「情報と物理」
2016 年度期末試験問題 (解答例)

以下の各問に答えなさい。解答は導出過程も示しなさい。

1 調和振動子

フックの法則に従うバネの運動方程式は、t を時間、x を変位 (平衡位置からのズレ) として

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -kx \tag{1.1}$$

と表される。ここで、m はバネに付いている質点の質量、k はバネ定数である。

問 1.1 ばね定数の次元【10 点】

長さ、時間、質量の次元をそれぞれ [L]、[T]、[M] とするとき、ばね定数 k の次元を答えなさい。

解答例 左辺の次元は $[\mathrm{MLT}^{-2}]$ である。両辺の次元は等しくなければならないので、 k の次元は以下のようになる。

$$[\mathrm{MT}^{-2}]$$

問 1.2 一般解【15 点】

微分方程式 (1.1) の一般解は、A と B を定数として

$$x(t) = A\exp(i\omega t) + B\exp(-i\omega t) \tag{1.2}$$

と表される。ここで、i は虚数単位 ($i^2 = -1$)、$\exp(x) = e^x$ は指数関数、及び $\omega^2 = k/m$ である。式 (1.2) が、微分方程式 (1.1) の解であることを、示しなさい。

解答例 式 (1.2) を二階微分する。

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = i\omega\left[A\exp(i\omega t) - B\exp(-i\omega t)\right]$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2\left[A\exp(i\omega t) + B\exp(-i\omega t)\right] = -\omega^2 x$$

これを微分方程式 (1.1) へ代入すると

$$-m\omega^2 x = -kx$$

となり、$\omega^2 = k/m$ のとき、等式が成り立つ。つまり、式 (1.2) は、微分方程式 (1.1) の解である。

問 1.3　エネルギー保存【15 点】

調和振動子のエネルギーは

$$E = \frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \frac{1}{2}kx^2 \tag{1.3}$$

である。このエネルギーを時間で微分し、運動方程式 (1.1) を用いて、エネルギーが保存することを示しなさい。

解答例　式 (1.3) を時間で微分する。

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right) + kx\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + kx\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

ここへ運動方程式を代入する。

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(-kx) + kx\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 0$$

以上より、エネルギーは保存する。

2　斜面上と重力場中の落下

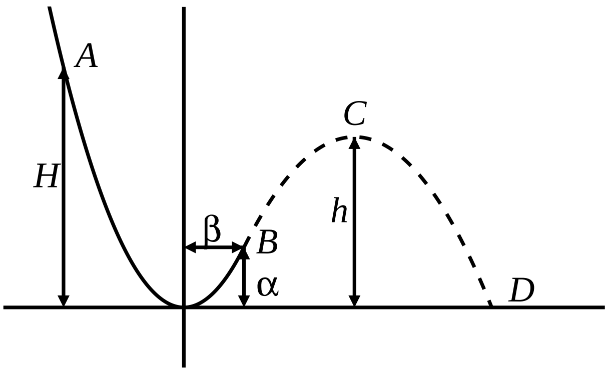

図 1: 実線は滑らかな斜面、破線は斜面を離れた後の粒子の軌跡

滑らかな斜面を質量 m の粒子が滑り落ちることを考える (図 1)。粒子と斜面との摩擦、粒子の斜面での転がり（回転)、粒子と空気との摩擦は無視する。また、重力加速度を g とする。

高さ H の点 A に静止した状態から粒子を斜面に沿って落下させる。粒子は高さ α の点 B で斜面から離れ、自由に落下する。

問 2.1　飛び出し時の速度【15 点】

点 B における粒子の速度の絶対値 v_B を求めなさい。

解答例　点 A における粒子のポテンシャルエネルギーは $U_A = mgH$ である。また、点 B における粒子のポテンシャルエネルギーは $U_B = mg\alpha$ である。この差が B における粒子の運動エネルギー T_B となる。

$$T_B = U_A - U_B = mg(H - \alpha)$$

$T_B = mv_B^2/2$ より

$$v_B = \sqrt{2g(H-\alpha)}$$

を得る。

問 2.2　軌道頂点での運動エネルギー【15 点】

点 B を離れるときの速度ベクトルの x 成分 (水平方向、右向きを正とする) を v_x、y 成分 (鉛直方向、上向きを正とする) を v_y とする。成分の比が $v_x : v_y = 1 : 2$ であるとする。v_x、及び自由落下軌道の頂点 C における運動エネルギー T_C を v_B と m を用いて表しなさい。

解答例　点 C では、速度は水平成分のみとなる。また、水平方向の速度は、点 B を通過したのちは変化しない。点 B における速度の x 成分は

$$v_B^2 = v_x^2 + v_y^2 = (1+4)\,v_x^2 = 5v_x^2$$

より

$$v_x = \frac{\sqrt{5}}{5} v_B$$

である。従って、点 C における運動エネルギーは

$$T_C = \frac{1}{2} m v_x^2 = \frac{1}{10} m v_B^2$$

となる。

問 2.3　軌道頂点の高さ【15 点】

自由落下軌道の頂点 C の高さ h を、H と α を用いて表しなさい。

解答例　エネルギー保存則より、点 A でのポテンシャルエネルギー U_A と、点 C でのポテンシャルエネルギー U_C と運動エネルギー T_C の和が等しい。

$$U_A = U_C + T_C$$

$U_C = mgh$ であることから、この等式は

$$mgH = mgh + \frac{1}{10} m v_B^2$$

となる。v_B の表式を使うと

$$mgH = mgh + \frac{1}{5} mg(H-\alpha)$$

となり

$$h = \frac{4H+\alpha}{5}$$

を得る。

問 2.4　着地時の速度【15 点】

着地点 D における速度の水平方向の x 成分を V_x、鉛直下方向の成分を V_y とするとき、それぞれ求めなさい。解答は、m、g、H、α を使って表しなさい。

解答例 水平方向には力が働かないため、

$$V_x = v_x = \frac{\sqrt{5}}{5} v_B$$

である。また、エネルギー保存則より

$$mgH = \frac{1}{2} m \left(V_x^2 + V_y^2 \right)$$

である。つまり

$$mgH = \frac{1}{2} m V_y^2 + \frac{1}{5} mg \left(H - \alpha \right)$$

である。これを解き、着地点では下向きの運動であることを考慮して

$$V_y = -\sqrt{\frac{2}{5} g \left(4H + \alpha \right)}$$

を得る。