

情報と物理： 粒子の簡単な運動1

只木進一

2014年後期

運動方程式とその解

- ▶ 1次元の運動方程式

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F$$

- ▶ 未知関数 $x(t)$ に対する微分方程式
 - ▶ 解は関数 $x(t)$
- ▶ 力を与えて粒子に加速を生じさせる
 - ▶ つまり速度を変化させる
- ▶ 位置を直接変化させることはできない

- ▶ 力は定数とは限らない

$$F = F(x, v, t)$$

- ▶ 位置の2階以上の微分を含まないことが知られている
- ▶ 力が、位置、速度、時間に依存する例？

運動方程式を解くということ

- ▶ 二階微分方程式を一階連立微分方程式へ

$$\frac{dx}{dt} = v$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{m} F(x, v, t)$$

▶ 時刻 $t = 0$ とその直後 $t = \epsilon$

$$\frac{x(\epsilon) - x(0)}{\epsilon} = v(0)$$

$$\frac{v(\epsilon) - v(0)}{\epsilon} = \frac{1}{m} F(x(0), v(0), 0)$$



$$x(\epsilon) = x(0) + v(0)\epsilon$$

$$v(\epsilon) = v(0) + \frac{1}{m} F(x(0), v(0), 0)\epsilon$$

▶ 次の時刻 $t = 2\varepsilon$

$$x(2\varepsilon) = x(\varepsilon) + v(\varepsilon)\varepsilon = [x(0) + v(0)\varepsilon] + \left[v(0) + \frac{1}{m}F(x(0), v(0), 0)\varepsilon \right]\varepsilon$$

$$= x(0) + v(0)(2\varepsilon) + \frac{1}{m}F(x(0), v(0), 0)\varepsilon^2$$

$$v(2\varepsilon) = v(\varepsilon) + \frac{1}{m}F(x(\varepsilon), v(\varepsilon), \varepsilon)\varepsilon$$

$$= v(0) + \frac{1}{m}F(x(0), v(0), 0)\varepsilon + \frac{1}{m}F(x(\varepsilon), v(\varepsilon), \varepsilon)\varepsilon$$

▶ 初期値を与えなければ定まらない

$$x(0), v(0)$$

▶ 力 F が一定の場合の漸化式

$$x(k\epsilon) = x^{\dagger}((k-1)\epsilon) + v((k-1)\epsilon)\epsilon$$

$$v(k\epsilon) = v((k-1)\epsilon) + \frac{1}{m}F\epsilon$$

▶ はじめの数項の様子を見る

$$x(\epsilon) = x(0) + v(0)\epsilon$$

$$v(\epsilon) = v(0) + \frac{1}{m}F\epsilon$$

$$x(2\epsilon) = x(\epsilon) + v(\epsilon)\epsilon = x(0) + v(0)\epsilon + \left[v(0) + \frac{1}{m}F\epsilon \right] \epsilon$$

$$= x(0) + v(0)(2\epsilon) + \frac{1}{m}F\epsilon^2$$

$$v(2\epsilon) = v(\epsilon) + \frac{1}{m}F\epsilon = v(0) + \frac{1}{m}F(2\epsilon)$$

$$x(3\epsilon) = x(2\epsilon) + v(2\epsilon)\epsilon = x(0) + v(0)(2\epsilon) + \frac{1}{m}F\epsilon^2 + \left[v(0) + \frac{1}{m}F(2\epsilon) \right]\epsilon$$

$$= x(0) + v(0)(3\epsilon) + \frac{1}{m}F(1+2)\epsilon^2$$

$$v(3\epsilon) = v(2\epsilon) + \frac{1}{m}F\epsilon = v(0) + \frac{1}{m}F(3\epsilon)$$

$$x(4\epsilon) = x(3\epsilon) + v(3\epsilon)\epsilon = x(0) + v(0)(3\epsilon) + \frac{1}{m}F(1+2)\epsilon^2 + \left[v(0) + \frac{1}{m}F(3\epsilon) \right]\epsilon$$

$$= x(0) + v(0)(4\epsilon) + \frac{1}{m}F(1+2+3)\epsilon^2$$

$$v(4\epsilon) = v(3\epsilon) + \frac{1}{m}F\epsilon = v(0) + \frac{1}{m}F(4\epsilon)$$

