情報と物理：
単振り子と中心力場
Simple Pendulum and Central Force Field

只木進一

2013年後期

運動の極座標表示

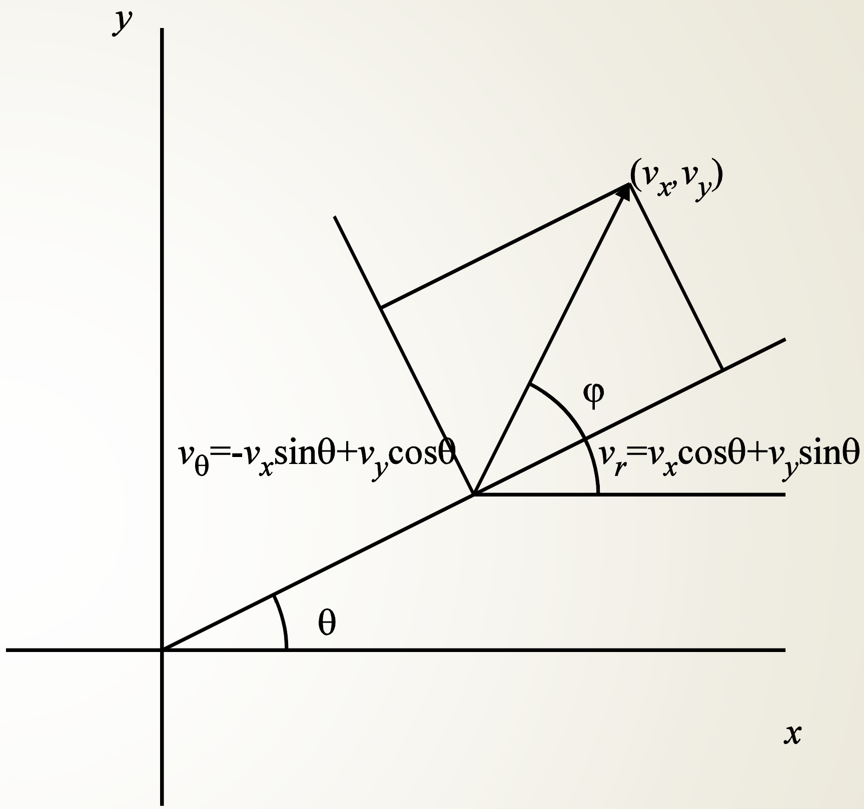
- 位置の極座標表示

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

- 時間で微分

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\cos\theta - r\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\sin\theta \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\sin\theta + r\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\cos\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\cos\theta + \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\sin\theta = \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} \\ -\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\sin\theta + \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cos\theta = r\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \end{cases}$$



一般的なベクトルの変換式

$$v_r = v_x\cos\theta + v_y\sin\theta = |v|\cos(\varphi - \theta)$$

$$v_\theta = -v_x\sin\theta + v_y\cos\theta = |v|\sin(\varphi - \theta)$$

加速度

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=\cos\theta\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}-2\sin\theta\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}-r\sin\theta\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}-r\cos\theta\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=\sin\theta\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}+2\cos\theta\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}+r\cos\theta\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}-r\sin\theta\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2$$

