

情報と物理： 単振り子と中心力場 Simple Pendulum and Central Force Field

只木進一

2014年後期

運動の極座標表示

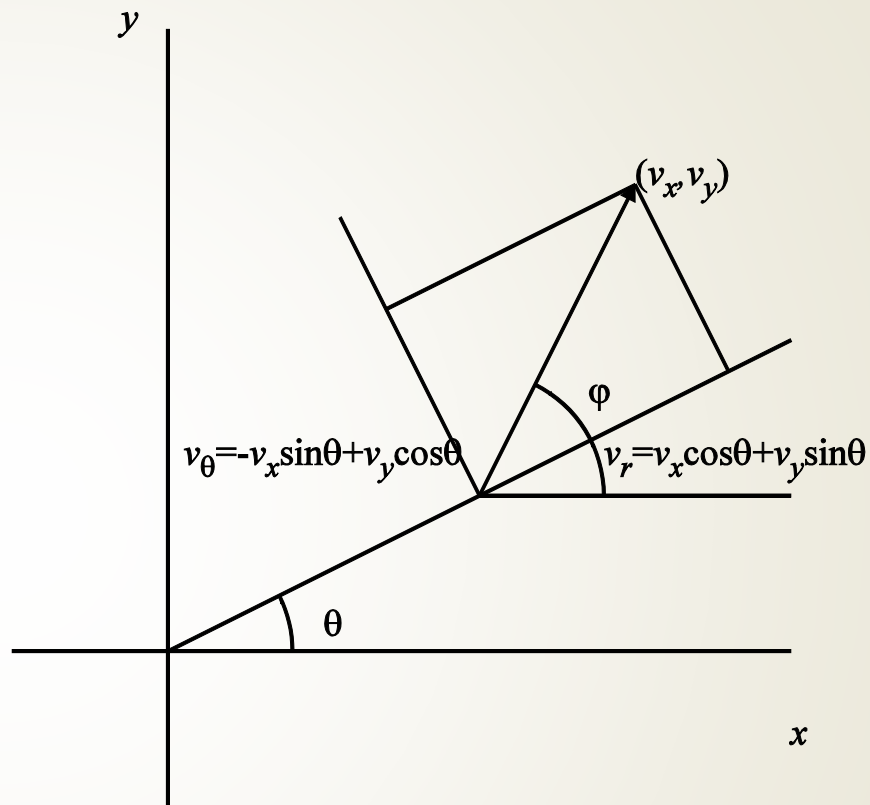
▶ 位置の極座標表示

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

▶ 時間で微分

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{dr}{dt} \cos \theta - r \frac{d\theta}{dt} \sin \theta \\ \frac{dy}{dt} = \frac{dr}{dt} \sin \theta + r \frac{d\theta}{dt} \cos \theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} \cos \theta + \frac{dy}{dt} \sin \theta = \frac{dr}{dt} \\ -\frac{dx}{dt} \sin \theta + \frac{dy}{dt} \cos \theta = r \frac{d\theta}{dt} \end{cases}$$



一般的なベクトルの変換式

$$v_r = v_x \cos \theta + v_y \sin \theta = |v| \cos(\phi - \theta)$$

$$v_\theta = -v_x \sin \theta + v_y \cos \theta = |v| \sin(\phi - \theta)$$

加速度

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \cos \theta \frac{d^2 r}{dt^2} - 2 \sin \theta \frac{dt}{dt} \frac{d\theta}{dt} - r \sin \theta \frac{d^2 \theta}{dt^2} - r \cos \theta \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \sin \theta \frac{d^2 r}{dt^2} + 2 \cos \theta \frac{dt}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r \cos \theta \frac{d^2 \theta}{dt^2} - r \sin \theta \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2$$

力の座標変換

▶ 一般式から

$$F_r = F_x \cos \theta + F_y \sin \theta$$

$$F_\theta = -F_x \sin \theta + F_y \cos \theta$$

▶ 逆に解いて

$$F_x = F_r \cos \theta - F_\theta \sin \theta$$

$$F_y = F_r \sin \theta + F_\theta \cos \theta$$

極座標表示による運動方程式

➡ x 方向の運動方程式を①、 y 方向を②と呼ぶ

➡ $\cos\theta \times \textcircled{1} + \sin\theta \times \textcircled{2}$

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \frac{1}{m} F_r$$

➡ $-\sin\theta \times \textcircled{1} + \cos\theta \times \textcircled{2}$

$$\frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\theta}{dt} \right) = \frac{1}{m} F_\theta$$

