# 情報と物理：粒子の簡単な運動

只木進一

2015年後期

# 運動方程式とその解

- 1次元の運動方程式

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = F$$

- 未知関数$x(t)$に対する微分方程式
  - 方程式→等号が成り立つ解を求める
  - 解は関数$x(t)$
- 力を与えて粒子に加速を生じさせる
  - つまり速度を変化させる
- 位置を直接変化させることはできない

- 力は定数とは限らない

$$F = F\left(x, v, t\right)$$

- 位置の2階以上の微分を含まないことが知られている
- 力が、位置、速度、時間に依存する例？

# 運動方程式を解くということ

- 二階微分方程式を一階連立微分方程式へ

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = F$$

⇩

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v$$

速度$v$によって位置$x$が変化

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{m}F\left(x, v, t\right)$$

力$F$によって速度$v$が変化

- 時刻$t = 0$とその直後$t = \varepsilon$

$O(\epsilon^2)$を無視

$$\frac{x(\epsilon)-x(0)}{\epsilon}=v(0)$$

$$\frac{v(\epsilon)-v(0)}{\epsilon}=\frac{1}{m}F\left(x(0),v(0),0\right)$$

$$\Downarrow$$

$$x(\epsilon)=x(0)+v(0)\epsilon$$

$$v(\epsilon)=v(0)+\frac{1}{m}F\left(x(0),v(0),0\right)\epsilon$$

- 次の時刻$t = 2\varepsilon$

$$x(2\epsilon) = x(\epsilon) + v(\epsilon)\epsilon = \left[x(0) + v(0)\epsilon\right] + \left[v(0) + \frac{1}{m}F\left(x(0), v(0), 0\right)\epsilon\right]\epsilon$$

$$= x(0) + v(0)(2\epsilon) + \frac{1}{m}F\left(x(0), v(0), 0\right)\epsilon^2$$

$$v(2\epsilon) = v(\epsilon) + \frac{1}{m}F\left(x(\epsilon), v(\epsilon), \epsilon\right)\epsilon$$

$$= v(0) + \frac{1}{m}F\left(x(0), v(0), 0\right)\epsilon + \frac{1}{m}F\left(x(\epsilon), v(\epsilon), \epsilon\right)\epsilon$$

- 初期値を与えなければ定まらない

$$x(0), v(0)$$

- 力$F$が一定の場合の漸化式

$$x(k\epsilon) = x((k-1)\epsilon) + v((k-1)\epsilon)\epsilon$$

$$v(k\epsilon) = v((k-1)\epsilon) + \frac{1}{m}F\epsilon$$

- はじめの数項の様子を見る

$$x(\epsilon) = x(0) + v(0)\epsilon$$

$$v(\epsilon) = v(0) + \frac{1}{m}F\epsilon$$

$$x(2\epsilon) = x(\epsilon) + v(\epsilon)\epsilon = x(0) + v(0)\epsilon + \left[v(0) + \frac{1}{m}F\epsilon\right]\epsilon$$

$$= x(0) + v(0)(2\epsilon) + \frac{1}{m}F\epsilon^2$$

$$v(2\epsilon) = v(\epsilon) + \frac{1}{m}F\epsilon = v(0) + \frac{1}{m}F \times (2\epsilon)$$

$$
\begin{aligned}
x(3\epsilon) &= x(2\epsilon) + v(2\epsilon)\epsilon \\
&= x(0) + v(0)\times(2\epsilon) + \frac{1}{m}F\epsilon^2 + \left[v(0) + \frac{1}{m}F\times(2\epsilon)\right]\epsilon \\
&= x(0) + v(0)\times(3\epsilon) + \frac{1}{m}F\times(1+2)\epsilon^2
\end{aligned}
$$

$$
v(3\epsilon) = v(2\epsilon) + \frac{1}{m}F\epsilon = v(0) + \frac{1}{m}F\times(3\epsilon)
$$

$$x(4\epsilon) = x(3\epsilon) + v(3\epsilon)\epsilon$$

$$= x(0) + v(0)\times(3\epsilon) + \frac{1}{m}F(1+2)\epsilon^2 + \left[v(0) + \frac{1}{m}F\times(3\epsilon)\right]\epsilon$$

$$= x(0) + v(0)\times(4\epsilon) + \frac{1}{m}F\times(1+2+3)\epsilon^2$$

$$v(4\epsilon) = v(3\epsilon) + \frac{1}{m}F\epsilon = v(0) + \frac{1}{m}F\times(4\epsilon)$$