力の座標変換

- 一般式から

$$F_r = F_x \cos\theta + F_y \sin\theta$$

$$F_\theta = -F_x \sin\theta + F_y \cos\theta$$

- 逆に解いて

$$F_x = F_r \cos\theta - F_\theta \sin\theta$$

$$F_y = F_r \sin\theta + F_\theta \cos\theta$$

極座標表示による運動方程式

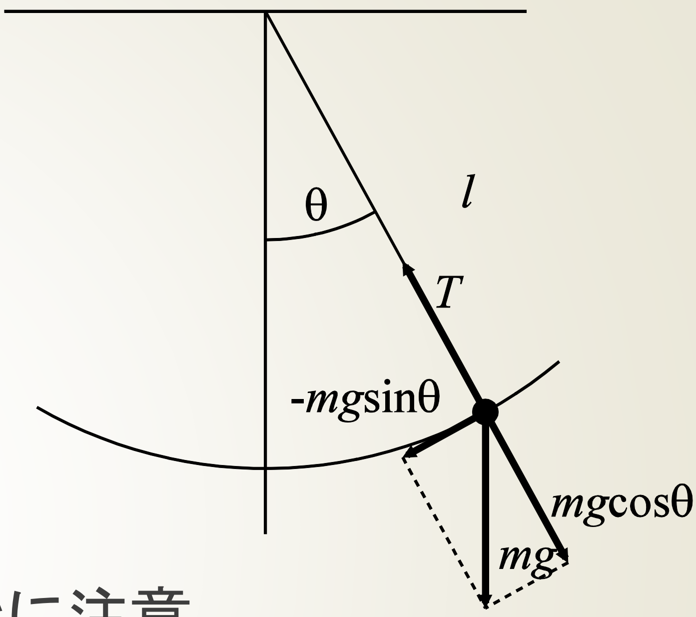
- x方向の運動方程式を①、y方向を②と呼ぶ
- cosθ×①+sinθ×②

$$\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} - r\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \frac{1}{m}F_r$$

- -sinθ×①+cosθ×②

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{1}{m}F_\theta$$

応用例：単振動子



- 力

$$F_r = mg\cos\theta - T$$
$$F_\theta = -mg\sin\theta$$

- 動径方向へは動かないことに注意

$$-l\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2 = g\cos\theta - \frac{T}{m}$$

$$l\left(\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}\right) = -g\sin\theta$$

- 角度方向の加速度の式の両辺にdθ/d*t*を乗ずる

$$l\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}\right)=-g\sin\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{l}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2=g\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\cos\theta$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[l\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2-2g\cos\theta\right]=0$$

$$l\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2-2g\cos\theta=\text{一定}$$

- 初期条件：時刻t=0でθ=θ$_0$、dθ/dt=0とする

$$l\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2 - 2g\cos\theta = -2g\cos\theta_0$$

- 動径方向の式に代入

$$-2g\left(\cos\theta - \cos\theta_0\right) = g\cos\theta - \frac{T}{m}$$

$$\frac{T}{m} = g\left(3\cos\theta - 2\cos\theta_0\right)$$

- 角度が非常に小さいとして近似的に解く

$$\sin\theta \simeq \theta$$

- 調和振動子

$$l\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -g\theta$$

$$\theta(t) = \theta_0 \exp\left[i(\omega t + \delta)\right]$$

$$\omega^2 = \frac{g}{l}$$

- 次元から振動数を予想できる

重力による円運動

- 太陽を回る惑星の運動は、本当は楕円
  - ここでは単純化して、円、つまり動径方向には動かないとする
- 運動方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} - r\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2 = -\frac{GM}{r^2}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right) = 0$$

- 半径は一定値とする　$r = R$
- 周期の2乗は、半径の3乗に比例する:ケプラーの第三法則

$$\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \frac{GM}{R^3}$$

- 面積速度は保存する:ケプラーの第二法則

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(R^2 \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right) = 0$$

重力場中の楕円運動

- 運動方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} - r\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2 = -\frac{GM}{r^2}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right) = 0$$

- 面積速度一定則より

$$r^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = H = \text{定数}$$

- 運動法則は以下のようになる

$$\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} - \frac{H^2}{r^3} = -\frac{GM}{r^2}$$

$$s(\theta)=1/r(\theta)$$

- 従属変数の変換

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}=Hs^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}$$

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=Hs^2\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}=Hs^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\frac{1}{s}=-s^{-2}Hs^2\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta}=-H\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}=Hs^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(-H\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta}\right)=-Hs^2\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}\theta^2}$$

- 運動方程式は

$$\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}\theta^2}=-s+\frac{GM}{H^2}$$

