情報と物理：解析力学入門

只木進一

2015年後期

力学を導く原理？

- Newton力学
  - Newtonは、何かの原理から運動法則を導いたのではない
- しかし、
  - 人は、常に上位の「原理」を探している
  - 「なぜ、〇〇の法則は成り立つか？」
- 何かの原理からNewton力学を導出できるか

最小作用原理
Principle of Least Action

- Newton力学を原理的に導出する
  - 何かを最大または最小にするのがNewton力学？
  - 実現される運動は何かの最適化
- 準備
  - 力学法則は座標系に依存しない
  - 一般的な座標系を利用する

$$\{q_1, q_2, \ldots\}$$

Lagrange形式の理論

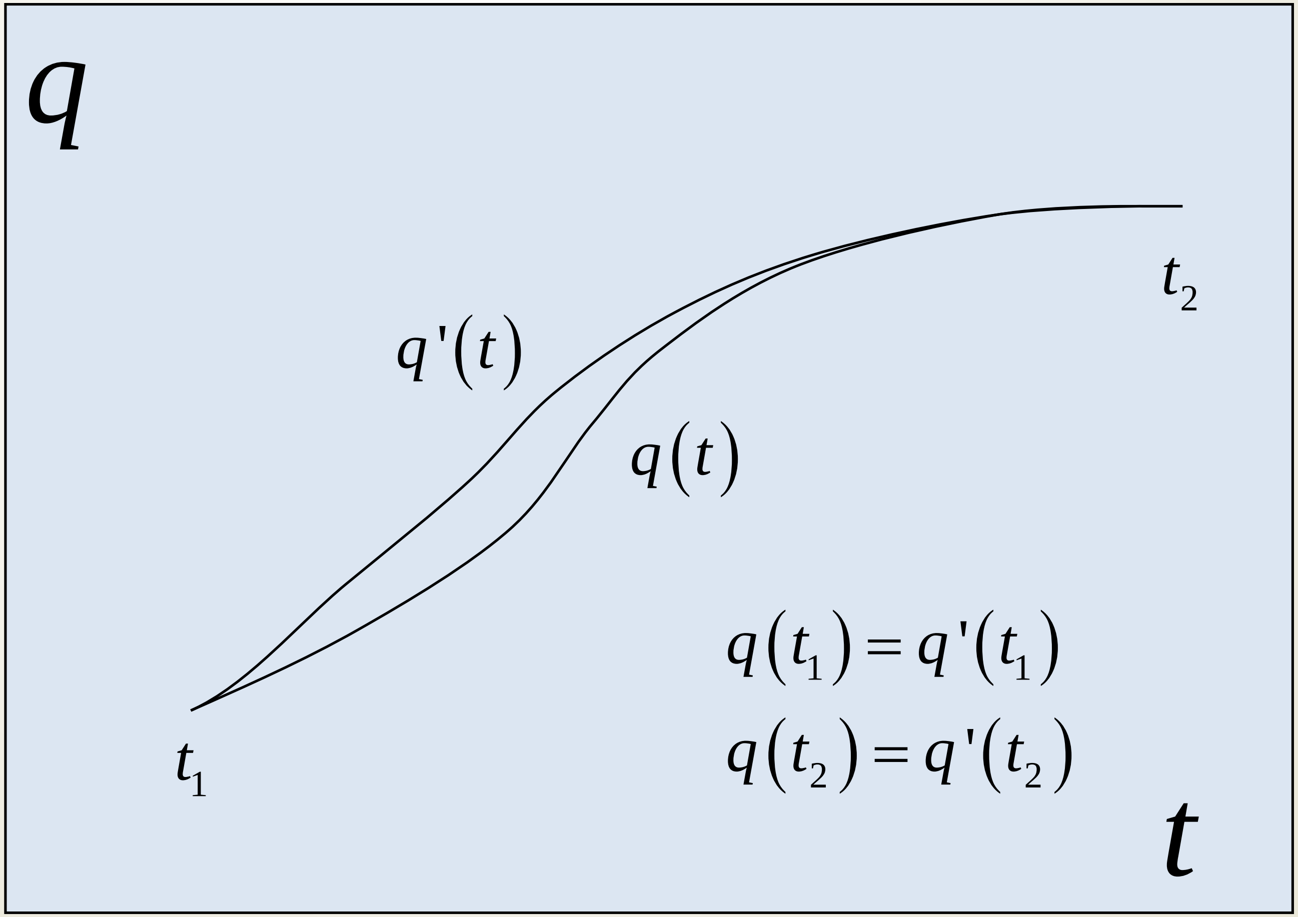
- 一次元運動を考える
  - 位置qとその時間微分$\dot{q}$
  - 位置エネルギー$V(q)$
- Lagrangian ($q(t)$と$\dot{q}(t)$の関数)

