



情報と物理 : Vectors

只木進一

2015年後期

物理学に現れる量

- ▶ **一つの値で表される量** (成分が無い)
 - ▶ 質量、エネルギー、温度
 - ▶ 座標系の選び方に依存しない
 - ▶ スカラー (scalar) と呼ぶ

物理学に現れる量

- ▶ **大きさと向きのある量** (成分がある)
 - ▶ 速度、力、加速度
 - ▶ 成分は座標系の選び方に依存
 - ▶ 座標の変換則に対応
 - ▶ **量としては座標系に依存しない**
 - ▶ ベクトル(vector)と呼ぶ

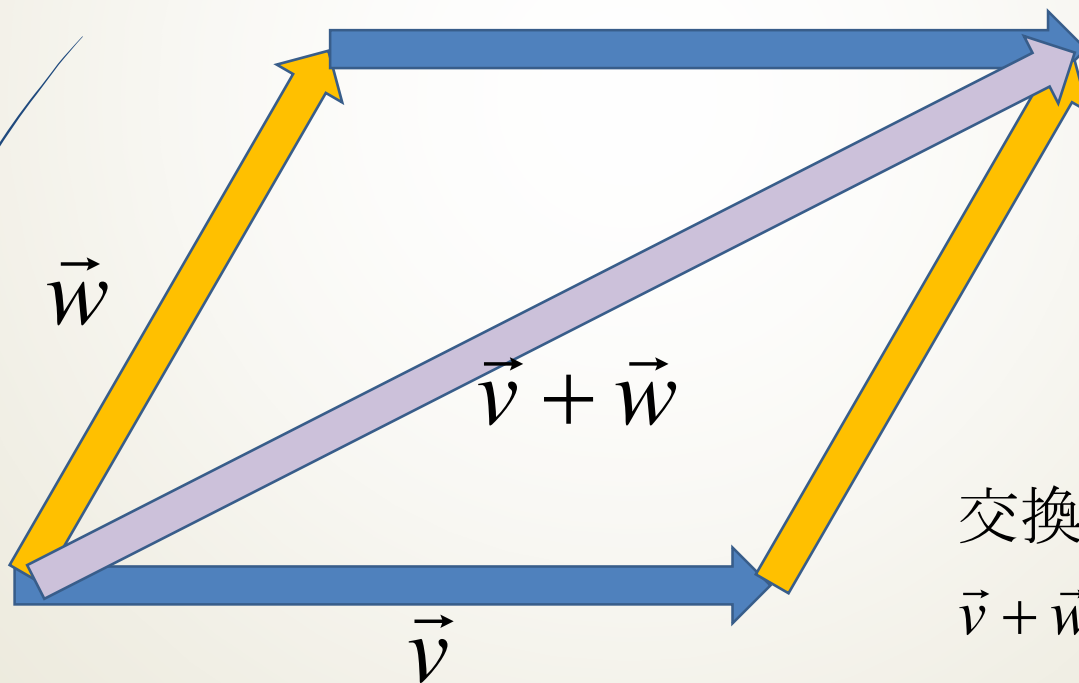
なぜベクトルが力学に現れる？

- ➡ 位置：3次元空間の点
- ➡ 速度：位置の時間変化
 - ➡ 大きさと向きがある
- ➡ 加速度：速度の時間変化
 - ➡ 大きさと向きがある
- ➡ 力：加速度の源
 - ➡ 大きさと向きがある

ベクトルとは

- ▶ n 次元空間の矢印
 - ▶ 大きさと向きがある
- ▶ n 個の成分
 - ▶ 座標系によって成分は異なる
 - ▶ 座標の変換則に応じて変化
- ▶ 座標系によらず存在する幾何学的モノ

