情報と物理：
調和振動子
Harmonic Oscillators

只木進一

2015年後期

フックの法則と運動方程式

- フックの法則(Hooke’s Law)
  - Robert Hooke (1635/7/28 – 1703/3/3)
  - 力が変位（伸び、縮み）に比例する
    - 例：バネ、ゴム
- 運動方程式：一次元
  - 右辺の力にも、未知関数$x(t)$が含まれている

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -kx$$

- 残念ながら、微分方程式に解を与える一般的方法は存在しない。
  - 級数展開
- フックの法則の場合の着目点
  - 左辺でxを二階微分すると、右辺の$-x$に比例する
  - このような性質の関数は？
    - 三角関数、指数関数

三角関数で解を構成してみる

- $x(t) = a \sin \omega t$とおくと

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -a\omega^2 \sin \omega t = -\omega^2 x$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

- 同様に$x(t) = b \cos \omega t$も解

三角関数で解を構成してみる

- 解は二つ
  - $x(t) = a \sin \omega t$
  - $x(t) = b \cos \omega t$
  - なぜ?
  - 二階微分方程式は二つの積分定数を持つ
- 二つの三角関数の関係に注意：位相差

$$\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\theta \cos\frac{\pi}{2} - \sin\theta \sin\frac{\pi}{2} = -\sin\theta$$