$$L\big(q(t),\dot{q}(t)\big)=\frac{1}{2}m\dot{q}(t)^2-V\big(q(t)\big)$$

- 作用

$$I=\int_{t_1}^{t_2}L\big(q(t),\dot{q}(t)\big)\mathrm{d}t$$

Lagrange形式の理論
二つの経路$q(t)$と$q'(t)$



Lagrange形式の理論
二つの経路$q(t)$と$q'(t)$の意味

- 関数$\eta(t)$:条件$\eta(t_1) = \eta(t_2) = 0$を満たす($\epsilon \ll 1$)

$$q'(t) = q(t) + \epsilon\eta(t)$$

$$\delta q(t) \equiv q'(t) - q(t) = \epsilon\eta(t)$$

$$\delta \dot{q}(t) \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta q(t) = \dot{q}'(t) - \dot{q}(t)$$

変分(variation)と呼ぶ

Lagrange形式の理論
経路のずれ

- Lagrangianの経路$q'(t)$に対する経路$q(t)$からのずれ
  - qと$\dot{q}$を独立として扱うことに注意

$$
\begin{aligned}
L\left(q'(t),\dot{q}'(t)\right) &= L\left(q(t)+\delta q(t),\dot{q}'(t)+\delta \dot{q}(t)\right) \\
&= L\left(q(t),\dot{q}(t)\right)+\frac{\partial L}{\partial q}\delta q(t)+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta \dot{q}(t)+\dots
\end{aligned}
$$

ϵによる展開と同等

$$
\delta L=\frac{\partial L}{\partial q}\delta q(t)+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta \dot{q}(t)
$$

Lagrange形式の理論
作用の差

$$
\begin{aligned}
\delta I &= \int_{t_1}^{t_2} \delta L \mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \delta q \right] \mathrm{d}t \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q} \delta q - \delta q \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right] \mathrm{d}t + \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right]_{t_1}^{t_2} \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right] \delta q \mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

注意：部分積分

Hamiltonの最小作用の原理

- 作用の極値が、軌道を与える。

$$\delta I = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right] \delta q \mathrm{d}t = 0$$

- 任意の軌道のずれδqに対して上式が成り立つには

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0$$

- Euler-Lagrange方程式

Hamiltonの最小作用の原理

$$\frac{\partial L}{\partial q} = -\frac{\partial V}{\partial q}, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q}$$

$$m\frac{\mathrm{d}\dot{q}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial V}{\partial q}$$

- 作用を最小化する軌道が、運動方程式の解
- 運動方程式がEuler-Lagrange方程式として導出できる

変分法 (Variational method)

- Lagrangian Lは、時間の関数としての位置$q(t)$とその時間微分$\dot{q}(t)$の汎関数(functional)(関数の「関数」)
- 汎関数を関数で微分することを変分(variation)と呼ぶ

エネルギー保存則
Energy Conservation

- Langangian$L$が時刻tに陽に依存しない
  - 座標qと速度$\dot{q}$を通じて時刻tに陰に依存
  - $\frac{\partial L}{\partial t}$が右辺に表れない

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i}\frac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}t} + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\mathrm{d}\dot{q}_i}{\mathrm{d}t}$$

- Euler-Lagrange方程式から

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = \sum_i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}t} + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\mathrm{d}\dot{q}_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_i \left(\dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \right] = 0$$

- $\tilde{E}$は保存する。つまり時間に対して不変

$$\tilde{E} = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L$$

- Descartes座標では

$$L = \frac{1}{2} m \sum_i \dot{q}_i^{\,2} - V\left(\vec{q}\right)$$

$$\tilde{E} = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L = m \sum_i \dot{q}_i^2 - \frac{1}{2} m \sum_i \dot{q}_i^2 + V\left(\vec{q}\right)$$