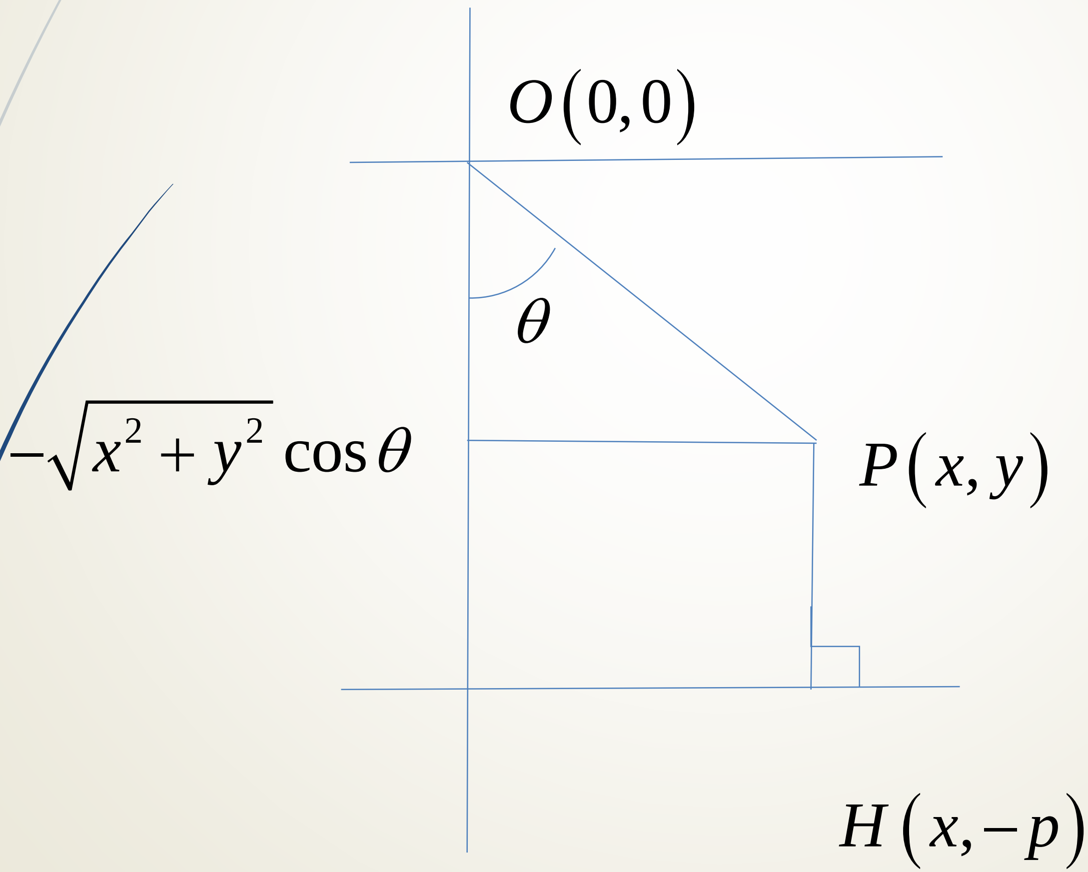
$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\theta^2}\left(s-\frac{GM}{H^2}\right)=-\left(s-\frac{GM}{H^2}\right)$$

$$s-\frac{GM}{H^2}=A\cos\theta$$

- 位相差は、角度の原点の選び方なのでゼロとした
- 楕円または双曲線
  - 惑星または彗星

$$r=\frac{\dfrac{H^2}{GM}}{\dfrac{H^2}{GM}A\cos\theta+1}$$

二次曲線と極表示



$$e=\frac{OP}{PH}$$

eが一定である曲線

- $e=1$ の場合
- 二次曲線となる

$$\sqrt{x^2+y^2}=y+p$$

$$x^2+y^2=y^2+2py+p^2$$

$$y=\frac{1}{2p}\left(x^2-p^2\right)$$

- 角度と動径の関係

$$r\cos\theta+r=p$$

$$r=\frac{p}{1+\cos\theta}$$

- $0 < e < 1$ の場合

$$\sqrt{x^2 + y^2} = e(y + p)$$

$$x^2 + y^2 = e^2(y^2 + 2py + p^2)$$

$$x^2 + (1 - e^2)\left(y - \frac{e^2 p}{1 - e^2}\right)^2 = e^2 p^2 \frac{1}{1 - e^2}$$

- 楕円

$$r\cos\theta + \frac{r}{e} = p$$

$$r = \frac{ep}{1 + e\cos\theta}$$

- $e > 1$ の場合

$$\sqrt{x^2 + y^2} = e(y + p)$$

$$x^2 + y^2 = e^2 \left(y^2 + 2py + p^2\right)$$

$$-x^2 + \left(e^2 - 1\right)\left(y + \frac{e^2 p}{e^2 - 1}\right)^2 = e^2 p^2 \frac{1}{e^2 - 1}$$

- 双曲線

$$r\cos\theta + \frac{r}{e} = p$$

$$r = \frac{ep}{1 + e\cos\theta}$$