



情報と物理： エネルギー保存則 Energy Conservation

只木進一

2016年後期

エネルギーとは

- ▶ 他の物体に働きかける「能力」
 - ▶ 17世紀から18世紀にかけて論争に
 - ▶ 日常用語との関係で混乱
 - ▶ 今でもいろいろある
- ▶ 今の言葉でいうと「エネルギー」と「運動量」

仕事：てこの場合

- ▶ 重力 w が働いている物体をテコを使って高さ h だけ持ち上げる

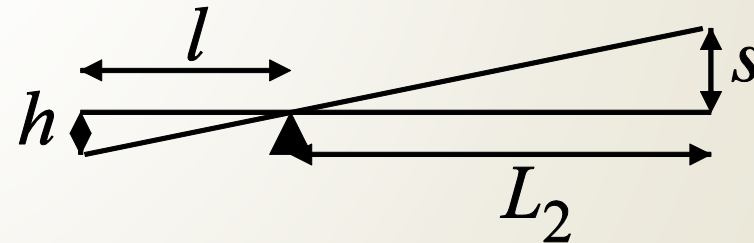
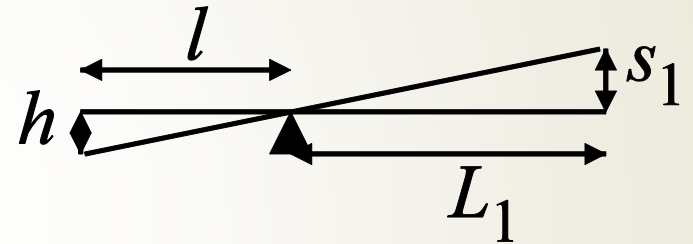
- ▶ 支えから物体までの長さ l

- ▶ 支えから長さ L_1 の場所を力 F_1 で距離 s_1 動かす

$$wl = F_1 L_1$$

- ▶ 支えから長さ L_2 の場所を力 F_2 で距離 s_2 動かす

$$wl = F_2 L_2$$



$$F_1 L_1 = F_2 L_2 = w\ell$$

➡ 相似性より

$$F_1 s_1 = F_2 s_2 = wh$$

➡ 持ち上げた高さのみで決まることに注意

➡ 仕事=力×距離

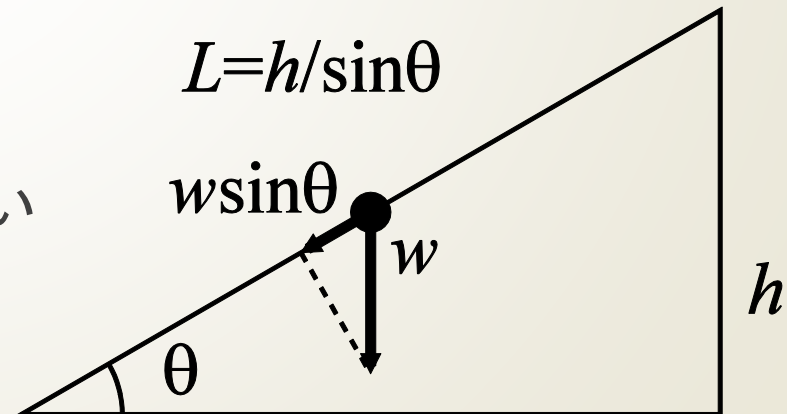
仕事：斜面の場合

- ▶ 斜面を使って持ち上げる
- ▶ 斜面に沿って移動させるのに必要な力： $w \sin \theta$
- ▶ 斜面の長さ： $h / \sin \theta$