漸化式の解

$$\begin{aligned}x(k\epsilon) &= x(0) + v(0)(k\epsilon) + \frac{1}{m} F \left(\sum_{j=0}^{k-1} j \right) \epsilon^2 \\ &= x(0) + v(0)(k\epsilon) + \frac{1}{m} F \left(\frac{k(k-1)}{2} \right) \epsilon^2\end{aligned}$$

$$v(k\epsilon) = v(0) + \frac{1}{m} F(k\epsilon)$$

➡ 数学的帰納法による証明が必要

時刻の関数として表示

- ▶ 時刻0から t までの運動を考え、時間を十分大きな数 n に分割したと考える

$$t = n\epsilon$$

$$x(t) = x(0) + v(0)t + \frac{1}{m} F \left(\frac{n(n-1)}{2n^2} \right) t^2$$

$$v(t) = v(0) + \frac{1}{m} Ft$$

- ▶ n を十分に大きく

$$n \rightarrow \infty$$

$$x(t) = x(0) + v(0)t + \frac{1}{2m} Ft^2$$

$$v(t) = v(0) + \frac{1}{m} Ft$$

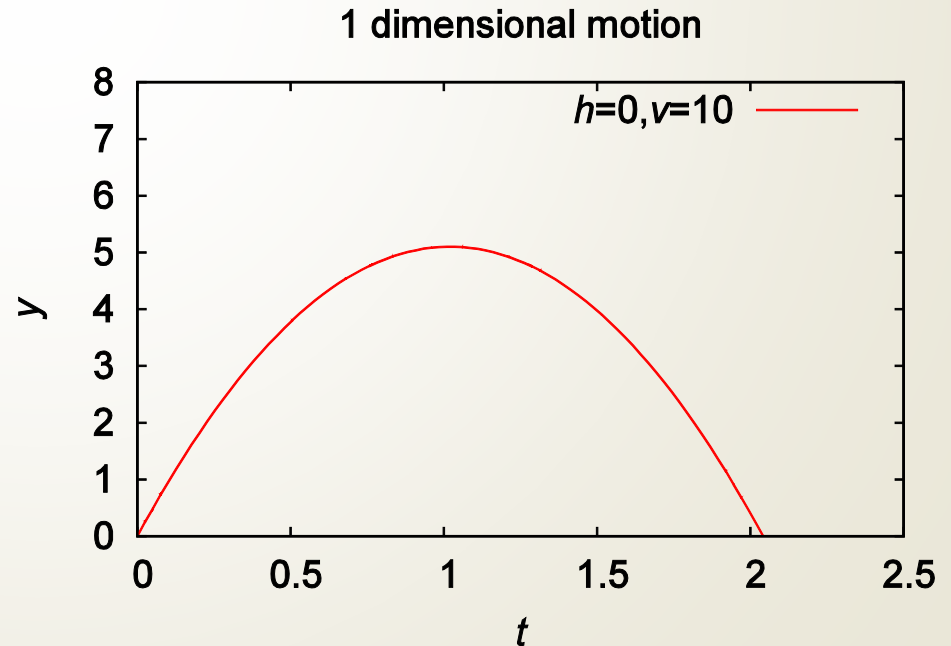
- ▶ 初期値を定めなければ、具体の運動は定まらない
- ▶ 初期値を指定しない解を「一般解」と呼ぶ