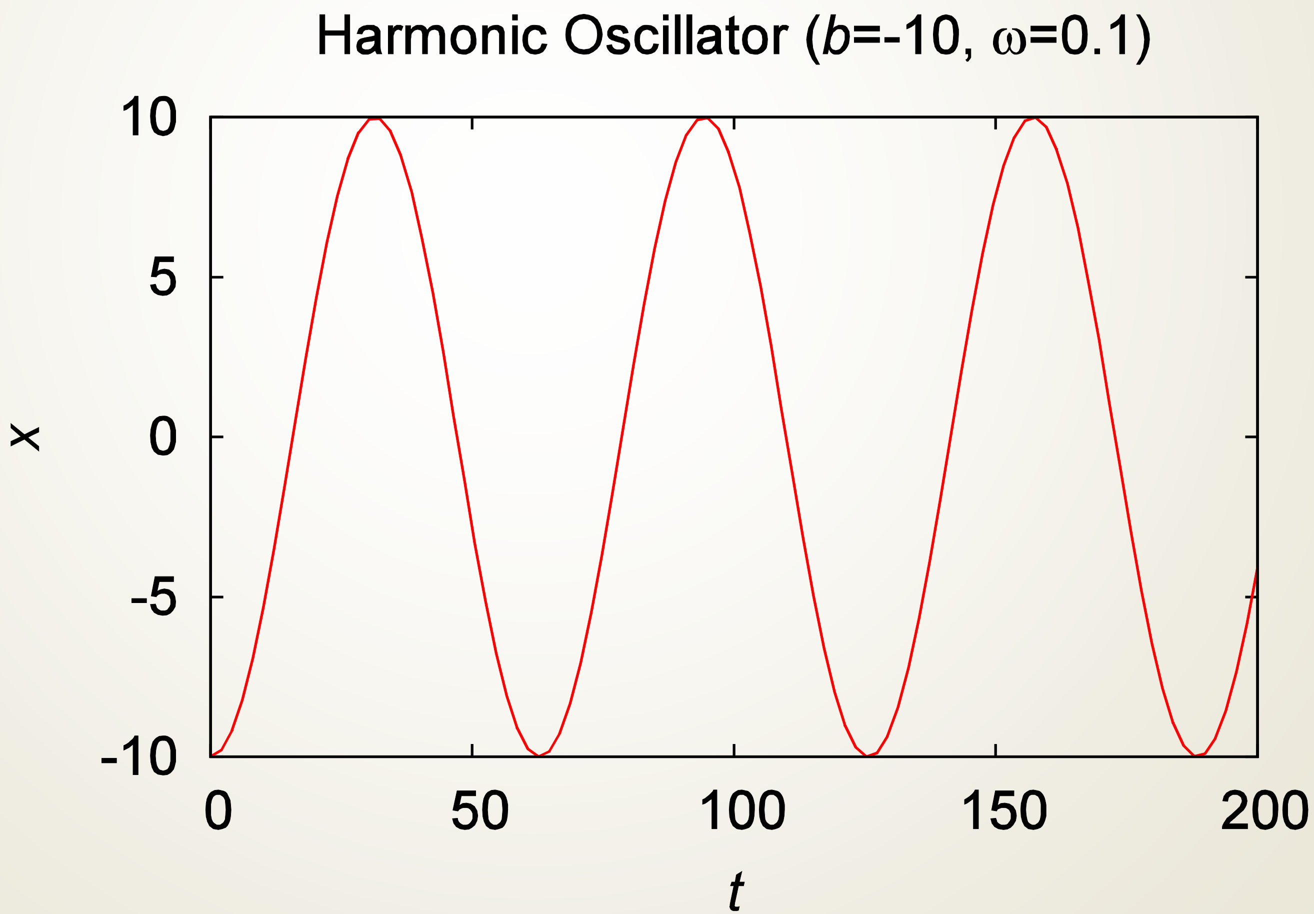
- 一般解
  - 二つの積分定数aとbを含む
  - 二つの波の重ね合わせ

$$x(t) = a\sin\omega t + b\cos\omega t$$

- 積分定数の決定:たとえば初期値から

$$x(0) = b\cos\omega t$$

$$v(0) = \left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = \omega\left(a\cos\omega t - b\sin\omega t\right)\Big|_{t=0} = a\omega$$


Harmonic Oscillator (b=-10, ω=0.1)
10
5
0
-5
-10
x
0
50
100
150
200
t

別の表現

$$x(t) = a\sin(\omega t + \delta)$$
$$= a[\sin\omega t\cos\delta + \cos\omega t\sin\delta]$$
$$= a\sin\delta\cos\omega t + a\cos\delta\sin\omega t$$

δ : 位相

一つの三角関数に過ぎないことに注意

$$x(0) = a\sin\delta$$
$$v(0) = a\omega\cos\delta$$

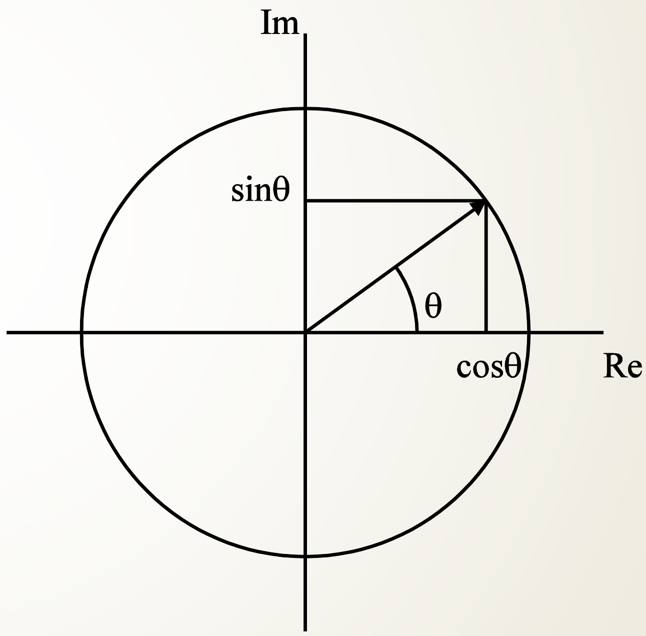
指数関数の利用

- Eulerの公式

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$



$$x(t) = ae^{i\omega t} + be^{-\omega t}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = i\omega\left(ae^{i\omega t} - be^{-i\omega t}\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2\left(ae^{i\omega t} + be^{-i\omega t}\right) = -\omega^2 x(t)$$

$$x(0) = a + b$$

$$v(0) = i\omega(a - b)$$

力づく(brute force)で解く

$$x(t) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j t^j$$

とおくと

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{\infty} a_j j t^{j-1}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = \sum_{j=2}^{\infty} a_j j(j-1) t^{j-2} = \sum_{j=0}^{\infty} a_{j+2}(j+1)(j+2) t^j$$