- ▶ 力 × 距離

$$w \sin \theta \times \frac{h}{\sin \theta} = wh$$

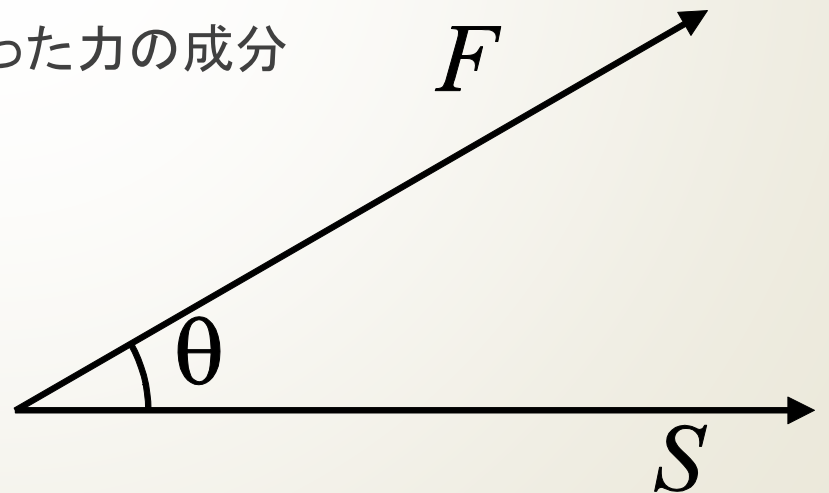
- ▶ 斜面の傾きに依存しない



- ▶ 力と移動の向きが異なる場合
 - ▶ 内積

$$\vec{F} \cdot \vec{S} = FS \cos \theta$$

- ▶ 移動の方向に沿った力の成分



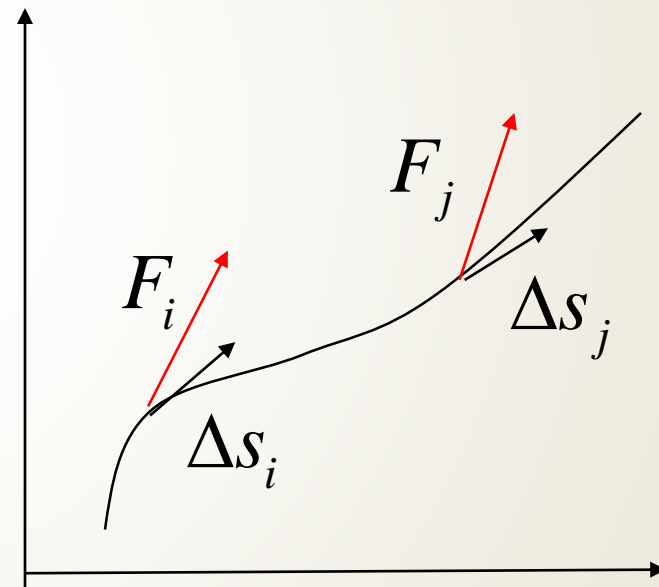
仕事と線積分

- ▶ 曲線を小さな断片に分割して、その部分に働く力を考える

$$W = \sum_i F_i \cdot \Delta s_i$$

- ▶ 断片のサイズを無限小にする

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{s}$$



▶ 積分路のパラメタ表示

- ▶ 積分路 C は曲線→一次元で表示できる
- ▶ パラメタ表示: パラメタ t を使って

$$(x(t), y(t))$$

$$w = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_a^b dt \left[F_x(\vec{x}) \frac{dx}{dt} + F_y(\vec{x}) \frac{dy}{dt} \right]$$

線積分の例

- ▶ 二次曲線 $C: y = x^2$ に沿って $(0,0)$ から $(2,4)$ まで

$$F_x = 2xy, F_y = x^2$$

を積分

- ▶ 曲線のパラメタ表示

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^2 \end{cases} (0 \leq t \leq 2)$$

$$\begin{aligned}w &= \int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_0^2 dt \left[F_x(\vec{x}) \frac{dx}{dt} + F_y(\vec{x}) \frac{dy}{dt} \right] \\&= \int_0^2 dt \left[2xy \cdot 1 + x^2 \cdot 2t \right] = \int_0^2 dt \left[2t^3 \cdot 1 + t^2 \cdot 2t \right] \\&= 4 \int_0^2 t^3 dt = 4 \left[\frac{t^4}{4} \right]_0^2 = 16\end{aligned}$$

運動エネルギー

- ▶ 粒子に外力 $\vec{F}(\vec{r})$ を働かせて移動した結果は？

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}(\vec{r})$$

両辺がベクトルであることに注意

$$m \vec{v} \cdot \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{v} \cdot \vec{F}(\vec{r})$$

両辺に \vec{v} を乗じる(内積)

$$\vec{v} \cdot \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} v^2 \quad \text{左辺を変形}$$



$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) = \vec{v} \cdot \vec{F}(\vec{r})$$

$$\frac{d}{dt} T(t) = \vec{v} \cdot \vec{F}(\vec{r}), \quad T(t) = \frac{1}{2} m v(t)^2$$

運動エネルギーの時間変化

▶ 軌道に沿って積分

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{dT(t)}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(\vec{r}) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \int_C \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = W$$

▶ 一方

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{dT(t)}{dt} dt = \int_{T(t_1)}^{T(t_2)} dT = T(t_2) - T(t_1)$$

▶ つまり、行った仕事は、運動エネルギーの増分となる

エネルギーの次元

- ▶ 力の次元
 - ▶ $[MLT^{-2}]$
- ▶ エネルギーの次元
 - ▶ $[ML^2T^{-2}]$

偏微分

- ▶ 二つの独立変数 x と y の関数 $f(x, y)$
- ▶ 一方の変数だけの変化率
 - ▶ 偏微分

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

全微分

- ▶ 二つの独立変数 x と y の関数 $f(x, y)$

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + O(\Delta^2)\end{aligned}$$

