



情報と物理： 調和振動子 Harmonic Oscillators

只木進一

2014

年後期

フックの法則と運動方程式

▶ フックの法則(Hooke's Law)

▶ 力が変位(伸び、縮み)に比例する

▶ 例:バネ、ゴム

▶ 運動方程式:一次元

▶ 右辺の力にも、未知関数 $x(t)$ が含まれている

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx$$

- ▶ 残念ながら、微分方程式に解を与える一般的方法は存在しない。
- ▶ フックの法則の場合の着目点
 - ▶ 左辺で x を二階微分すると、右辺の $-x$ に比例する
 - ▶ このような性質の関数は？
 - ▶ 三角関数、指数関数

三角関数で解を構成してみる

▶ $x(t) = a \sin \omega t$ とおくと

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -a\omega^2 \sin \omega t = -\omega^2 x$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

▶ 同様に $x(t) = b \cos \omega t$ も解

▶ 二つの三角関数の関係に注意: 位相差

$$\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \theta \cos \frac{\pi}{2} - \sin \theta \sin \frac{\pi}{2} = -\sin \theta$$

▶ 一般解

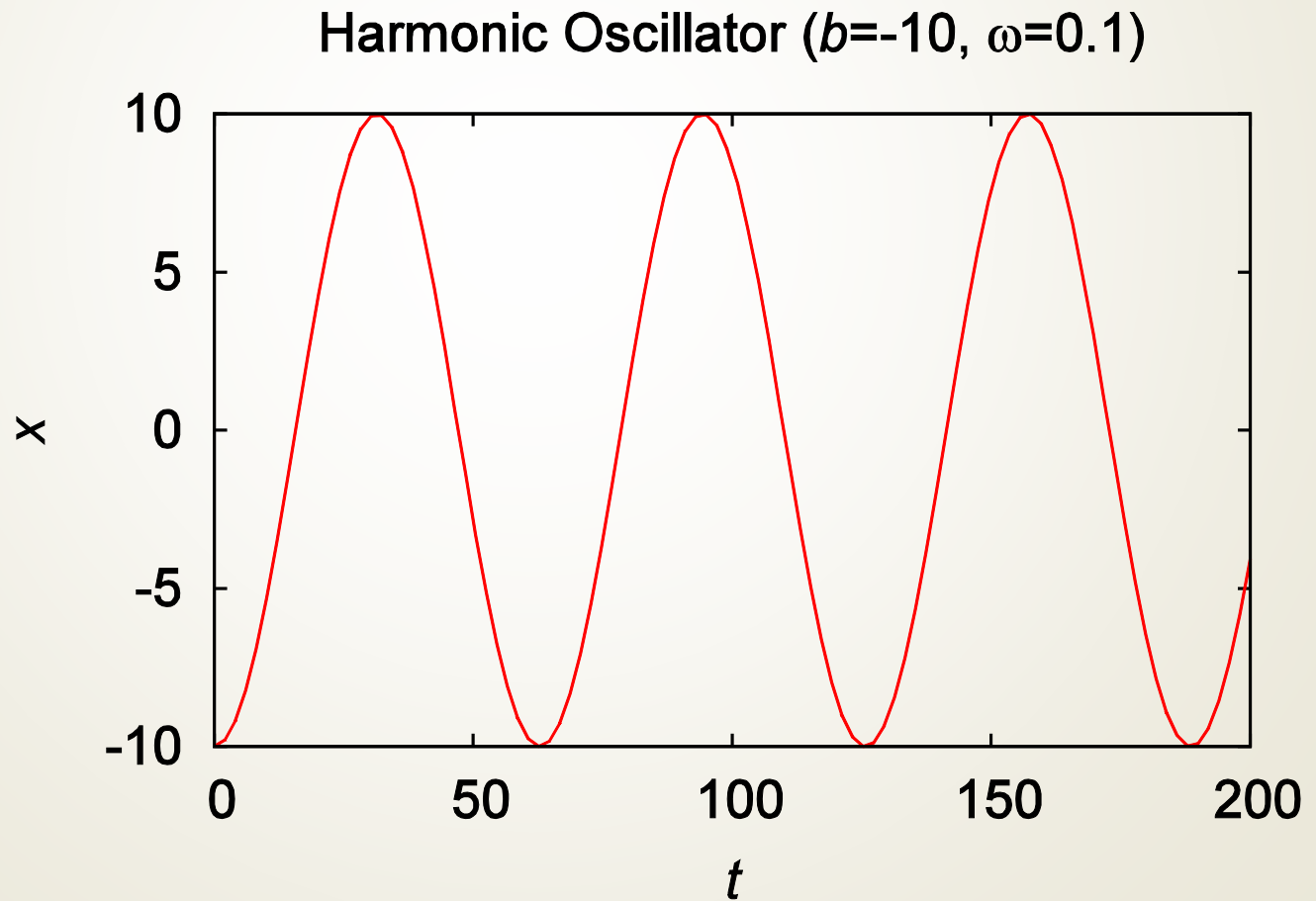
▶ 二つの積分定数 a と b を含む

$$x(t) = a \sin \omega t + b \cos \omega t$$

▶ 積分定数の決定:たとえば初期値から

$$x(0) = b \cos \omega t$$

$$v(0) = \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = \omega (a \cos \omega t - b \sin \omega t) \Big|_{t=0} = a\omega$$



