情報と物理：単振り子と中心力場 Simple Pendulum and Central Force Field

只木進一

2016年後期

座標系の選択

- 二次元の場合、(x, y)座標が絶対的では無い
- 他にも座標系の可能性がある
  - 直交座標系 (Ortho-normal coordinate system)
  - 基底ベクトルが直交し、規格化されている
- 極座標
  - 中心からの距離と、角度で位置を表示

運動の極座標表示

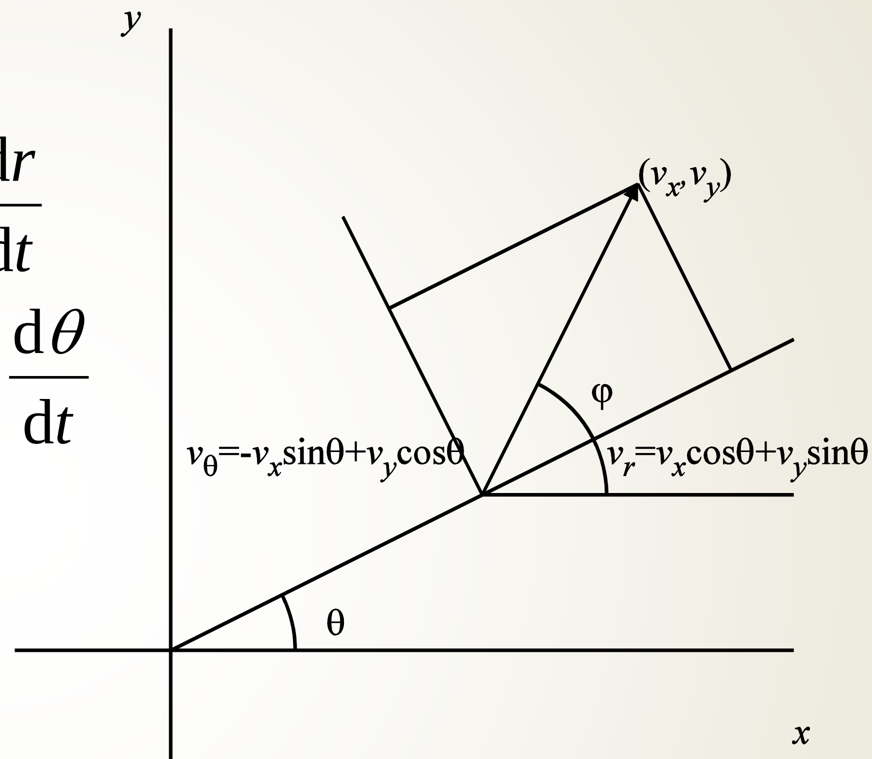
- 位置の極座標表示

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

- 時間で微分

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\cos\theta - r\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\sin\theta \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\sin\theta + r\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\cos\theta \end{cases}$$

$$
\begin{cases}
\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\cos\theta + \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\sin\theta = \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} \\
-\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\sin\theta + \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cos\theta = r\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}
\end{cases}
$$



一般的なベクトルの変換式

$$v_r = v_x \cos\theta + v_y \sin\theta = |v|\cos(\varphi - \theta)$$

$$v_\theta = -v_x \sin\theta + v_y \cos\theta = |v|\sin(\varphi - \theta)$$

加速度

$$① \quad \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = \cos\theta \frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} - 2\sin\theta \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} - r\sin\theta \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} - r\cos\theta\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2$$

$$② \quad \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = \sin\theta \frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} + 2\cos\theta \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} + r\cos\theta \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} - r\sin\theta\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2$$

加速度

- $\cos\theta \times ① + \sin\theta \times ②$

$$\cos\theta \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \sin\theta \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} - r\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2$$

- $-\sin\theta \times ① + \cos\theta \times ②$

$$-\sin\theta \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \cos\theta \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = 2\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} + r\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)$$

力の座標変換

- 一般式から

$$F_r = F_x \cos\theta + F_y \sin\theta$$
$$F_\theta = -F_x \sin\theta + F_y \cos\theta$$

