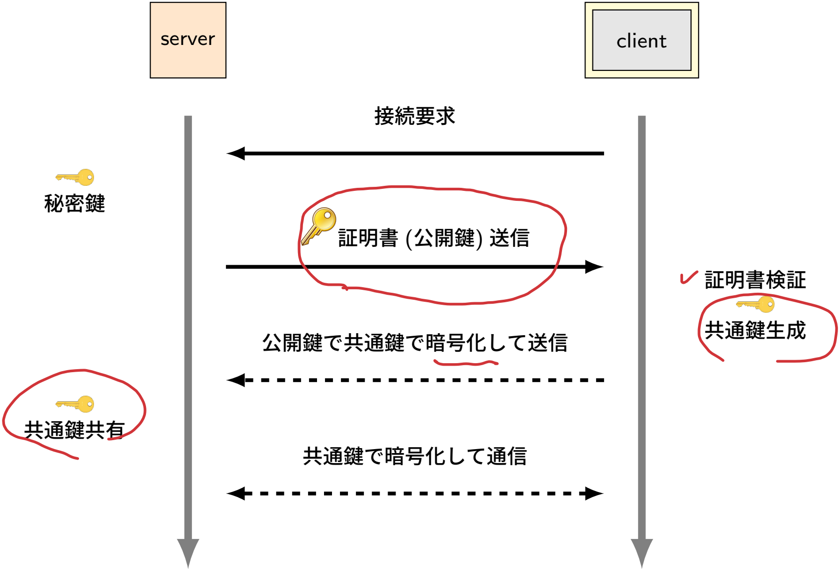
鍵の共有方法: 公開鍵方式

- 鍵が送信者と受信者で異なる方法
  - 符号化と復号化が異なる鍵
  - 一方向にしか送れない



SSL: Secure Socket Layer

- HTTPS で利用している暗号化方式
    - 現在は TLS (Transport Layer Security) を使用
- 公開鍵と共通鍵を併用
- Web の証明書提示


server
client
接続要求
秘密鍵
証明書 (公開鍵) 送信
証明書検証
共通鍵生成
公開鍵で共通鍵で暗号化して送信
共通鍵共有
共通鍵で暗号化して通信

復号できない暗号: パスワード

- ユーザが入力したものを符号化し、保存しているものと比較
- 攻撃手法
  - ユーザ名、名前、生年月日、英単語などをヒントに
  - 総当たり

RSA (Riverst-Shamir-Adleman) 暗号

- 整数論という数学の応用
- 因数分解が困難であることに基づく
- 公開鍵暗号に利用される
- James H. Ellis (1969) 及び Clifford Cocks (1973) が理論的基礎を発見したが、長く秘密にされていた
- 1977 年に RSA が公表。

整数の合同: Congruence

- 二つの整数 a と b が合同: ある整数 m で除した余りが等しい
  - a と b は法 m について合同: $a \equiv b \pmod{m}$
- 例: $m = 5$

$$
\begin{aligned}
7 &\equiv 2 \pmod{5} \\
8 &\equiv 3 \pmod{5} \\
11 &\equiv 1 \pmod{5} \\
3 &\equiv 3 \pmod{5}
\end{aligned}
$$

整数の合同: Congruence

- $a \equiv a' \pmod{m}$ かつ $b \equiv b' \pmod{m}$ ならば
  $ab \equiv a'b' \pmod{m}$

$$
\begin{aligned}
a &= n_a m + a' \\
b &= n_b m + b' \\
ab &= (n_a m + a')(n_b m + b') \\
&= (n_a n_b m + n_a b' + n_b a') m + a'b'
\end{aligned}
$$

- 例: $m = 7$

$$
\begin{aligned}
8 &\equiv 1 \pmod{7} \\
10 &\equiv 3 \pmod{7} \\
8 \times 10 = 80 &= 7 \times 11 + 3 \\
&\equiv 3 \pmod{7}
\end{aligned}
$$

Fermat の小定理

$x^n + y^n = z^n$

- p を素数、整数 $1 < a < p$ とする:$a \not\equiv 0 \pmod{p}$
- このとき: $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$
- 例を示す: $p = 11$、$a = 3$

$ab = a'b' \bmod \sim$

$$
\begin{aligned}
3^2 &\equiv 9 \pmod{p} \\
3^4 &\equiv 81 \pmod{p} \equiv 4 \pmod{p} \\
3^8 &\equiv 16 \pmod{p} \equiv 5 \pmod{p} \\
3^{10} &\equiv \left(3^2 \times 3^8\right) \pmod{p} \equiv \underline{45} \pmod{p} \\
&\equiv 1 \pmod{p}
\end{aligned}
$$