別の表現

$$\begin{aligned}x(t) &= a \sin(\omega t + \delta) \\ &= a [\sin \omega t \cos \delta + \cos \omega t \sin \delta] \\ &= a \sin \delta \cos \omega t + a \cos \delta \sin \omega t\end{aligned}$$

δ : 位相

$$x(0) = a \sin \delta$$

$$v(0) = a\omega \cos \delta$$

一つの三角関数
に過ぎないこと
に注意

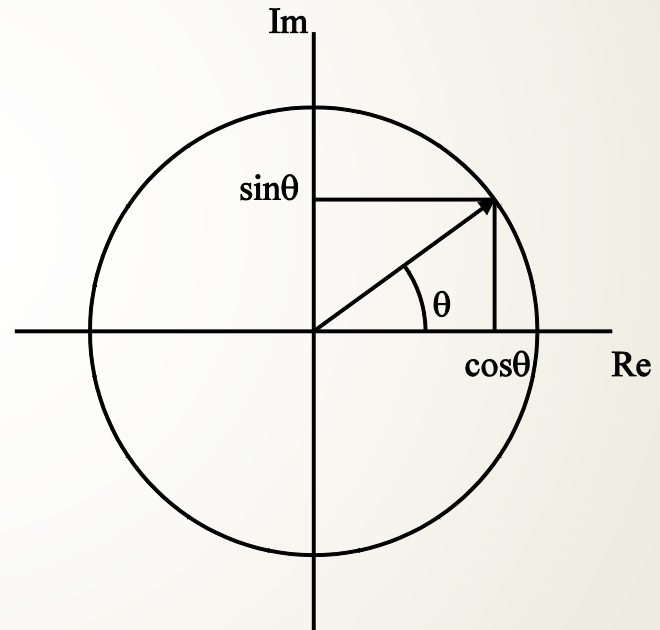
指数関数の利用

▶ Eulerの公式

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$



$$x(t) = ae^{i(\omega t + \delta)}$$

$$\frac{dx}{dt} = ia\omega e^{i(\omega t + \delta)} = i\omega x(t)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x(t)$$

$$x(0) = ae^{i\delta}$$

$$v(0) = ia\omega e^{i\delta}$$

カづく(brute force)で解く

$$x(t) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j t^j$$

とおくと

$$\frac{dy}{dt} = \sum_{j=1}^{\infty} a_j j t^{j-1}$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \sum_{j=2}^{\infty} a_j j(j-1) t^{j-2} = \sum_{j=0}^{\infty} a_{j+2} (j+1)(j+2) t^j$$