$$= \frac{1}{2} m \sum_i \dot{q}_i^2 + V\left(\vec{q}\right) = E$$

- エネルギー保存が導出された

Hamiltonの正準形式

- 運動量をLagrangianを通じて定義する

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$$

- Euler-Lagrange方程式から

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial L}{\partial q}$$

Hamiltonの正準形式

- 座標qと対応する運動量pを独立変数とする
  - $\dot{q}$はqとpの関数
- Hamiltonian

$$H(q,p)=\dot{q}(q,p)\,p-L\bigl(q,\dot{q}(q,p)\bigr)$$

  - エネルギーの表式であることに注意

Hamiltonの正準形式

- Hamiltonianの形式的全微分

$$\mathrm{d}H\left(q,p\right)=\frac{\partial H}{\partial q}\mathrm{d}q+\frac{\partial H}{\partial p}\mathrm{d}p$$

$$=\left[\frac{\partial\left(\dot{q}p\right)}{\partial q}-\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}\frac{\partial\dot{q}}{\partial q}-\frac{\partial L}{\partial q}\right]\mathrm{d}q+\left[\frac{\partial\left(\dot{q}p\right)}{\partial p}-\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}\frac{\partial\dot{q}}{\partial p}\right]\mathrm{d}p$$

$$=\left[\frac{\partial\dot{q}}{\partial q}p-p\frac{\partial\dot{q}}{\partial q}-\dot{p}\right]\mathrm{d}q+\left[\frac{\partial\dot{q}}{\partial p}p+\dot{q}-p\frac{\partial\dot{q}}{\partial p}\right]\mathrm{d}p$$

$$=-\dot{p}\,\mathrm{d}q+\dot{q}\,\mathrm{d}p$$

Hamiltonの正準方程式

- Hamiltonianの形式的全微分とLagrangianを使った全微分を比較すると
  - 運動方程式が一階連立微分方程式として得られる

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial p}$$

  - 注意:第二の式は、qに対応した「速度」を与えるものではなく、qの時間変化を与えるものと解する

例：一次元の重力中の運動

- 運動エネルギーと位置エネルギー

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2, \quad V = mgx$$

- Lagrangian

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - mgx$$

例：一次元の重力中の運動 Lagrange形式

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -mg, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$$

- Euler-Lagrange方程式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = m\ddot{x} + mg = 0 \quad \Rightarrow \quad m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -mg$$

例：一次元の重力中の運動 Hamilton正準方程式

- $(x,\dot{x})$から(x,p)へ

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$$

- Hamiltonian

$$H = p\dot{x} - L = \frac{1}{m}p^2 - \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + mgx = \frac{p^2}{2m} + mgx$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} = mg, \quad \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}$$

- 正準方程式

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = -mg, \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{p}{m}$$

一次元調和振動子

- 運動エネルギーと位置エネルギー

$$T = \frac{1}{2} m\dot{x}^2, \quad V = \frac{1}{2} kx^2$$

- Lagrangian

$$L = T - V = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 - \frac{1}{2} kx^2$$

例:一次元調和振動子 Lagrange形式

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -kx, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$$

- Euler-Lagrange方程式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = m\ddot{x} + kx = 0 \quad \Rightarrow \quad m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -kx$$

例：一次元調和振動子 Hamilton正準方程式

- $(x,\dot{x})$から(x,p)へ

$$p=\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=m\dot{x}$$

- Hamiltonian

$$H=p\dot{x}-L=\frac{p^2}{2m}+\frac{1}{2}kx^2$$

$$\frac{\partial H}{\partial x}=kx,\quad \frac{\partial H}{\partial p}=\frac{p}{m}$$

- 正準方程式

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}=-kx,\quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{p}{m}$$

例：一次元の非線形振動

- 運動エネルギーと位置エネルギー

$$T = \frac{1}{2} m\dot{x}^2, \quad V = \frac{1}{2} kx^2 + \frac{1}{4} \lambda x^4$$

- Lagrangian

$$L = T - V = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 - \frac{1}{2} kx^2 - \frac{1}{4} \lambda x^4$$

例:一次元の非線形振動 Lagrange形式

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -kx - \lambda x^3, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$$

- Euler-Lagrange方程式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = m\ddot{x} + kx + \lambda x^3 = 0$$

$$\Rightarrow \quad m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -kx - \lambda x^3$$

例：一次元の非線形振動 Hamilton正準方程式

- $(x, \dot{x})$から(x, p)へ

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$$

- Hamiltonian

$$H = p\dot{x} - L = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{4}\lambda x^4$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} = kx + \lambda x^3, \quad \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}$$

- 正準方程式

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = -kx - \lambda x^3, \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{p}{m}$$

例: 中心力場中の粒子の運動(2次元)