# 漸化式の解

$$x(k\epsilon) = x(0) + v(0)\times(k\epsilon) + \frac{1}{m}F\times\left(\sum_{j=0}^{k-1} j\right)\epsilon^2$$

$$= x(0) + v(0)\times(k\epsilon) + \frac{1}{m}F\times\left(\frac{k(k-1)}{2}\right)\epsilon^2$$

$$v(k\epsilon) = v(0) + \frac{1}{m}F\times(k\epsilon)$$

- 数学的帰納法による証明が必要

# 時刻の関数として表示

- 時刻0から$t$までの運動を考え、時間を十分大きな数$n$に分割したと考える

$$t = n\epsilon$$

$$x(t) = x(0) + v(0)t + \frac{1}{m}F\left(\frac{n(n-1)}{2n^2}\right)t^2$$

$$v(t) = v(0) + \frac{1}{m}Ft$$

- $n$を十分に大きく

$$n \to \infty$$

$$x(t) = x(0) + v(0)t + \frac{1}{2m}Ft^2$$

$$v(t) = v(0) + \frac{1}{m}Ft$$

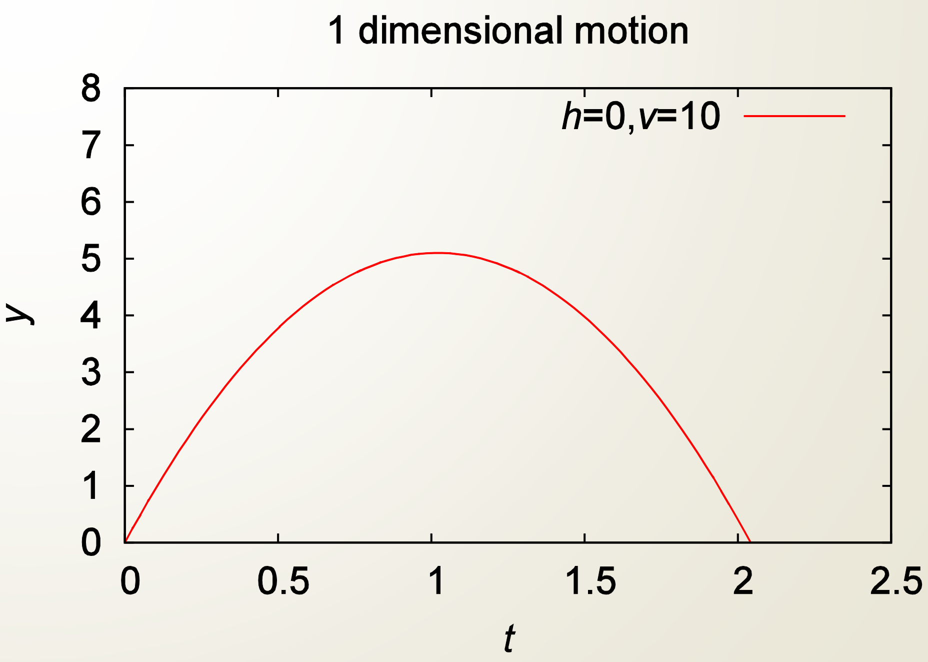
- 初期値を定めなければ、具体の運動は定まらない
  - 位置と時間の原点を変えても、法則が変わらない
- 初期値を指定しない解を「一般解」と呼ぶ