ベクトルの和



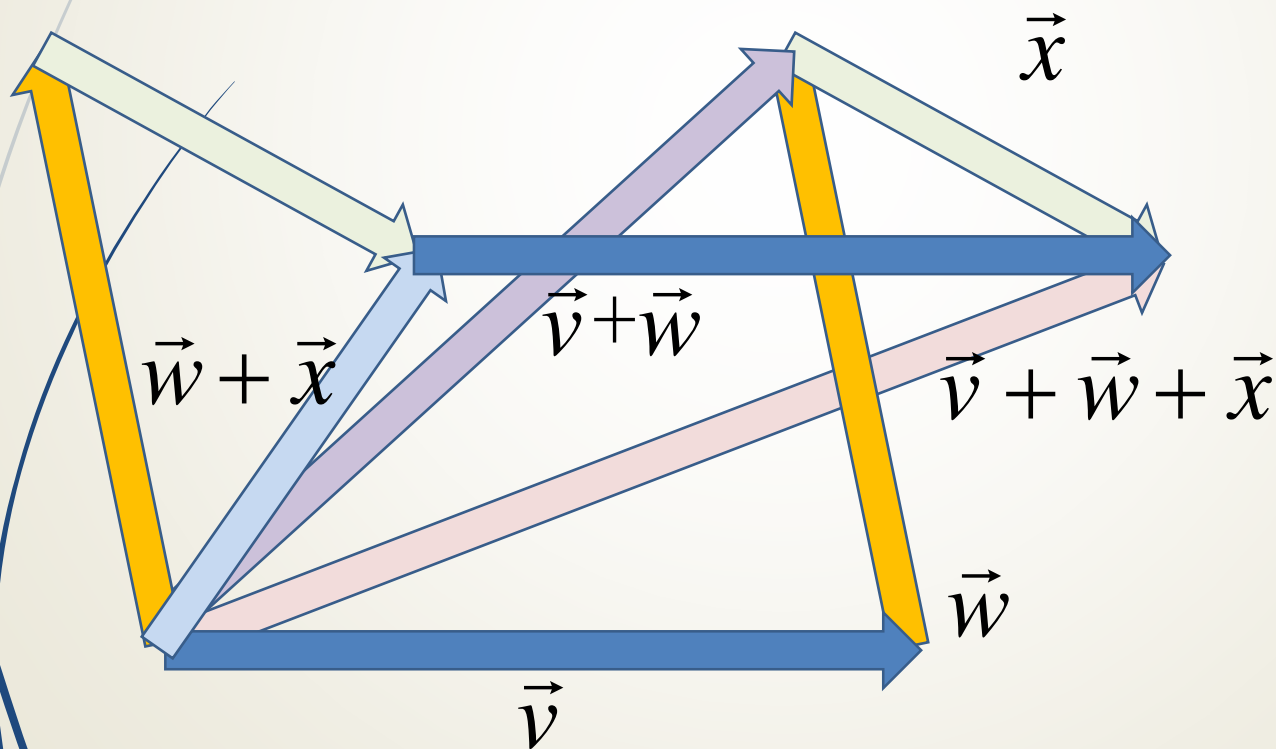
交換則 (可換則)