- 運動方程式に代入すると

$$m\sum_{j=0}^{\infty} a_{j+2}\left(j+1\right)\left(j+2\right)t^{j} = -k\sum_{j=0}^{\infty} a_{j}t^{j}$$

この等号が全てのtの値に対して成り立つには、tの各次数の項毎に等号が成り立たなければならない。

$$ma_{j+2}\left(j+1\right)\left(j+2\right) = -ka_{j} \quad \forall j \geq 0$$

- 偶数次の項$j = 2n$

$$a_2 = -\frac{1}{2\cdot 1}\frac{k}{m}a_0$$

$$a_0$$

$$a_4 = -\frac{1}{4\cdot 3}\frac{k}{m}a_2 = \frac{1}{4!}\left(\frac{k}{m}\right)^2 a_0$$

$$a_6 = -\frac{1}{6\cdot 5}\frac{k}{m}a_4 = -\frac{1}{6!}\left(\frac{k}{m}\right)^3 a_0$$

$$\cdots$$

$$a_{2n} = (-1)^n \frac{1}{(2n)!}\omega^{2n}a_0,\ \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

- 奇数次の項$j = 2n + 1$

$$a_3 = -\frac{1}{3 \cdot 2}\frac{k}{m}a_1$$

a_0

$$a_5 = -\frac{1}{5 \cdot 4}\frac{k}{m}a_3 = \frac{1}{5!}\left(\frac{k}{m}\right)^2 a_1$$

$$a_7 = -\frac{1}{7 \cdot 6}\frac{k}{m}a_5 = -\frac{1}{7!}\left(\frac{k}{m}\right)^3 a_1$$

$$\cdots$$

$$a_{2n+1} = (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}\omega^{2n} a_1$$

- 偶数次だけの場合$a_1 = 0$

$$x(t) = \sum_{j=0}^{\infty} a_{2j} t^{2j} = a_0 \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{1}{(2j)!} (\omega t)^{2j}$$

$$= a_0 \cos \omega t$$

- 奇数次だけの場合$a_0 = 0$

$$x(t) = \sum_{j=0}^{\infty} a_{2j+1} t^{2j+1} = a_1 \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{1}{(2j+1)!} (\omega)^{2j} t^{2j+1}$$

$$= \frac{a_1}{\omega} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{1}{(2j+1)!} (\omega t)^{2j+1} = \frac{a_1}{\omega} \sin \omega t$$