- ▶ 全微分

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

ポテンシャルエネルギー

Potential Energy

- ▶ 仕事の線積分を構成する微小断片 $\vec{F} \cdot \Delta\vec{s}$ が位置だけの関数と仮定する。
 - ▶ つまり、時刻、そこに至った経路・速度に依存しない

$$\vec{F} \cdot \Delta\vec{s} = -\Delta U$$

$$\vec{F} = -\nabla U$$

$$\nabla = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} \quad \text{ナブラ}$$

- ▶ ポテンシャルが定義できるとき、以下は経路に依らない

$$-\int dU = \int \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

- ▶ 問: どうして経路に依存しないか?

- ▶ 仕事との関係

- ▶ 与えた仕事の量とそれによって生じたポテンシャルの差が等しい

$$-\int dU = -U(\vec{r}_A) + U(\vec{r}_B) = \int \vec{F} \cdot d\vec{s} = W$$

▶ ポテンシャルの例

$$U = -x^2 y$$

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = 2xy$$

$$F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} = x^2$$

- 仕事によって生じた運動エネルギーの差とポテンシャルの差を組み合わせると

$$W = T(t_B) - T(t_A) = U(\vec{r}_A) - U(\vec{r}_B)$$

$$T(t_A) + U(\vec{r}_A) = T(t_B) + U(\vec{r}_B)$$

- つまり、運動エネルギーとポテンシャルの和が不変になる
- ポテンシャルを位置エネルギーと呼ぶことがある

エネルギーから運動を見直す1 鉛直下方向の一様重力加速度

▶ 運動方程式

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = 0$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -mg$$

▶ ポテンシャルで考えると

$$U(x, y) = mgy$$

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = 0$$

$$F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} = -mg$$

▶ エネルギー保存則

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + mgy$$

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dt} &= m \left(v_x \frac{dv_x}{dt} + v_y \frac{dv_y}{dt} \right) + mg \frac{dy}{dt} \\ &= v_y (-mg) + mgv_y = 0\end{aligned}$$

運動方程式を代入

$$\frac{1}{2}mv(t_A)^2 + mgy(t_A) = \frac{1}{2}mv(t_B)^2 + mgy(t_B)$$

- ▶ 初期条件 $\vec{r}(t=0) = (0, 0)$
 $\vec{v}(t=0) = (v_x, v_y)$
- ▶ 軌道の頂点 $\vec{v}(t_{\text{top}}) = (v_x, 0)$
$$\frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2) = \frac{1}{2}mv_x^2 + mgy$$
- ▶ 頂点の高さ $y = \frac{1}{2g}v_y^2$
- ▶ 運動方程式を解いていないことに注意

エネルギーから運動を見直す2 調和振動子

- ▶ 運動方程式

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx$$

- ▶ ポテンシャルエネルギーと力

$$U(x) = \frac{1}{2} kx^2$$

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = -kx$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} kx^2 \right) &= mv \frac{dv}{dt} + kx \frac{dx}{dt} \\ &= -kxv + kxv = 0 \end{aligned}$$

エネルギー保存

- ▶ 初期条件 $t = 0$ で変位 x_0 で、初速 $v_0 = 0$

$$E = \frac{1}{2} kx_0^2$$

- ▶ 速度がゼロとなる、つまり振幅最大の状態

$$x = \pm x_0$$

- ▶ 振幅ゼロ、つまり速度最大

$$\frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} kx_0^2$$

$$v = \pm \sqrt{\frac{k}{m}} x_0$$

非調和振動子 運動方程式が解けない場合

- ▶ 運動方程式：非線形項があり、解けない

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - \lambda x^3$$

- ▶ ポテンシャルエネルギー

$$U(x) = \frac{1}{2} kx^2 + \frac{1}{4} \lambda x^4$$

エネルギー保存

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} kx^2 + \frac{1}{4} \lambda x^4 \right) &= mv \frac{dv}{dt} + kx \frac{dx}{dt} + \lambda x^3 \frac{dx}{dt} \\ &= v(-kx - \lambda x^3) + kxv + \lambda x^3 v = 0 \end{aligned}$$

▶ エネルギー

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + U(x)$$

▶ $x = 0$ を通過する際の速度

$$v = \pm \sqrt{\frac{2E}{m}}$$

▶ 最大振幅: $v = 0$

$$\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{4}\lambda x^4 - E = 0$$

$$x_0^2 = \frac{1}{\lambda} \left[-k \pm \sqrt{k^2 + 4\lambda E} \right]$$

Nonlinear Oscillator($k=1, \lambda=1/2$)