▶ 運動方程式に代入すると

$$m \sum_{j=0}^{\infty} a_{j+2} (j+1)(j+2)t^j = -k \sum_{j=0}^{\infty} a_j t^j$$

この等号が全ての t の値に対して成り立つには、 t の各次数の項毎に等号が成り立たなければならない。

$$ma_{j+2} (j+1)(j+2) = -ka_j \quad \forall j \geq 0$$

▶ 偶数次の項 $j = 2n$

$$a_2 = -\frac{1}{2 \cdot 1} \frac{k}{m} a_0$$

$$a_4 = -\frac{1}{4 \cdot 3} \frac{k}{m} a_2 = \frac{a_0}{4!} \left(\frac{k}{m}\right)^2 a_0$$

$$a_6 = -\frac{1}{6 \cdot 5} \frac{k}{m} a_4 = -\frac{1}{6!} \left(\frac{k}{m}\right)^3 a_0$$

...

$$a_{2n} = (-1)^n \frac{1}{(2n)!} \omega^{2n} a_0, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

▶ 奇数次の項 $j = 2n + 1$

$$a_3 = -\frac{1}{3 \cdot 2} \frac{k}{m} a_1$$

$$a_5 = -\frac{1}{5 \cdot 4} \frac{k}{m} a_3 = \frac{1}{5!} \left(\frac{k}{m}\right)^2 a_1$$

$$a_7 = -\frac{1}{7 \cdot 6} \frac{k}{m} a_5 = -\frac{1}{7!} \left(\frac{k}{m}\right)^3 a_1$$

...

$$a_{2n+1} = (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} \omega^{2n} a_1$$

▶ 偶数次だけの場合 $a_1 = 0$

$$\begin{aligned}x(t) &= \sum_{j=0}^{\infty} a_{2j} t^{2j} = a_0 \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{1}{(2j)!} (\omega t)^{2j} \\ &= a_0 \cos \omega t\end{aligned}$$

▶ 奇数次だけの場合 $a_0 = 0$

$$\begin{aligned}x(t) &= \sum_{j=0}^{\infty} a_{2j+1} t^{2j+1} = a_1 \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{1}{(2j+1)!} (\omega)^{2j} t^{2j+1} \\ &= \frac{a_1}{\omega} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{1}{(2j+1)!} (\omega t)^{2j+1} = \frac{a_1}{\omega} \sin \omega t\end{aligned}$$