# 重力場中の一次元運動

- 高さ$h$の位置から鉛直上方向に初速$v$で投げ上げる

$$y(t) = h + vt - \frac{1}{2}gt^2$$

$$v(t) = v - gt$$



# 重力場中の二次元運動

- 運動方程式
  - 水平方向には力は働かない
  - 鉛直下向きに$mg$の力が働く
- 一般解

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = 0$$

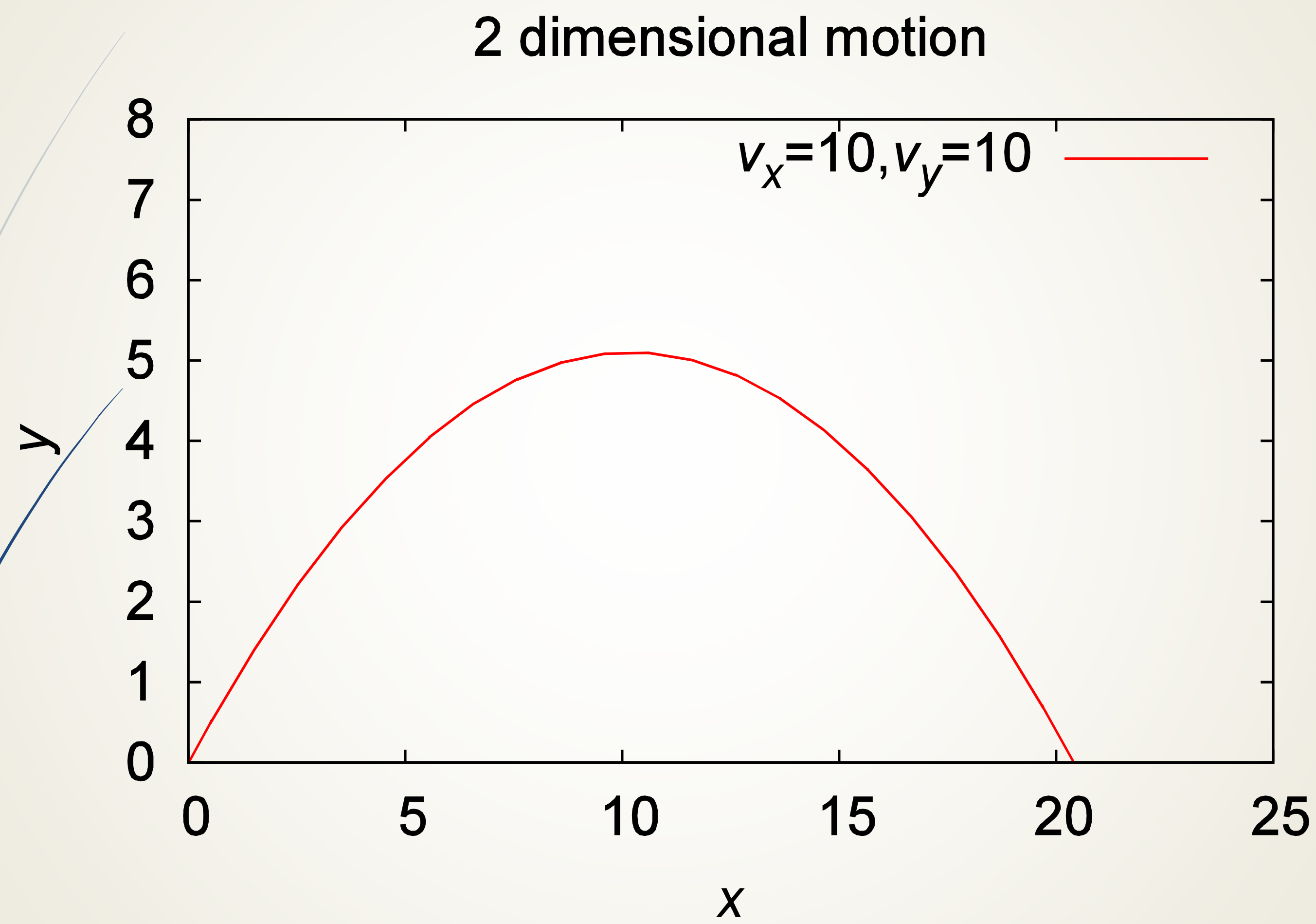
$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = -g$$

$$x(t) = x(0) + v_x t$$

$$v_x(t) = v_x$$

$$y(t) = y(0) + v_y t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$v_y(t) = v_y - gt$$


