情報と物理：
運動の法則

只木進一

2014年後期

ニュートン力学の革新的な点

- Sir Isaac Newton(1643年 – 1727)
- 物体の位置を時間の関数として記述
  - 微分積分学の発端となる

運動の3法則

1. 粒子に力が作用していないとき、その粒子はそのまま静止し続けるか、あるいは等速度運動をつづけ、その運動状態を変えない。
2. 粒子に外から力が作用するとき、その粒子の得る加速度大きさは、加えた力の大きさに比例し、その方向は力の方向に一致する。
3. 2粒子間に作用する力は、それらの粒子を結ぶ直線上に作用し、その大きさは等しく、方向は反対向きである。

運動の第一法則：慣性の法則

- 時速60km/hで走る車内でリンゴを投げ上げる
  - $60\mathrm{km/h} = 60 \times 10^3/3600\ \mathrm{m/sec} \cong 16.7\mathrm{m/sec}$
- リンゴは、動いてる車とともに動く
  - 車からみると静止
  - 静止している位置からみると、16.7 m/secで移動
- リンゴが30センチ落下するには0.25秒

$$\sqrt{2l/g} \simeq \sqrt{2 \times 0.3/9.8} \simeq 0.25$$

- リンゴを30センチ投げ上げている間に車は8メートル以上移動
- 何が起こっている？

運動とは

- 位置が時間とともに変化すること
  - 位置が時間の関数であること: $x(t)$
  - 位置が変化

$$x(t) \to x(t+\Delta t)$$

$$\Delta x = x(t+\Delta t) - x(t)$$

  - 速度

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

- 位置の変化の見直し

$$x(t+\Delta t) = x(t) + \left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_t \Delta t + O\left(\Delta t^2\right)$$
$$= x(t) + v(t)\Delta t + O\left(\Delta t^2\right)$$

加速とは

- 速度が変化する
  - 速度も時間の関数

$$v(t+\Delta t) = v(t) + a(t)\Delta t + O\left(\Delta t^2\right)$$

$$a(t) = \left.\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right|_t$$

運動の第2法則：加速

- 粒子に力Fを与えたときに発生する加速度a

$$\frac{a}{F} = k(一定)$$

- 比kは一定
  - 力の大きさ、運動の状態、力の与え方に依存しない

- 慣性質量 $m = \dfrac{1}{k}$

- 力が働くと、それに比例した加速度が発生する
- 加速度の向きは、力の向きに等しい

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

運動方程式

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = F_x$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = F_y$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} = F_z$$

慣性系の存在とガリレイの相対性原理

- 運動法則に現れる、「位置」、「速度」、「加速度」などを計測するには、座標系が必要
- 運動の第1法則が成り立つような座標系
  - 慣性系
- 慣性系に対して等速運動する系も慣性系
  - ガリレイの相対性原理

- 慣性系$K(x, y, z)$に対して、x方向に速度vで動く慣性系$K'(x', y', z')$
  - 注意：時刻は共通
    - 絶対時刻の存在

ガリレイ変換

$$x'(t) = x(t) - vt$$

$$y'(t) = y(t)$$

$$z'(t) = z(t)$$

- 時刻で微分

$$\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - v \qquad \frac{\mathrm{d}^2x'}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \qquad \frac{\mathrm{d}^2y'}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \qquad \frac{\mathrm{d}^2z'}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}$$

- 加速度は、二つの系で同じ

慣性質量と重力質量

- 慣性質量
  - 力と加速度の比
  - 力をうけたときの動きにくさ
  - 単位となる質量m_0

$$F = m_0 a_0$$

  - 同じ力を別の粒子に加える
    - 加速度を計測すると、質量がわかる

$$m_0 a_0 = m_1 a_1$$

$$\frac{m_1}{m_0} = \frac{a_0}{a_1}$$

重力質量

- 重さ
- 地上で支えるときに必要な力に比例
- 物体に働く重力に比例

$$\frac{m}{m_0} = \frac{W}{W_0}$$

- 慣性質量と重量質量が等しいことを示すことができる

- 金(Au)の重力質量と慣性質量

$$m_{\mathrm{I}}(\mathrm{Au})a = \left(m_{\mathrm{G}}(\mathrm{Au})/m_0\right)W_0$$

- アルミニウム(Al)の重力質量と慣性質量

$$m_{\mathrm{I}}(\mathrm{Al})a' = \left(m_{\mathrm{G}}(\mathrm{Al})/m_0\right)W_0$$

$$a = k(\mathrm{Au})(W_0/m_0),\ a' = k(\mathrm{Al})(W_0/m_0)$$
$$k(\mathrm{Au}) = m_{\mathrm{G}}(\mathrm{Au})/m_{\mathrm{I}}(\mathrm{Au})$$
$$k(\mathrm{Al}) = m_{\mathrm{G}}(\mathrm{Al})/m_{\mathrm{I}}(\mathrm{Al})$$

- 重力質量と慣性質量は、物質の種類に依らない

$$\frac{k(\mathrm{Au})}{k(\mathrm{Al})} = 1 + \eta$$
$$|\eta| < 3 \times 10^{-11}$$

等号の意味を考える

- 方程式
  - 等号が成り立つ解がある
- 恒等式
  - 常に成り立つ
  - 式変形
- 定義式
  - 左辺の量を右辺で定義する