重力場中の一次元運動

- ▶ 高さ h の位置から鉛直上方向に初速 v で投げ上げる

$$y(t) = h + vt - \frac{1}{2}gt^2$$

$$v(t) = v - gt$$



重力場中の二次元運動

▶ 運動方程式

- ▶ 水平方向には力は働かない
- ▶ 鉛直下向きに mg の力が働く

▶ 一般解

$$x(t) = x(0) + v_x t$$

$$v_x(t) = v_x$$

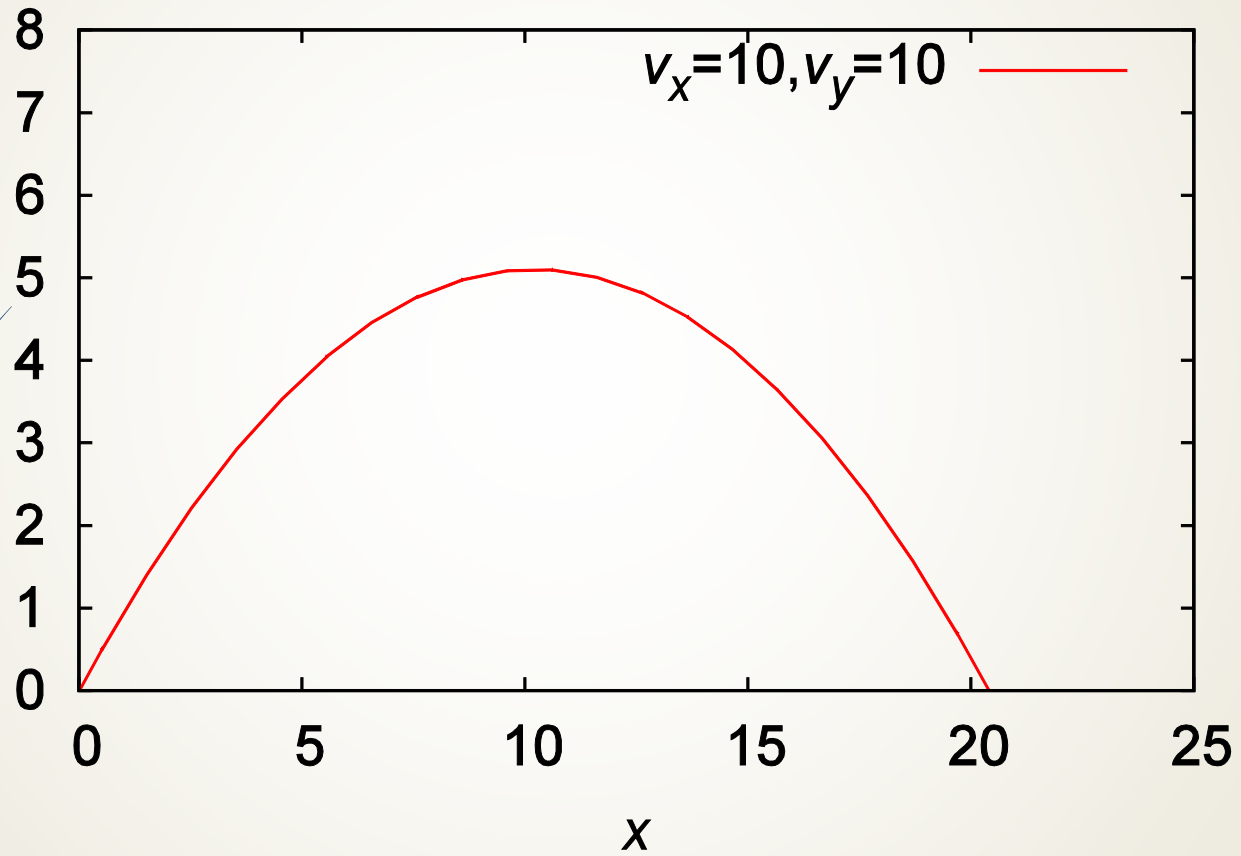
$$y(t) = y(0) + v_y t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$v_y(t) = v_y - g t$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = 0$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -g$$