応用例：単振動子

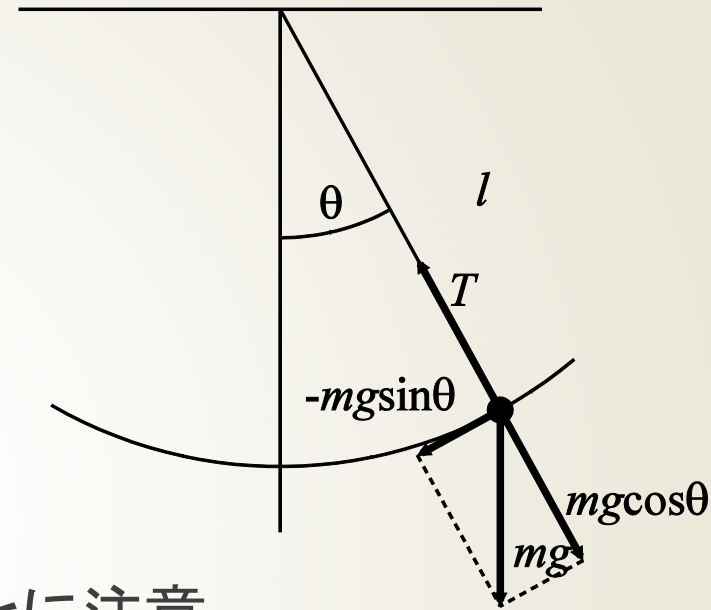
➡ 力

$$F_r = mg \cos \theta - T$$
$$F_\theta = -mg \sin \theta$$

➡ 動径方向へは動かないことに注意

$$-l \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = g \cos \theta - \frac{T}{m}$$

$$l \left(\frac{d^2\theta}{dt^2} \right) = -g \sin \theta$$



- ▶ 角度方向の加速度の式の両辺に $d\theta/dt$ を乗ずる

$$l \frac{d\theta}{dt} \left(\frac{d^2\theta}{dt^2} \right) = -g \sin \theta \frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{l}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = g \frac{d}{dt} \cos \theta$$

$$\frac{d}{dt} \left[l \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 - 2g \cos \theta \right] = 0$$

$$l \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 - 2g \cos \theta = \text{一定}$$

- ▶ 初期条件: 時刻 $t = 0$ で $\theta = \theta_0$ 、 $d\theta/dt = 0$ とする

$$l \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 - 2g \cos \theta = -2g \cos \theta_0$$

- ▶ 動径方向の式に代入

$$-2g (\cos \theta - \cos \theta_0) = g \cos \theta - \frac{T}{m}$$

$$\frac{T}{m} = g (3 \cos \theta - 2 \cos \theta_0)$$

- ▶ 角度が非常に小さいとして近似的に解く

$$\sin \theta \simeq \theta$$

- ▶ 調和振動子

$$l \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -g \theta$$

$$\theta(t) = \theta_0 \exp[i(\omega t + \delta)]$$

$$\omega^2 = \frac{g}{l}$$

- ▶ 次元から振動数を予想できる

重力による円運動

- ▶ 太陽を回る惑星の運動は、本当は楕円
 - ▶ ここでは単純化して、円、つまり動径方向には動かないとする
- ▶ 運動方程式

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = -\frac{GM}{r^2}$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\theta}{dt} \right) = 0$$

▶ 半径は一定値とする： $r = R$

▶ 周期の2乗は、半径の3乗に比例する：ケプラーの第三法則

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{GM}{R^3}$$

▶ 面積速度は保存する：ケプラーの第二法則

$$\frac{d}{dt}\left(R^2 \frac{d\theta}{dt}\right) = 0$$

重力場中の楕円運動

➡ 運動方程式

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = -\frac{GM}{r^2}$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\theta}{dt} \right) = 0$$

➡ 面積速度一定則より

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = H = \text{定数}$$

➡ 運動法則は以下のようなになる

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{H^2}{r^3} = -\frac{GM}{r^2}$$

$$s(\theta) = 1/r(\theta)$$

▶ 従属変数の変換

$$\frac{d}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \frac{d}{d\theta} = Hs^2 \frac{d}{d\theta}$$

$$\frac{dr}{dt} = Hs^2 \frac{dr}{d\theta} = Hs^2 \frac{d}{d\theta} \frac{1}{s} = -s^{-2} Hs^2 \frac{ds}{d\theta} = -H \frac{ds}{d\theta}$$