$10 = 8 + 2$

- mod p のみに注目し、演算を簡素化

Fermat の小定理: 応用

- p と q を素数、a を pq と互いに素とする
- このとき:$a^{(p-1)(q-1)} \equiv 1 \pmod{pq}$
- 例: $p = 5$、$q = 7$、$a = 11$

$$
\begin{aligned}
11^2 &\equiv 121 \pmod{35} \equiv 16 \pmod{35} \\
11^4 &\equiv 256 \pmod{35} \equiv 11 \pmod{35} \\
11^8 &\equiv 16 \pmod{35} \\
11^{16} &\equiv 256 \pmod{35} \equiv 11 \pmod{35} \\
11^{4\times6} &= 11^{16+8} \equiv \ (11 \times 16) \pmod{15} \\
&\equiv 1 \pmod{35}
\end{aligned}
$$

秘密鍵と公開鍵

- 受信者
  - 二つの大きな素数 p と q を生成し、秘密鍵とする。
  - $m = pq$
  - $\phi(m)$: m と互いに素である 1 以上 m 以下の自然数。今は $(p-1)(q-1)$
  - k: $\phi(m)$ と互いに素である適当な自然数
- m と k を公開鍵とする
  - m を因数分解して p と q を得ることが難しい

送信者によるメッセージ暗号化

- m は L ビットであるとする
- メッセージ M を $L-1$ ビット毎の語に区切る

$$M = a_0 a_1 \cdots a_n$$

- 各語を変換

$$b_i \equiv a_i^k \pmod{m}$$
$$M' = b_0 b_1 \cdots b_n$$

- M' を送信

受信者による復号

- $kv - \phi(m)u = 1$ の適当な解 (u, v) を得る

$$
\begin{aligned}
b_i^v &\equiv a_i^{kv} \pmod{m} \equiv a_i^{1+\phi(m)u} \pmod{m} \\
&\equiv (a_i \pmod{m}) \left(a_i^{\phi}(m) \pmod{m}\right)^u \\
&\equiv (a_i \pmod{m}) (1 \pmod{m})^u \\
&\equiv a_i \pmod{m}
\end{aligned}
$$

- 復号完了

例

- **秘密鍵**: $p = 13,\ q = 11,\ \phi(m) = 120$
- **公開鍵**: $m = 143,\ k = 7$
- m は 8 ビット
  - 7 ビット毎の語に分離
- $kv - \phi(m)u = 1$ の解 $(u, v) = (6, 103)$

逆方向の符号化

- 秘密鍵を使って符号化

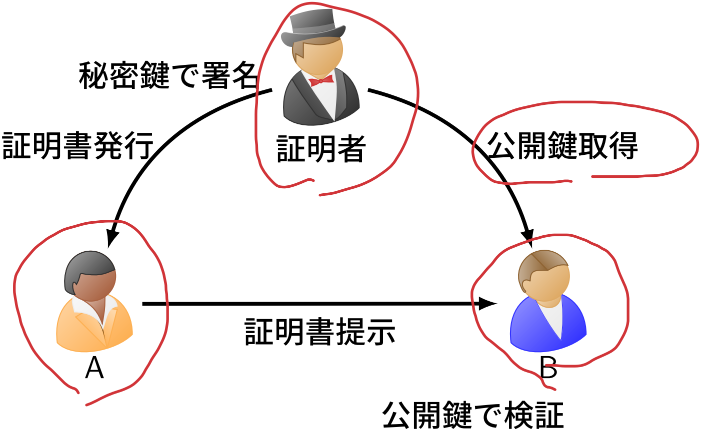
$$b_i \equiv a_i^v \pmod{m}$$

- 公開鍵を使って復号

$$\begin{aligned} b_i^k &\equiv a_i^{kv} \pmod{m} \\ &\equiv a_i^{1+\phi(m)u} \pmod{m} \\ &\equiv \left(a_i \pmod{m}\right)\left(a_i^{\phi}(m) \pmod{m}\right)^u \\ &\equiv \left(a_i \pmod{m}\right)\left(1 \pmod{m}\right)^u \\ &\equiv a_i \pmod{m} \end{aligned}$$

- 公開鍵で復号できるため、暗号にはならない!

デジタル証明書



数学的裏付けのある暗号

- 確実に符号化・復号化ができる
  - 数学的に保証されている
- 方式は公開／鍵は非公開
- 素数への因数分解が困難
  - 今のところ高速なアルゴリズムなし
- コンピュータの高速化によって、長い鍵が必要になっている

課題

https ではWeb サーバの証明書をブラウザが受信します。その証明書の真正性はどのように担保されているのでしょうか。