2 dimensional motion



投げ上げる速度一定で、角度を変える

▶ 初期値

$$x(0) = 0$$

$$y(0) = 0$$

$$v_x(0) = v \cos \theta$$

$$v_y(0) = v \sin \theta$$

v は一定のまま θ を変える

頂点を結ぶ曲線

- ▶ 頂点は、鉛直方向の速度がゼロとなる点
 - ▶ 頂点となる時刻を t_{peak} とする

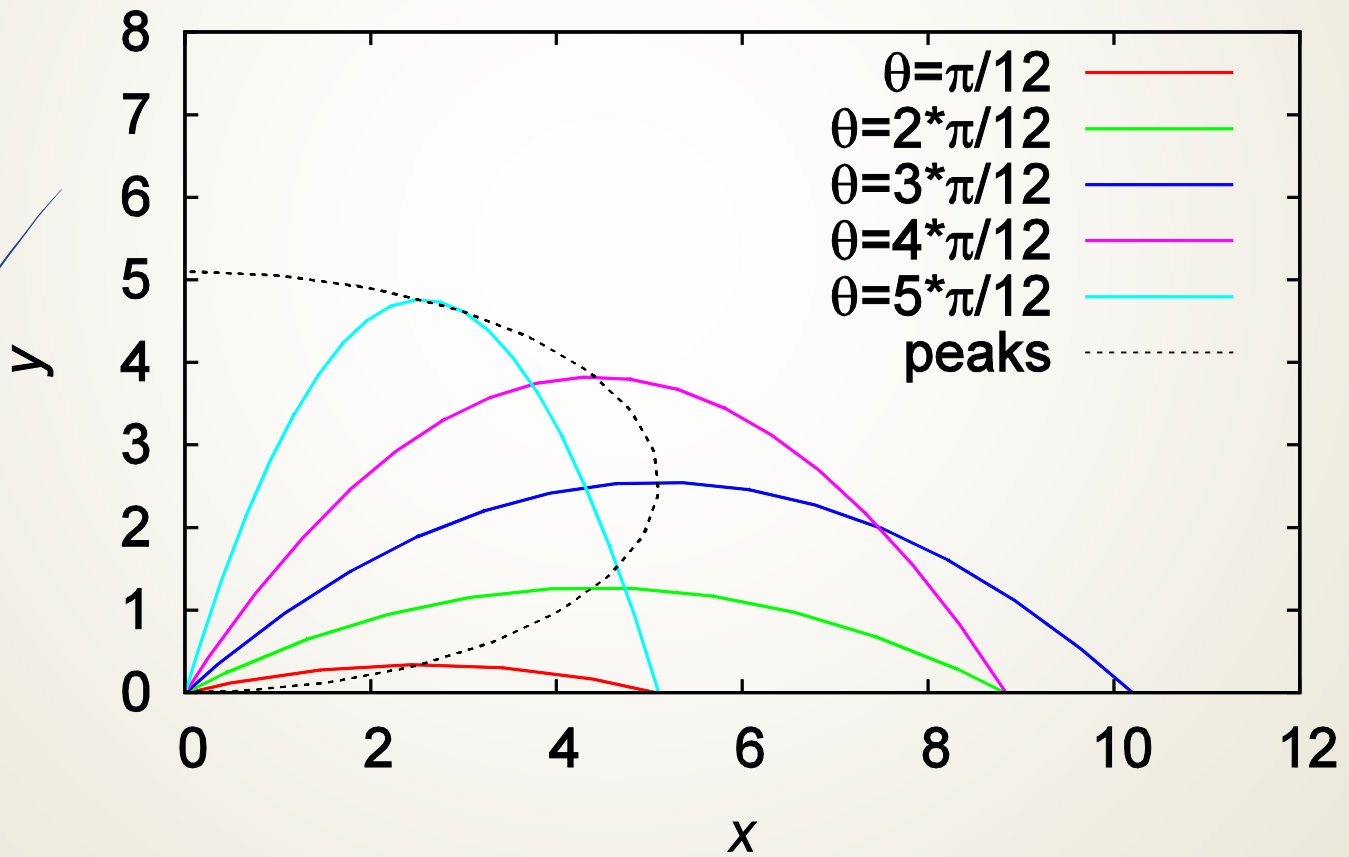
$$v \sin \theta - gt_{\text{peak}} = 0 \rightarrow t_{\text{peak}} = \frac{v}{g} \sin \theta$$

- ▶ 頂点の座標

$$x_{\text{peak}} = v \cos \theta t_{\text{peak}} = \frac{v^2}{g} \cos \theta \sin \theta = \frac{v^2}{2g} \cos 2\theta$$

$$\begin{aligned} y_{\text{peak}} &= v \sin \theta t_{\text{peak}} - \frac{1}{2} g t_{\text{peak}}^2 = \frac{1}{2} \frac{v^2}{g} \sin^2 \theta \\ &= \frac{1}{4} \frac{v^2}{g} [1 - \cos^2 \theta + \sin^2 \theta] = \frac{1}{4} \frac{v^2}{g} [1 - \cos 2\theta] \end{aligned}$$

2 dimensional motion ($v=10$)



▶ 頂点の座標が満たす式

$$\left(\frac{2g}{v}x\right)^2 + \left(\frac{4g}{v}\left(y - \frac{v^2}{4g}\right)\right)^2 = 1$$

▶ 楕円

▶ 中心

$$\left(0, \frac{v^2}{4g}\right)$$

▶ 軸

$$\left(\frac{v}{2g}, \frac{v}{4g}\right)$$

課題

- ▶ 地面に落ちる位置が最も遠くなるように、投げるためには、どの角度が良いかを求めなさい。