$$\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}$$

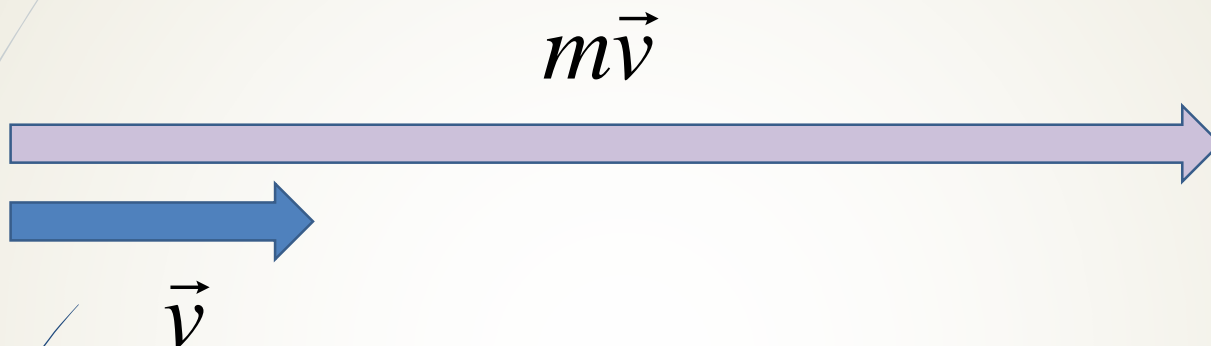
ベクトルの和

結合則

$$(\vec{v} + \vec{w}) + \vec{x} = \vec{v} + (\vec{w} + \vec{x})$$



ベクトルのスカラー積



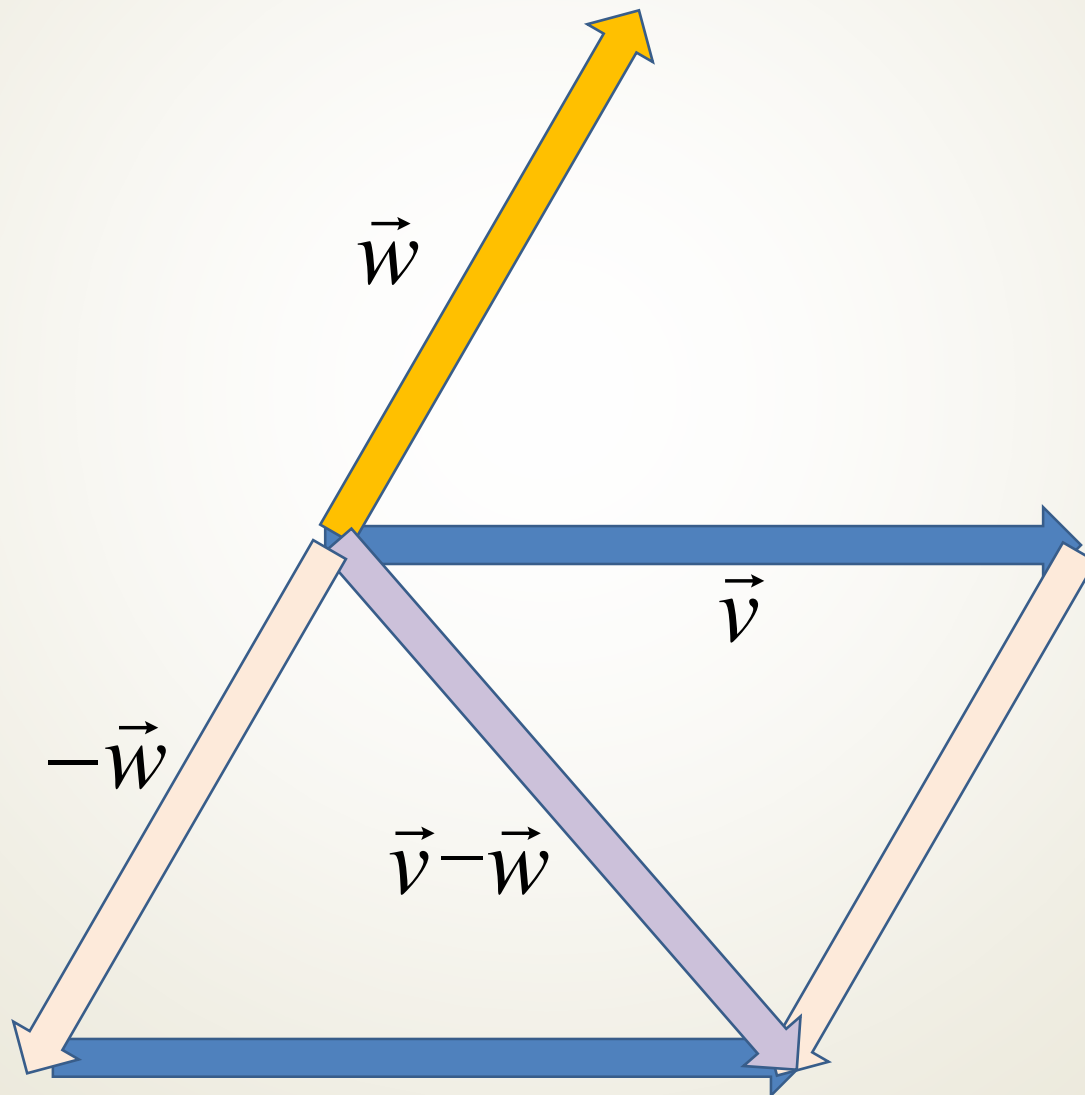
結合則・分配則

$$m(n\vec{v}) = n(m\vec{v}) = (nm)\vec{v}$$

$$(m+n)\vec{v} = m\vec{v} + n\vec{v}$$

$$m(\vec{v} + \vec{w}) = m\vec{v} + m\vec{w}$$

ベクトルの差





2次元空間Euclid空間のベクトル

- ▶ x 座標、 y 座標の成分として表すことができる。
- ▶ 成分を並べる表記

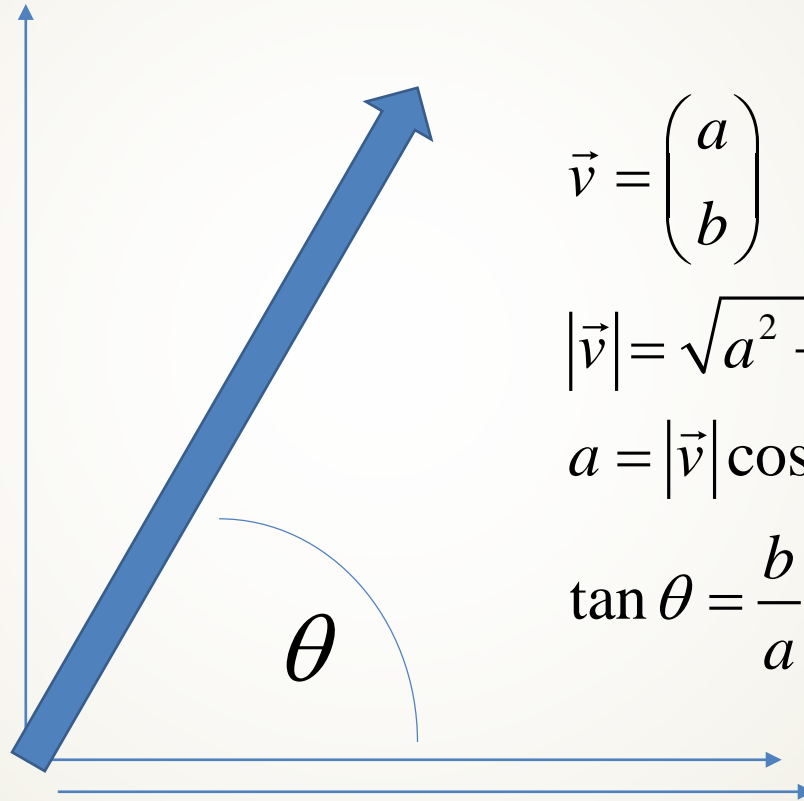
$$\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

- ▶ 単位ベクトルでの表現