- 従って一般解は以下のようになる

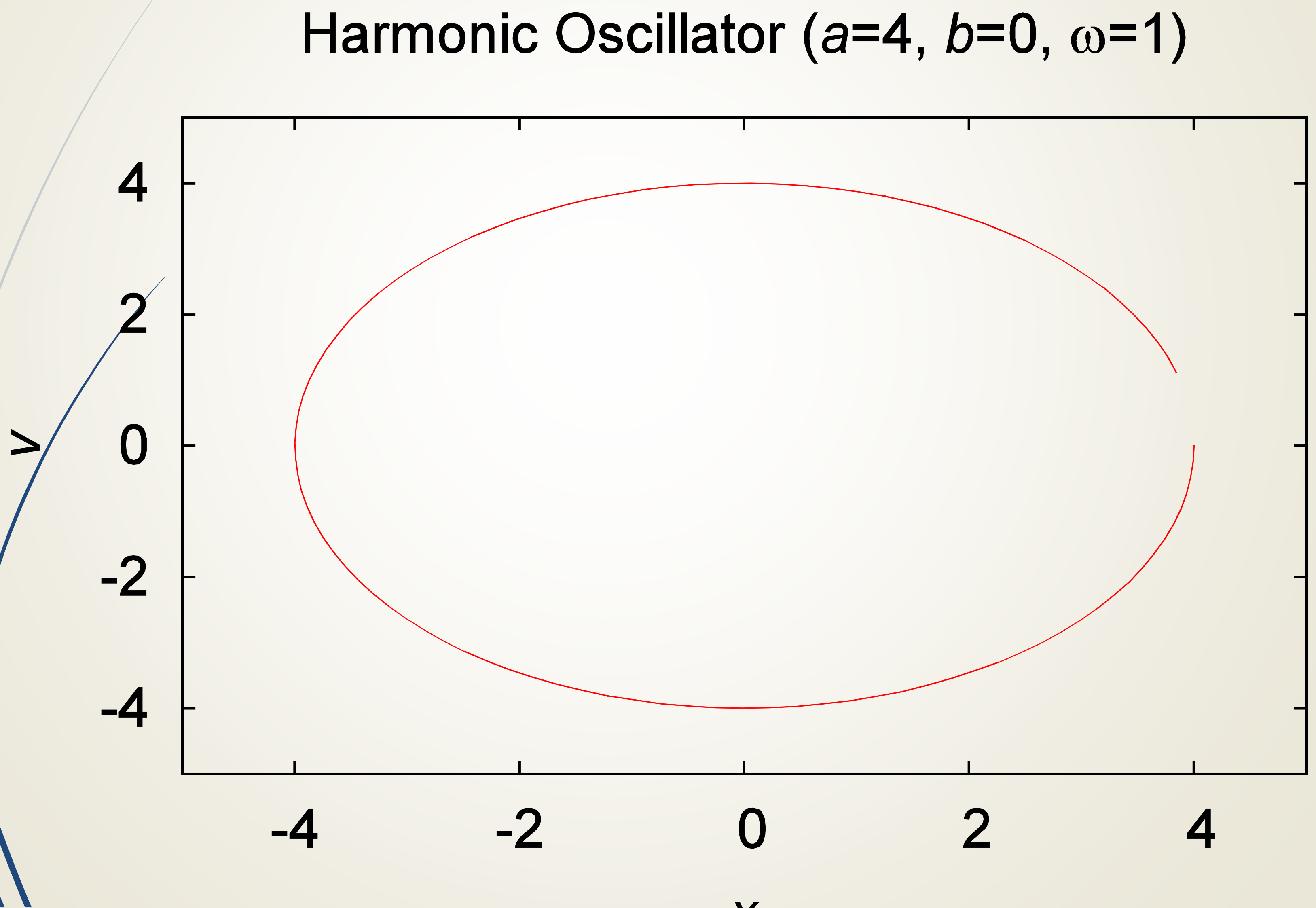
$$x(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$$

配位空間内の運動

- 二次元空間(x, v)内での運動

$$x(t) = a\cos\omega t + b\sin\omega t$$
$$v(t) = \omega(-a\sin\omega t + b\cos\omega t)$$

- ある時刻での(x, v)が分かると、その後の運動が一意に決まることに注意


Harmonic Oscillator (a=4, b=0, ω=1)
4
2
0
-2
-4
v
-4
-2
0
2
4

減衰振動

- 速度に比例した摩擦がある場合

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -kx - \gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

- 解の形を仮定

$$x(t) = e^{-\alpha t}\left(a\cos\omega t + b\sin\omega t\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x = -\alpha x + \omega e^{-\alpha t}\left(-a\sin\omega t + b\cos\omega t\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}x = -\left(\omega^2 + \alpha^2\right)x - 2\alpha v$$

