情報と物理：
エネルギー保存則
Energy Conservation

只木進一

2015年後期

エネルギーとは

- 他の物体に働きかける「能力」
  - 17世紀から18世紀にかけて論争に
  - 日常用語との関係で混乱
    - 今でもいろいろある
- 今の言葉でいうと「エネルギー」と「運動量」

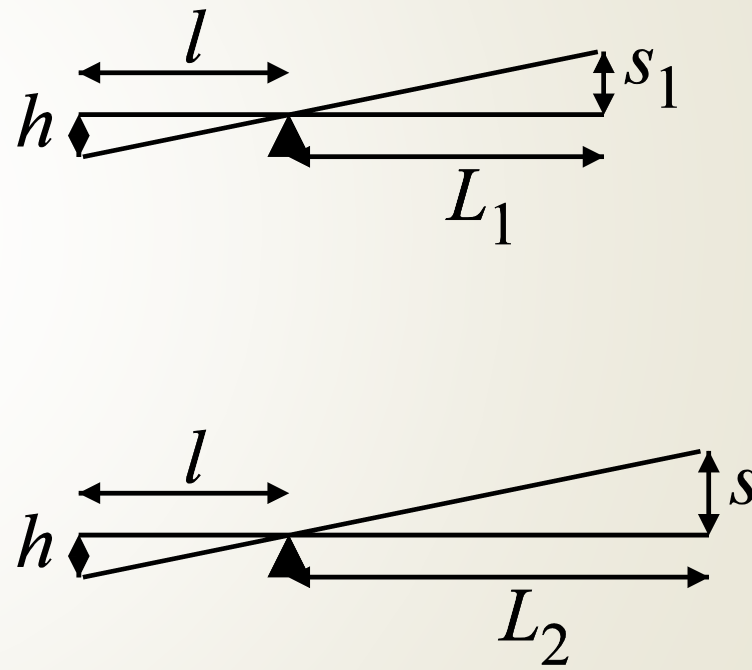
仕事：てこの場合

- 重力wが働いている物体をテコを使って高さhだけ持ち上げる
  - 支えから物体までの長さℓ
- 支えから長さL_1の場所を力F_1で距離s_1動かす

$$w\ell = F_1 L_1$$

- 支えから長さL_2の場所を力F_2で距離s_2動かす

$$w\ell = F_2 L_2$$



$$F_1 L_1 = F_2 L_2 = w\ell$$

- 相似性より

$$F_1 s_1 = F_2 s_2 = wh$$

  - 持ち上げた高さのみで決まることに注意

- 仕事=力×距離

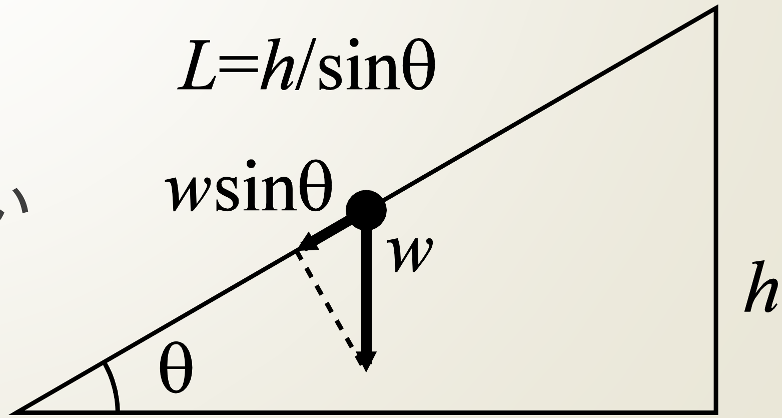
仕事:斜面の場合

- 斜面を使って持ち上げる
- 斜面に沿って移動させるのに必要な力:$w\sin\theta$
- 斜面の長さ:$h/\sin\theta$

- 力×距離

$$w\sin\theta\times\frac{h}{\sin\theta}=wh$$

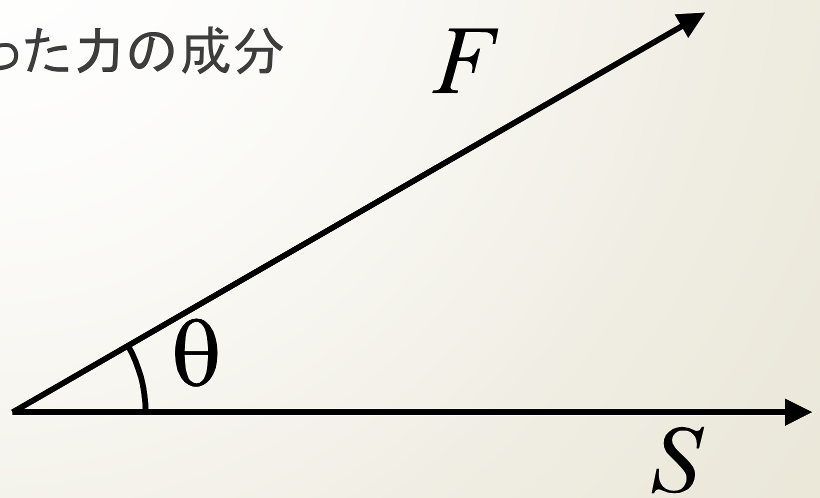
  - 斜面の傾きに依存しない



- 力と移動の向きが異なる場合
  - 内積

$$\vec{F}\cdot\vec{S}=FS\cos\theta$$

  - 移動の方向に沿った力の成分



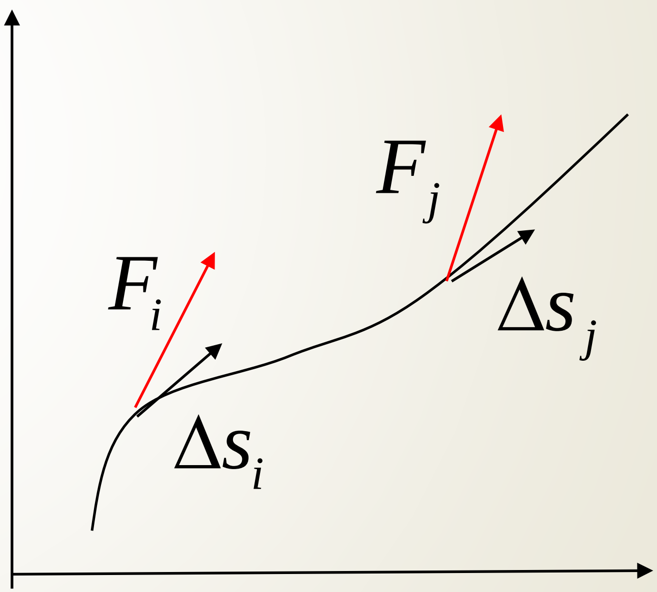
仕事と線積分

- 曲線を小さな断片に分割して、その部分に働く力を考える

$$W=\sum_i F_i\cdot\Delta s_i$$

- 断片のサイズを無限小にする

$$W=\int_C \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{s}$$



- 積分路のパラメタ表示
  - 積分路Cは曲線→一次元で表示できる
  - パラメタ表示：パラメタtを使って

$$\left(x(t),y(t)\right)$$

$$w=\int_C \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{s}=\int_a^b \mathrm{d}t\left[F_x(\vec{x})\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+F_y(\vec{x})\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right]$$

線積分の例

- 二次曲線$C: y = x^2$に沿って(0,0)から(2,4)まで

$$F_x = 2xy,\ F_y = x^2$$

を積分

- 曲線のパラメタ表示

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^2 \end{cases} \quad (0 \le t \le 2)$$