 - ▶ ベクトルの和、スカラー積の性質の応用

$$\vec{v} = a\vec{e}_x + b\vec{e}_y$$

- 
- 
- ▶ n 個のベクトルの組 $(\vec{v}_0, \vec{v}_0, \dots, \vec{v}_{n-1})$ が一次独立とは
 - ▶ どの \vec{v}_i も、他のベクトルの線形結合で表せない
 - ▶ n は空間の次元と一致する

ベクトルの大きさと成分



$$\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$a = |\vec{v}| \cos \theta, b = |\vec{v}| \sin \theta$$

$$\tan \theta = \frac{b}{a}$$

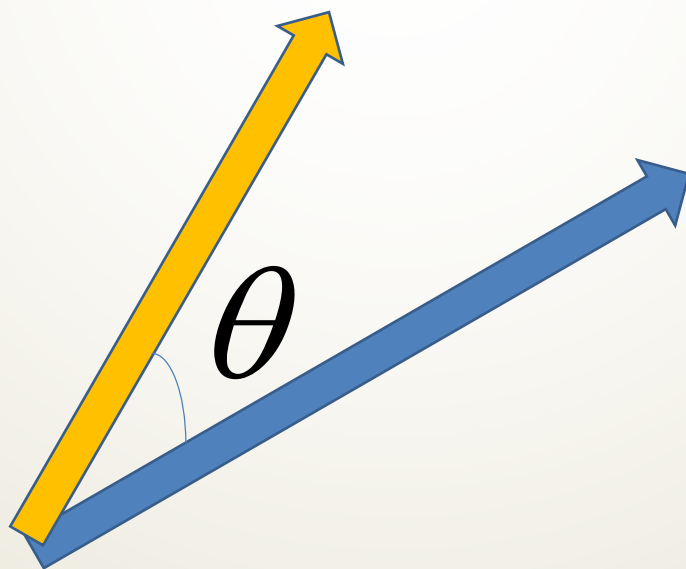
ベクトルの和：成分表示

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \vec{v} + \vec{w} &= \begin{pmatrix} a + c \\ b + d \end{pmatrix} \\ &= (a + c)\vec{e}_x + (b + d)\vec{e}_y \end{aligned}$$