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = Hs^2 \frac{d}{d\theta} \left(-H \frac{ds}{d\theta} \right) = -Hs^2 \frac{d^2 s}{d\theta^2}$$

▶ 運動方程式は

$$\frac{d^2 s}{d\theta^2} = -s + \frac{GM}{H^2}$$

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \left(s - \frac{GM}{H^2} \right) = - \left(s - \frac{GM}{H^2} \right)$$

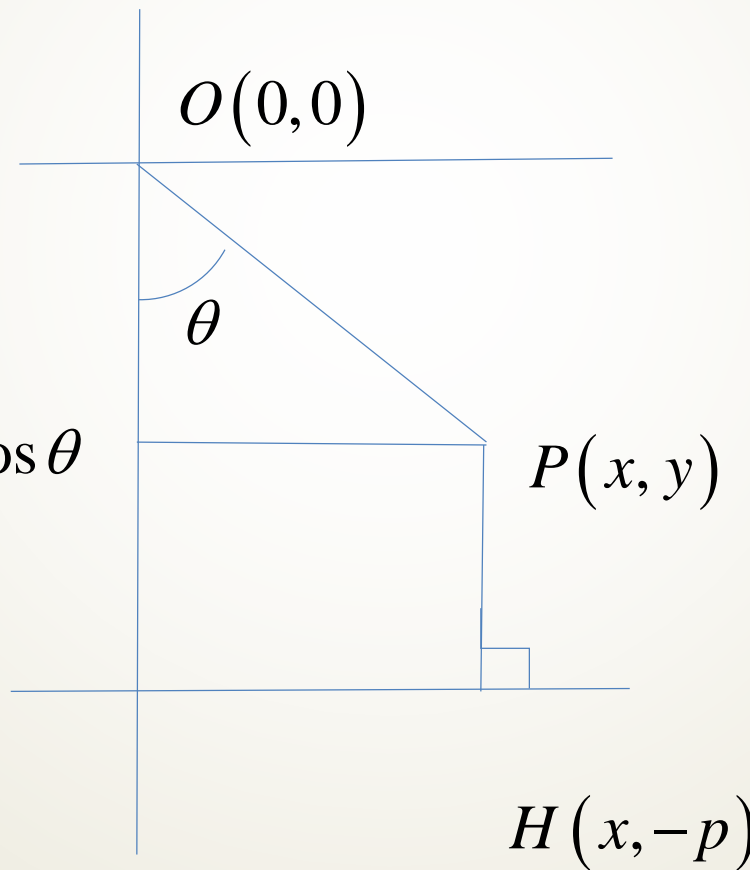
$$s - \frac{GM}{H^2} = A \cos \theta$$

- ▶ 位相差は、角度の原点の選び方なのでゼロとした
- ▶ 楕円または双曲線
 - ▶ 惑星または彗星

$$r = \frac{\frac{H^2}{GM}}{\frac{H^2}{GM} A \cos \theta + 1}$$

二次曲線と極表示

$$-\sqrt{x^2 + y^2} \cos \theta$$



$$e = \frac{OP}{PH}$$

e が一定である曲線

- ▶ $e = 1$ の場合
- ▶ 二次曲線となる

$$\sqrt{x^2 + y^2} = y + p$$

$$x^2 + y^2 = y^2 + 2py + p^2$$

$$y = \frac{1}{2p}(x^2 - p^2)$$

- ▶ 角度と動径の関係

$$r \cos \theta + r = p$$

$$r = \frac{p}{1 + \cos \theta}$$

➡ $0 < e < 1$ の場合

$$\sqrt{x^2 + y^2} = e(y + p)$$

$$x^2 + y^2 = e^2(y^2 + 2py + p^2)$$

$$x^2 + (1 - e^2)\left(y - \frac{e^2 p}{1 - e^2}\right)^2 = e^2 p^2 \frac{1}{1 - e^2}$$

➡ 楕円

$$r \cos \theta + \frac{r}{e} = p$$

$$r = \frac{ep}{1 + e \cos \theta}$$

▶ $e > 1$ の場合

$$\sqrt{x^2 + y^2} = e(y + p)$$

$$x^2 + y^2 = e^2(y^2 + 2py + p^2)$$

$$-x^2 + (e^2 - 1)\left(y + \frac{e^2 p}{e^2 - 1}\right)^2 = e^2 p^2 \frac{1}{e^2 - 1}$$

▶ 双曲線

$$r \cos \theta + \frac{r}{e} = p$$

$$r = \frac{ep}{1 + e \cos \theta}$$