- Lagrangian

$$L = \frac{1}{2} m \left(v_x^2 + v_y^2 \right) - V\left(\sqrt{(x^2 + y^2)} \right)$$

- 極座標へ

$$x = r\cos\theta \qquad v_x = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta$$

$$y = r\sin\theta \qquad v_y = \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta$$

例:中心力場中の粒子の運動(2次元):極座標でのLagrangian

$$L=\frac{m}{2}\left(\dot{r}^2\cos^2\theta-2r\dot{r}\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta+r^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta\right)$$

$$+\frac{m}{2}\left(\dot{r}^2\sin^2\theta+2r\dot{r}\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta+r^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta\right)-V(r)$$

$$=\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2\right)-V(r)$$

例: 中心力場中の粒子の運動(2次元):Euler-Lagrange方程式

- Euler-Lagrange方程式

$$\frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\theta}^2 - \frac{\partial U}{\partial r} \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}$$

- 以上から

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + \frac{\partial V}{\partial r} = 0$$

$$m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r^2\dot{\theta}\right) = 0$$

例:中心力場中の運動(2次元):Hamilton形式

- Hamilton形式へ

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \quad p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}$$

$$\begin{aligned} H &= p_r\dot{r} + p_\theta\dot{\theta} - L \\ &= \frac{p_r^2}{m} + \frac{p_\theta{}^2}{mr^2} - \left[\frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta{}^2}{2mr^2} - V(r)\right] \\ &= \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{1}{r^2}p_\theta^2\right) + V(r) \end{aligned}$$

例：中心力場中の粒子の運動(2次元):正準方程式

- 正準方程式

$$\frac{\mathrm{d}p_r}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{{p_\theta}^2}{mr^3} - \frac{\partial V}{\partial r}$$

$$\frac{\mathrm{d}p_\theta}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m}$$

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{1}{m}\frac{p_\theta}{r^2}$$

例：二体問題

- 二つの粒子(質量m_1とm_2)が、その相対距離rのみで決まるポテンシャルの下で運動
- Lagrangian

$$L = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^{\ 2} + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^{\ 2} - V(r)$$

- 重心座標$\vec{R}$と相対座標$\vec{r}$を導入

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{x}_1 + m_2\vec{x}_2}{M}, \quad M = m_1 + m_2$$

$$\vec{r} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{x}_1 = \vec{R} + \frac{m_2}{M}\vec{r}$$

$$\vec{x}_2 = \vec{R} - \frac{m_1}{M}\vec{r}$$

- Lagrangianを書き直す

$$L=\frac{1}{2}m_1\dot{x}_1{}^2+\frac{1}{2}m_2\dot{x}_2{}^2-V(r)$$

$$=\frac{1}{2}m_1\left(\dot{\vec{R}}+\frac{m_2}{M}\dot{\vec{r}}\right)^2+\frac{1}{2}m_2\left(\dot{\vec{R}}-\frac{m_1}{M}\dot{\vec{r}}\right)^2-V(r)$$

$$=\frac{1}{2}M\dot{R}^2+\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2-V(r),\quad \mu=\frac{m_1m_2}{M}$$

- 重心$\vec{R}$は自由運動
- 相対位置$\vec{r}$は、質量μの粒子がポテンシャル$V(r)$内での運動に対応

正準変換

- Hamilton正準方程式を成立させる座標と運動量の組:正準変数
- 正準変換:正準である変数(q, p)から、正準である他の変数の組$\big(q'(q,p), p'(q,p)\big)$への変換
- 位相空間:正準変数の組がはる空間

正準変換の例

- デカルト座標(x, y)から極座標(r, θ)へ
- デカルト座標(x, y) に対応した Lagrangian

$$L = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 \right) - V(x, y)$$

- デカルト座標(x, y) に対応した運動量

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}$$

- 極座標へ

$$\dot{x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(r\cos\theta\right) = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta$$

$$\dot{y} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(r\sin\theta\right) = \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta$$

$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - V\left(r,\theta\right)$$

- 運動量の正準変換

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \quad p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}$$

一般的物理量$F(q,p)$の時間変化

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial F}{\partial q}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}$$

$$=\frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial p}-\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial H}{\partial q}$$

$$=[F,H]$$

- Poisson括弧

$$[A,B]=\frac{\partial A}{\partial q}\frac{\partial B}{\partial p}-\frac{\partial B}{\partial q}\frac{\partial A}{\partial p}$$