

情報と物理： 運動の法則

只木進一

2015年後期

ニュートン力学の革新的な点

- ▶ Sir Isaac Newton(1643 – 1727)
- ▶ 物体の位置を時間の関数として記述
 - ▶ 微分積分学の発端となる



運動の3法則

1. 粒子に力が作用していないとき、その粒子はそのまま静止し続けるか、あるいは等速度運動をつづけ、その運動状態を変えない。
2. 粒子に外から力が作用するとき、その粒子の得る加速度大きさは、加えた力の大きさに比例し、その方向は力の方向に一致する。
3. 2粒子間に作用する力は、それらの粒子を結ぶ直線上に作用し、その大きさは等しく、方向は反対向きである。

運動の第一法則：慣性の法則

- ▶ 時速60km/hで走る車内でリンゴを投げ上げる
 - ▶ $60\text{km/h} = 60 \times 10^3 / 3600 \text{ m/sec} \cong 16.7\text{m/sec}$
- ▶ リンゴは、動いてる車とともに動く
 - ▶ 車からみると静止
 - ▶ 静止している位置からみると、16.7 m/secで移動
- ▶ リンゴが30センチ落下するには0.25秒

$$\sqrt{2l / g} \cong \sqrt{2 \times 0.3 / 9.8} \cong 0.25$$

- 
- 
- ▶ リンゴを30センチ投げ上げている間に車は8メートル以上移動
 - ▶ 何が起きている？

運動とは

▶ 位置が時間とともに変化すること

▶ 位置が時間の関数であること： $x(t)$

▶ 位置が変化 $x(t) \rightarrow x(t + \Delta t)$

$$\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t)$$

▶ 速度

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

▶ 位置の変化の見直し

$$\begin{aligned}x(t + \Delta t) &= x(t) + \left. \frac{dx}{dt} \right|_t \Delta t + O(\Delta t^2) \\ &= x(t) + v(t)\Delta t + O(\Delta t^2)\end{aligned}$$

加速とは

- ▶ 速度が変化する
 - ▶ 速度も時間の関数

$$v(t + \Delta t) = v(t) + a(t)\Delta t + O(\Delta t^2)$$

$$a(t) = \left. \frac{dv}{dt} \right|_t$$

運動の第2法則：加速

- ▶ 粒子に力 F を与えたときに発生する加速度 a


$$\frac{a}{F} = k(\text{一定})$$

- ▶ 比 k は一定

- ▶ 力の大きさ、運動の状態、力の与え方に依存しない

- ▶ 慣性質量

$$m = \frac{1}{k}$$

- 
- ▶ 力が働くと、それに比例した加速度が発生する
 - ▶ 加速度の向きは、力の向きに等しい

$$\vec{F} = m\vec{a}$$



運動方程式


$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_x$$


$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = F_y$$

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = F_z$$

慣性系の存在とガリレイの相対性原理

- ▶ 運動法則に現れる、「位置」、「速度」、「加速度」などを計測するには、座標系が必要
- ▶ 運動の第1法則が成り立つような座標系
 - ▶ 慣性系
- ▶ 慣性系に対して等速運動する系も慣性系
 - ▶ ガリレイの相対性原理

- 
- ▶ 慣性系 $K(x, y, z)$ に対して、 x 方向に速度 v で動く慣性系 $K'(x', y', z')$
 - ▶ 注意:時刻は共通
 - ▶ 絶対時刻の存在を仮定している



ガリレイ変換



$$x'(t) = x(t) - vt$$

$$y'(t) = y(t)$$

$$z'(t) = z(t)$$

▶ 時刻で微分

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{dx}{dt} - v$$

$$\frac{dy'}{dt} = \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dz'}{dt} = \frac{dz}{dt}$$

$$\frac{d^2x'}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\frac{d^2y'}{dt^2} = \frac{d^2y}{dt^2}$$

$$\frac{d^2z'}{dt^2} = \frac{d^2z}{dt^2}$$

▶ 加速度は、二つの系で同じ

慣性質量と重力質量

▶ 慣性質量

- ▶ 力と加速度の比
- ▶ 力をうけたときの動きにくさ
- ▶ 単位となる質量 m_0

$$F = m_0 a_0$$

- ▶ 同じ力を別の粒子に加える
 - ▶ 加速度を計測すると、質量がわかる

$$m_0 a_0 = m_1 a_1$$

$$\frac{m_1}{m_0} = \frac{a_0}{a_1}$$

重力質量

- ▶ 重さ
- ▶ 地上で支えるときに必要な力に比例
- ▶ 物体に働く重力に比例

$$\frac{m}{m_0} = \frac{W}{W_0}$$

- ▶ 慣性質量と重量質量が等しいことを示すことができる

▶ 金(Au)の重力質量と慣性質量

$$m_I(\text{Au})a = (m_G(\text{Au}) / m_0) W_0$$

▶ アルミニウム(Al)の重力質量と慣性質量

$$m_I(\text{Al})a' = (m_G(\text{Al}) / m_0) W_0$$

$$a = k(\text{Au})(W_0 / m_0), a' = k(\text{Al})(W_0 / m_0)$$

$$k(\text{Au}) = m_G(\text{Au}) / m_I(\text{Au})$$

$$k(\text{Al}) = m_G(\text{Al}) / m_I(\text{Al})$$

- ▶ 重力質量と慣性質量の比は、物質の種類に依らない

$$\frac{k(\text{Au})}{k(\text{Al})} = 1 + \eta$$

$$|\eta| < 3 \times 10^{-11}$$

等号の意味を考える

▶ 方程式

- ▶ 等号が成り立つ解がある

▶ 恒等式



- ▶ 常に成り立つ
- ▶ 式変形

▶ 定義式

- ▶ 左辺の量を右辺で定義する

次元 (Dimension)

- ▶ 観測量の多くには単位がある
 - ▶ 長さ、時間、重量
 - ▶ 異なる種類の量の間には、共通の単位は無い
- ▶ どのような種類の量であるかを示す
 - ▶ 長さの次元: [L]
 - ▶ 時間の次元: [T]
 - ▶ 重量の次元: [M]

- 
- 
- ▶ 等号が成り立つには、両辺の次元が一致しなければならない
 - ▶ 力の次元: $[MLT^{-2}]$