内積

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}| |\vec{w}| \cos \theta$$

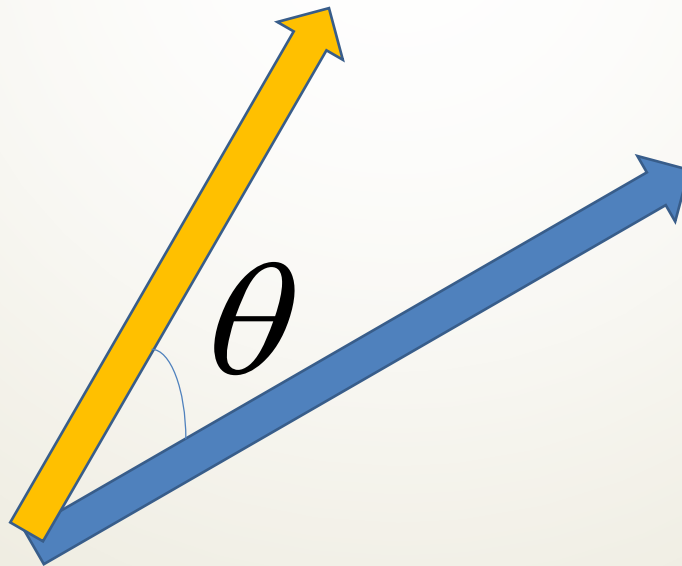


内積：成分で見ると

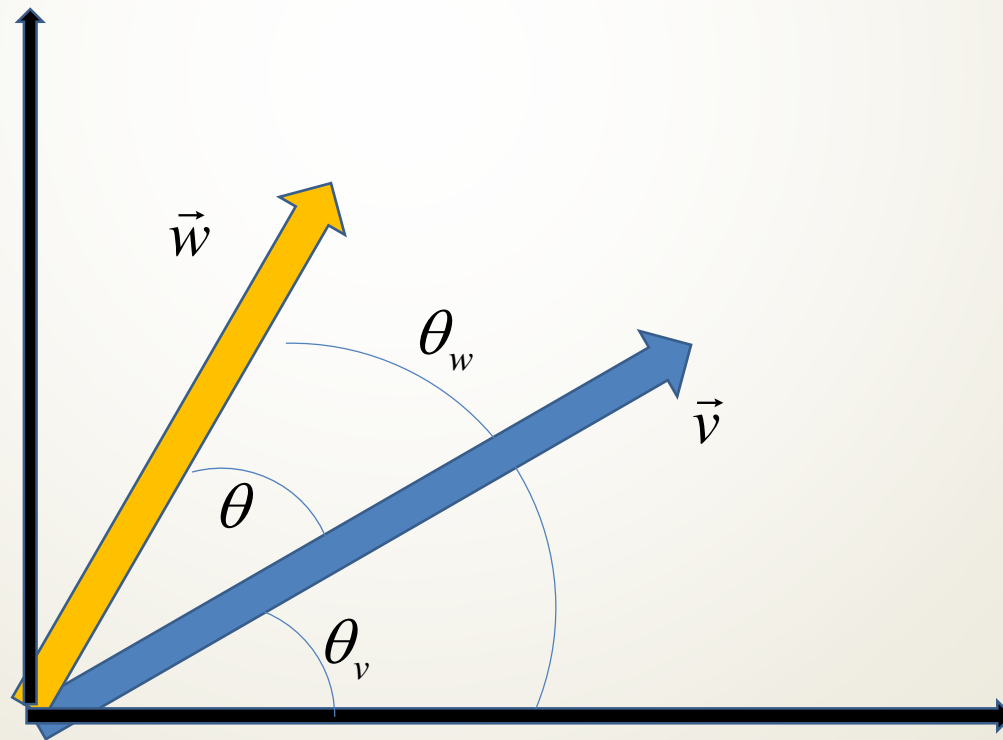
$$\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = (a\vec{e}_x + b\vec{e}_y) \cdot (c\vec{e}_x + d\vec{e}_y)$$

