# 情報と物理：
# 調和振動子
# Harmonic Oscillators

只木進一

2013年後期

# フックの法則と運動方程式

- フックの法則(Hooke’s Law)
  - 力が変位（伸び、縮み）に比例する
    - 例：バネ、ゴム
- 運動方程式：一次元
  - 右辺の力にも、未知関数$x(t)$が含まれている

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -kx$$

- 残念ながら、微分方程式に解を与える一般的方法は存在しない。

- フックの法則の場合の着目点
  - 左辺で$x$を二階微分すると、右辺の$-x$に比例する
  - このような性質の関数は？
    - 三角関数

# 三角関数で解を構成してみる

- $x(t) = a\sin\omega t$　とおくと

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -a\omega^2 \sin\omega t = -\omega^2 x$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

- 同様に $x(t) = b\cos\omega t$　も解
- 二つの三角関数の関係に注意：位相差

$$\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\theta\cos\frac{\pi}{2} - \sin\theta\sin\frac{\pi}{2} = -\sin\theta$$

- 一般解
  - 二つの積分定数*a*と*b*を含む

$$x(t) = a\sin\omega t + b\cos\omega t$$

- 積分定数の決定：たとえば初期値から

$$x(0) = b\cos\omega t$$

$$v(0) = \left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = \omega\left(a\cos\omega t - b\sin\omega t\right)\Big|_{t=0} = a\omega$$

# 別の表現

$$x(t) = a\sin(\omega t + \delta)$$

$\delta$ : 位相

$$x(0) = a\sin\delta$$

$$v(0) = a\omega\cos\delta$$

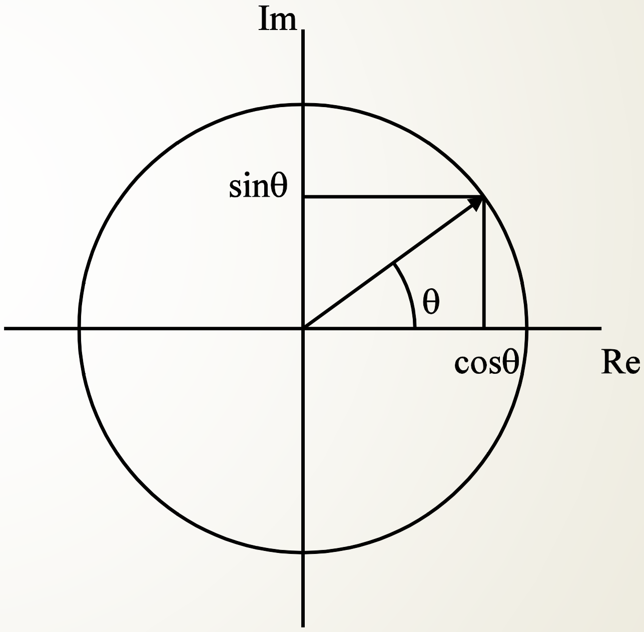
# 指数関数の利用

- Eulerの公式

$$e^{i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$$

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$



$$x(t) = ae^{i(\omega t+\delta)}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = ia\omega e^{i(\omega t+\delta)} = i\omega x(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2 x(t)$$

$$x(0) = ae^{i\delta}$$

$$v(0) = ia\omega e^{i\delta}$$

# 力づく(brute force)で解く

$$x(t)=\sum_{j=0}^{\infty}a_j t^j$$

とおくと

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\sum_{j=1}^{\infty}a_j j t^{j-1}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}=\sum_{j=2}^{\infty}a_j j(j-1)t^{j-2}=\sum_{j=0}^{\infty}a_{j+2}(j+1)(j+2)t^j$$

- 運動方程式に代入すると

$$m\sum_{j=0}^{\infty}a_{j+2}\left(j+1\right)\left(j+2\right)t^{j}=-k\sum_{j=0}^{\infty}a_{j}t^{j}$$

この等号が全ての$t$の値に対して成り立つには、tの各次数の項毎に等号が成り立たなければならない。

$$ma_{j+2}\left(j+1\right)\left(j+2\right)=-ka_{j}\ \forall j\geq 0$$

- 偶数次の項　$j = 2n$

$$a_2 = -\frac{1}{2\cdot 1}\frac{k}{m}a_0$$

$$a_4 = -\frac{1}{4\cdot 3}\frac{k}{m}\overset{a_0}{a_2} = \frac{1}{4!}\left(\frac{k}{m}\right)^2 a_0$$

$$a_6 = -\frac{1}{6\cdot 5}\frac{k}{m}a_4 = -\frac{1}{6!}\left(\frac{k}{m}\right)^3 a_0$$

$$\cdots$$

$$a_{2n} = (-1)^n \frac{1}{(2n)!}\omega^{2n} a_0,\ \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

- 奇数次の項 $j=2n+1$

$$a_3=-\frac{1}{3\cdot 2}\frac{k}{m}a_1$$

$a_0$

$$a_5=-\frac{1}{5\cdot 4}\frac{k}{m}a_3=\frac{1}{5!}\left(\frac{k}{m}\right)^2 a_1$$

$$a_7=-\frac{1}{7\cdot 6}\frac{k}{m}a_5=-\frac{1}{7!}\left(\frac{k}{m}\right)^3 a_1$$

$$\cdots$$

$$a_{2n+1}=(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}\omega^{2n}a_1$$

- 偶数次だけの場合 $a_1 = 0$

$$x(t) = \sum_{j=0}^{\infty} a_{2j} t^{2j} = a_0 \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{1}{(2j)!} (\omega t)^{2j}$$

$$= a_0 \cos \omega t$$

- 奇数次だけの場合 $a_0 = 0$

$$x(t) = \sum_{j=0}^{\infty} a_{2j+1} t^{2j+1} = a_1 \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{1}{(2j+1)!} (\omega)^{2j} t^{2j+1}$$

$$= \frac{a_1}{\omega} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{1}{(2j+1)!} (\omega t)^{2j+1} = \frac{a_1}{\omega} \sin \omega t$$

- 従って一般解は以下のようになる

$$x(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$$