▶ 従って一般解は以下のようになる

$$x(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

配位空間内の運動

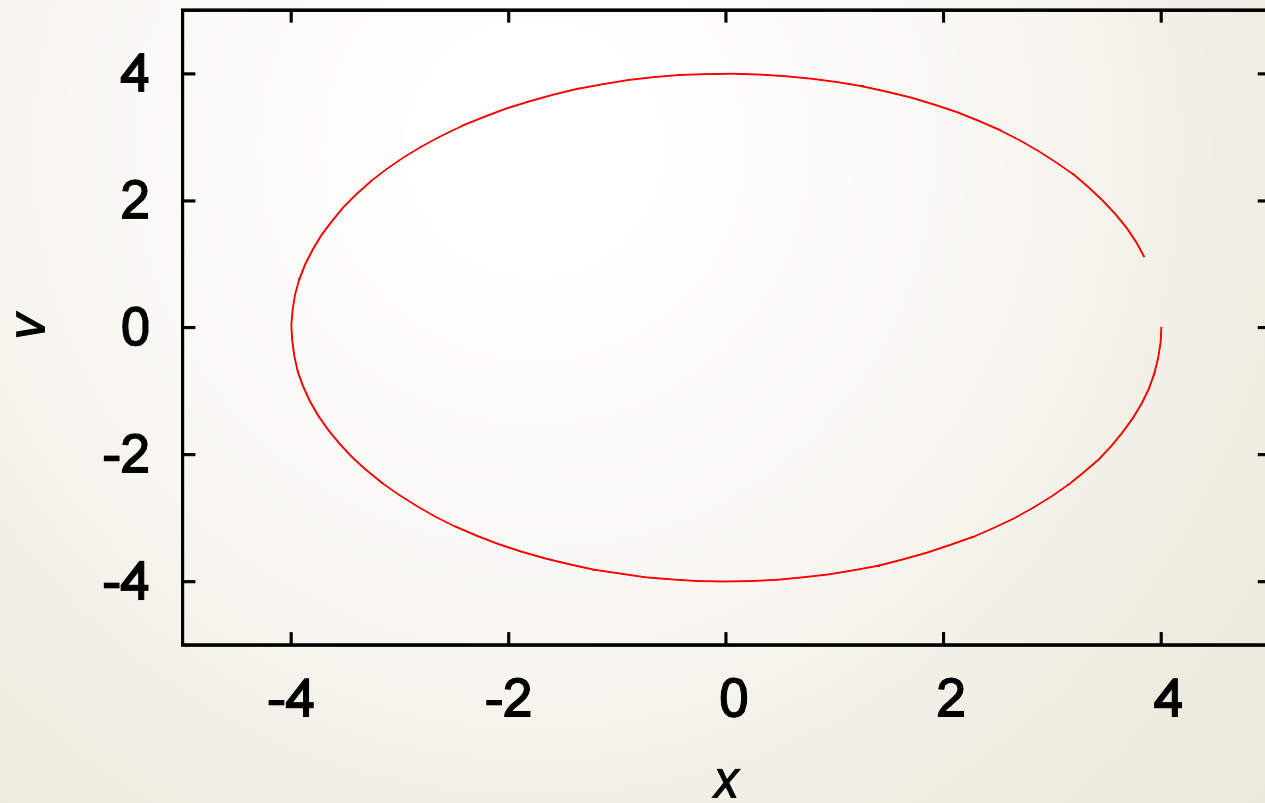
- ▶ 二次元空間 (x, v) 内での運動

$$x(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t$$

$$v(t) = \omega(-a \sin \omega t + b \cos \omega t)$$

- ▶ ある時刻での (x, v) が分かると、その後の運動が一意に決まることに注意

Harmonic Oscillator ($a=4, b=0, \omega=1$)



減衰振動

- ▶ 速度に比例した摩擦がある場合

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - \gamma \frac{dx}{dt}$$

- ▶ 解の形を仮定

$$x(t) = e^{-\alpha t} (a \cos \omega t + b \sin \omega t)$$

$$\frac{d}{dt}x = -\alpha x + \omega e^{-\alpha t} (-a \sin \omega t + b \cos \omega t)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}x = (\alpha^2 - \omega^2)x - 2\alpha\omega e^{-\alpha t} (-a \sin \omega t + b \cos \omega t)$$

▶ 運動方程式に代入

$$\begin{aligned} & m(\alpha^2 - \omega^2)x - 2m\alpha\omega e^{-\alpha t} (-a \sin \omega t + b \cos \omega t) \\ & = -kx - \gamma \left[-\alpha x + \omega e^{-\alpha t} (-a \sin \omega t + b \cos \omega t) \right] \end{aligned}$$

$$m(\alpha^2 - \omega^2) = -k + \alpha\gamma$$

$$2\alpha m = \gamma$$



$$\alpha = \frac{\gamma}{2m}$$

$$\omega^2 = \frac{1}{m} \left(k - \frac{\gamma^2}{4m} \right)$$

▶ 初期条件 $t = 0$ において $x(0) = x_0$ 、 $v(0) = 0$
とすると

$$a = x_0$$

$$-\alpha a + \omega b = 0$$



$$a = x_0$$

$$b = \frac{\alpha}{\omega} x_0$$

Damped Oscillator ($a=4$, $\omega=1$, $\alpha=0.1$)