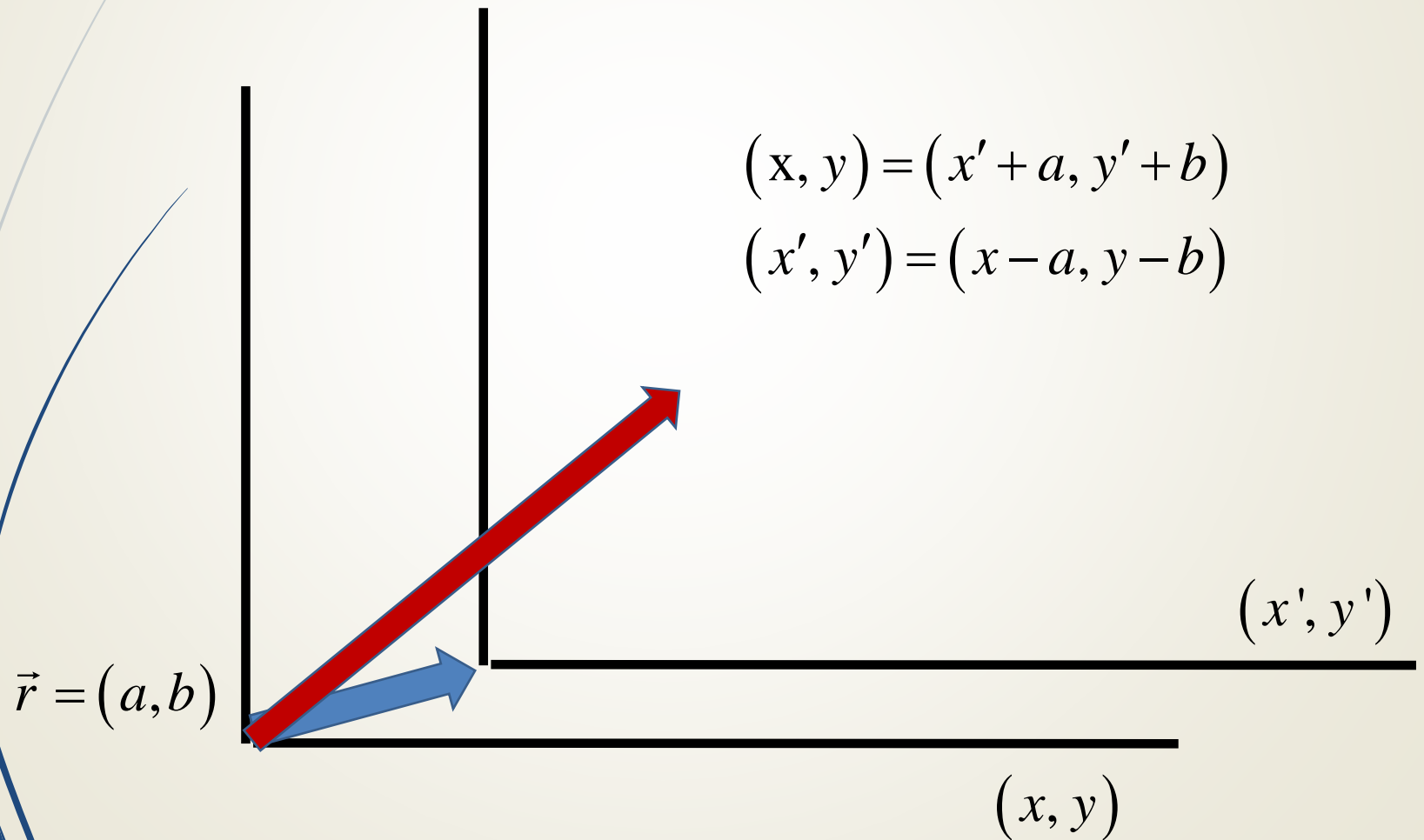
$$= ac(\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x) + (ad + bc)(\vec{e}_x \cdot \vec{e}_y) + bd(\vec{e}_y \cdot \vec{e}_y) = ac + bd$$



$$\begin{aligned}\vec{v} \cdot \vec{w} &= ac + bd = |\vec{v}| |\vec{w}| \cos \theta_v \cos \theta_w + |\vec{v}| |\vec{w}| \sin \theta_v \sin \theta_w \\ &= |\vec{v}| |\vec{w}| \cos(\theta_w - \theta_v)\end{aligned}$$



座標變換：平行移動



座標變換：平行移動

$$x' = r \cos(\varphi - \theta) = r \cos \varphi \cos \theta + r \sin \varphi \sin \theta = x \cos \theta + y \sin \theta$$

$$y' = r \sin(\varphi - \theta) = r \sin \varphi \cos \theta - r \cos \varphi \sin \theta = y \cos \theta - x \sin \theta$$