2 dimensional motion
$v_x$=10,$v_y$=10
8
7
6
5
4
3
2
1
0
0
5
10
15
20
25
y
x

# 投げ上げる速度一定で、角度を変える

- 初期値

$$x(0)=0$$

$$y(0)=0$$

$$v_x(0)=v\cos\theta$$

$$v_y(0)=v\sin\theta$$

- 速度の大きさ$v$は一定のまま、角度$\theta$を変える

# 頂点を結ぶ曲線

- 頂点は、鉛直方向の速度がゼロとなる点
  - 頂点にとなる時刻を$t_{\mathrm{peak}}$とする

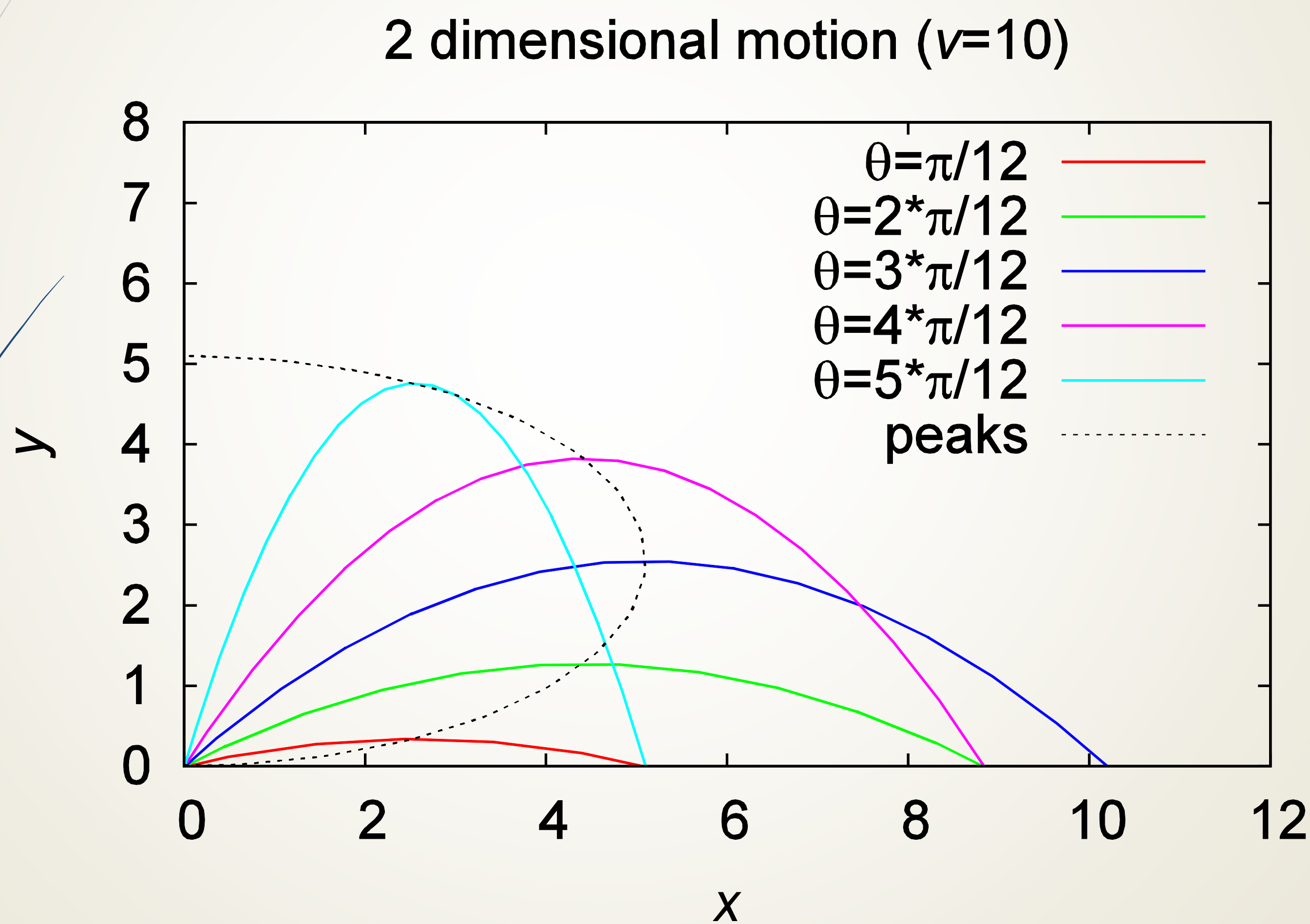
$$v\sin\theta - gt_{\mathrm{peak}} = 0 \rightarrow t_{\mathrm{peak}} = \frac{v}{g}\sin\theta$$

  - 頂点の座標

$$x_{\mathrm{peak}} = v\cos\theta t_{\mathrm{peak}} = \frac{v^2}{g}\cos\theta\sin\theta = \frac{v^2}{2g}\cos 2\theta$$

$$y_{\mathrm{peak}} = v\sin\theta t_{\mathrm{peak}} - \frac{1}{2}gt^2{}_{\mathrm{peak}} = \frac{1}{2}\frac{v^2}{g}\sin^2\theta$$

$$= \frac{1}{4}\frac{v^2}{g}\left[1-\cos^2\theta+\sin^2\theta\right] = \frac{1}{4}\frac{v^2}{g}\left[1-\cos 2\theta\right]$$


2 dimensional motion (v=10)
θ=π/12
θ=2*π/12
θ=3*π/12
θ=4*π/12
θ=5*π/12
peaks
y
x
0
1
2
3
4
5
6
7
8
0
2
4
6
8
10
12

- 頂点の座標が満たす式

$$\left(\frac{2g}{v}x\right)^2+\left(\frac{4g}{v}\left(y-\frac{v^2}{4g}\right)\right)^2=1$$

- 楕円
  - 中心 $\left(0,\frac{v^2}{4g}\right)$
  - 軸 $\left(\frac{v}{2g},\frac{v}{4g}\right)$

# 課題

- 地面に落ちる位置が最も遠くなるように、投げるためには、どの角度が良いかを求めなさい。