- 運動方程式に代入

$$-m\left(\omega^2 + \alpha^2\right)x - 2m\alpha v$$
$$= -kx - \gamma v$$

$$m\left(\alpha^2+\omega^2\right)=k$$

$$2\alpha m=\gamma$$

$$\alpha=\frac{\gamma}{2m}$$

$$\omega^2=\frac{1}{m}\left(k-\frac{\gamma^2}{4m}\right)$$

- 初期条件$t = 0$において$x(0) = x_0$、$v(0) = 0$

とすると

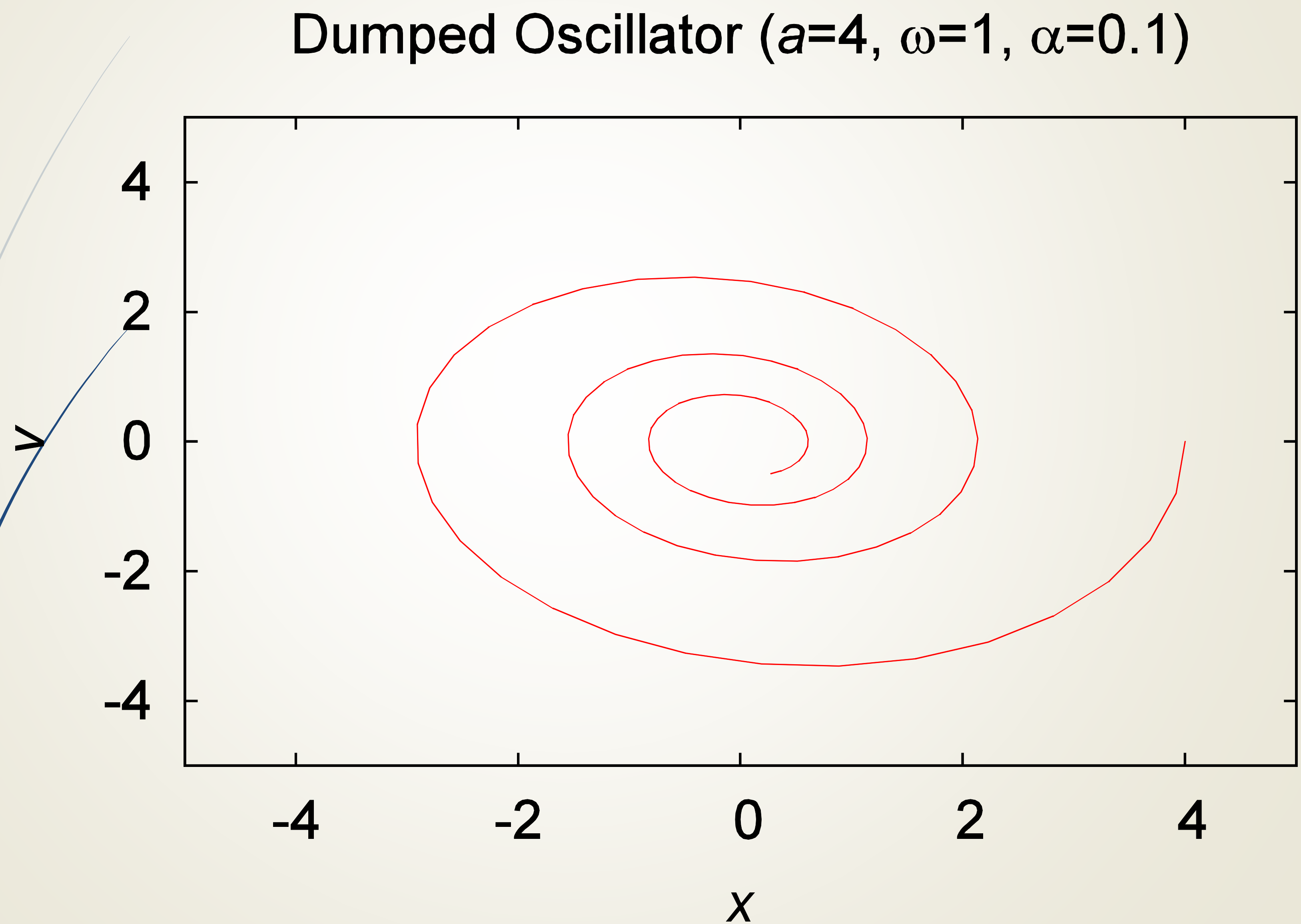
$$a = x_0$$

$$-\alpha a + \omega b = 0$$

$$\Downarrow$$

$$a = x_0$$

$$b = \frac{\alpha}{\omega} x_0$$


Dumped Oscillator (a=4, ω=1, α=0.1)
4
2
0
-2
-4
v
-4
-2
0
2
4
x