$$w=\int_C \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{s}=\int_0^2 \mathrm{d}t\left[F_x\left(\vec{x}\right)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+F_y\left(\vec{x}\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right]$$

$$=\int_0^2 \mathrm{d}t\left[2xy\cdot 1+x^2\cdot 2t\right]=\int_0^2 \mathrm{d}t\left[2t^3\cdot 1+t^2\cdot 2t\right]$$

$$=4\int_0^2 \mathrm{t}^3\mathrm{d}t=4\left[\frac{t^4}{4}\right]_0^2=16$$

運動エネルギー

- 粒子に外力$\vec{F}(\vec{r})$を働かせて移動した結果は？

$$m\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} = \vec{F}\left(\vec{r}\right)$$

$$m\vec{v}\cdot\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} = \vec{v}\cdot\vec{F}\left(\vec{r}\right)$$

両辺に$\vec{v}$を乗じる

$$\vec{v}\cdot\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}=\vec{v}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}v^2$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)=\vec{v}\cdot\vec{F}\left(\vec{r}\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}T\left(t\right)=\vec{v}\cdot\vec{F}\left(\vec{r}\right),\ T\left(t\right)=\frac{1}{2}mv\left(t\right)^2$$

- 軌道に沿って積分

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\mathrm{d}T(t)}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(\vec{r}) \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \int_C \vec{F}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{r} = W$$

- 一方

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\mathrm{d}T(t)}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \int_{T(t_1)}^{T(t_2)} \mathrm{d}T = T(t_2) - T(t_1)$$

- つまり、行った仕事は、運動エネルギーの増分となる

エネルギーの次元

- 力の次元
  - $[MLT^{-2}]$
- エネルギーの次元
  - $[ML^2T^{-2}]$

偏微分

- 二つの独立変数xとyの関数$f(x, y)$
- 一方の変数だけの変化率
  - 偏微分

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\left(x + \Delta x, y\right) - f\left(x, y\right)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f\left(x, y + \Delta\right) - f\left(x, y\right)}{\Delta y}$$

全微分

- 二つの独立変数xとyの関数$f(x, y)$

$$\Delta f = f\left(x+\Delta x, y+\Delta y\right) - f\left(x, y\right)$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + O\left(\Delta^2\right)$$

- 全微分

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y$$

ポテンシャルエネルギー Potential Energy

- 仕事の線積分を構成する微小断片$\vec{F}\cdot\Delta\vec{s}$が位置だけの関数と仮定する。
  - つまり、時刻、そこに至った経路・速度に依存しない

$$\vec{F}\cdot\Delta\vec{s} = -\Delta U$$

$$\vec{F} = -\nabla U$$

$$\nabla = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y}$$

ナブラ

- ポテンシャルが定義できるとき、以下は経路に依らない

$$-\int \mathrm{d}U = \int \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$$

  - 問:どうして経路に依存しないか？
- 仕事との関係
  - 与えた仕事の量とそれによって生じたポテンシャルの差が等しい

$$-\int \mathrm{d}U = -U\left(\vec{r}_{\mathrm{A}}\right) + U\left(\vec{r}_{\mathrm{B}}\right) = \int \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = W$$

- ポテンシャルの例

$$U = -x^2 y$$

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = 2xy$$

$$F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} = x^2$$

- 仕事によって生じた運動エネルギーの差とポテンシャルの差を組み合わせると

$$W=T(t_{\mathrm{B}})-T(t_{\mathrm{A}})=U(\vec{r}_{\mathrm{A}})-U(\vec{r}_{\mathrm{B}})$$

$$T(t_{\mathrm{A}})+U(\vec{r}_{\mathrm{A}})=T(t_{\mathrm{B}})+U(\vec{r}_{\mathrm{B}})$$

- つまり、運動エネルギーとポテンシャルの和が不変になる
- ポテンシャルを位置エネルギーと呼ぶことがある

エネルギーから運動を見直す1 鉛直下方向の一様重力加速度

- 運動方程式

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}=0$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}=-mg$$

- ポテンシャルで考えると

$$U(x,y)=mgy$$

$$F_x=-\frac{\partial U}{\partial x}=0$$

$$F_y=-\frac{\partial U}{\partial y}=-mg$$

- エネルギー保存則

$$\frac{1}{2}mv(t_{\mathrm{A}})^2 + mgy(t_{\mathrm{A}}) = \frac{1}{2}mv(t_{\mathrm{B}})^2 + mgy(t_{\mathrm{B}})$$

- 初期条件$t = 0$

$$\vec{r}(t=0) = (0,0)$$
$$\vec{v}(t=0) = (v_x, v_y)$$

- 軌道の頂点

$$\vec{v}\left(t_{\mathrm{top}}\right)=\left(v_x,0\right)$$

$$\frac{1}{2}m\left(v_x^2+v_y^2\right)=\frac{1}{2}m{v_x}^2+mgy$$

- 頂点の高さ

$$y=\frac{1}{2g}{v_y}^2$$

- 運動方程式を解いていないことに注意

エネルギーから運動を見直す2 調和振動子

- 運動方程式

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -kx$$

- ポテンシャルエネルギーと力

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2$$

$$F_X = -\frac{\partial U}{\partial x} = -kx$$

- 初期条件$t = 0$で変位x_0で、初速$v_0 = 0$

$$E = \frac{1}{2}kx_0^2$$

- 速度がゼロとなる、つまり振幅最大の状態

$$x = \pm x_0$$

- 振幅ゼロ、つまり速度最大

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kx_o^2$$

$$v = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}x_0$$

非調和振動子
運動方程式が解けない場合

- 運動方程式：非線形項があり、解けない

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-kx-\lambda x^3$$

- ポテンシャルエネルギー

$$U\left(x\right)=\frac{1}{2}kx^2+\frac{1}{4}\lambda x^4$$

- エネルギー

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + U(x)$$

- $x = 0$を通過する際の速度

$$v = \pm\sqrt{\frac{2E}{m}}$$

- 最大振幅:$v = 0$

$$\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{4}\lambda x^4 - E = 0$$

$$x_0^2 = \frac{1}{\lambda}\left[-k \pm \sqrt{k^2 + 4\lambda E}\right]$$