- 逆に解いて

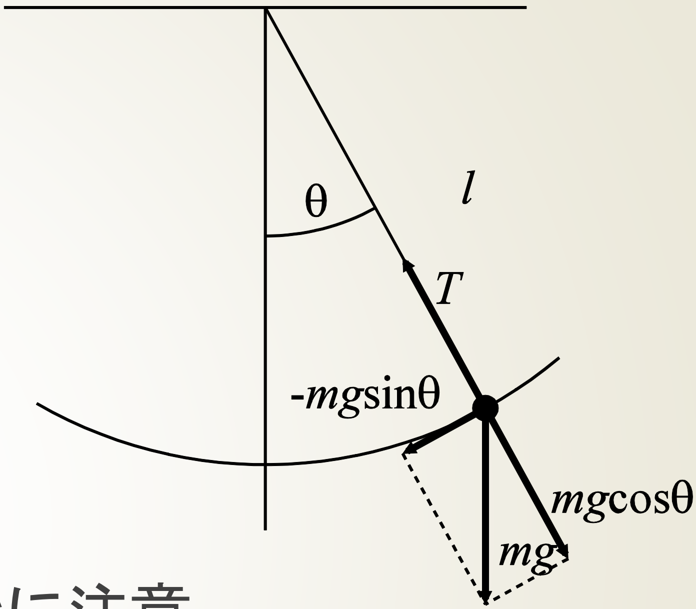
$$F_x = F_r \cos\theta - F_\theta \sin\theta$$
$$F_y = F_r \sin\theta + F_\theta \cos\theta$$

極座標表示による運動方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} - r\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \frac{1}{m}F_r$$

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{1}{m}F_\theta$$

応用例:単振動子



- 力
$$F_r = mg\cos\theta - T$$
$$F_\theta = -mg\sin\theta$$

- 動径方向へは動かないことに注意

$$-l\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2 = g\cos\theta - \frac{T}{m}$$

$$l\left(\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}\right) = -g\sin\theta$$

- 角度方向の加速度の式の両辺に$\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$を乗ず

$$l\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}\right)=-g\sin\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{l}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2=g\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\cos\theta$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[l\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2-2g\cos\theta\right]=0$$

$$l\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2-2g\cos\theta=\text{一定}$$

- 初期条件:時刻$t = 0$で$\theta = \theta_0$、$\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t = 0$

$$l\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2 - 2g\cos\theta = -2g\cos\theta_0$$

- 動径方向の式に代入

$$-2g\left(\cos\theta - \cos\theta_0\right) = g\cos\theta - \frac{T}{m}$$

$$\frac{T}{m} = g\left(3\cos\theta - 2\cos\theta_0\right)$$

- 角度が非常に小さいとして近似的に解く

$$\sin\theta \simeq \theta$$

- 調和振動子

$$l\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -g\theta$$

$$\theta(t) = \theta_0 \exp\left[i(\omega t + \delta)\right]$$

$$\omega^2 = \frac{g}{l}$$

- 次元から振動数を予想できる

重力による円運動

- 太陽を回る惑星の運動は、本当は楕円
  - ここでは単純化して、円、つまり動径方向には動かないとする
- 運動方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} - r\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2 = -\frac{GM}{r^2}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right) = 0$$

- 半径は一定値とする:$r = R$
- 周期の2乗は、半径の3乗に比例する:ケプラーの第三法則

$$\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \frac{GM}{R^3}$$

- 面積速度は保存する:ケプラーの第二法則

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(R^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right) = 0$$

重力場中の楕円運動

- 運動方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} - r\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2 = -\frac{GM}{r^2}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right) = 0$$

- 面積速度一定則より

$$r^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = H = \text{定数}$$

- 運動法則

$$\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} - \frac{H^2}{r^3} = -\frac{GM}{r^2}$$

従属変数の変換

- rをθの関数と考える

$$s(\theta) = 1/r(\theta)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} = Hs^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}$$

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = Hs^2\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = Hs^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\frac{1}{s} = -s^{-2}Hs^2\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta} = -H\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} = Hs^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(-H\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta}\right) = -Hs^2\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}\theta^2}$$

sに対する方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}\theta^2} = -s + \frac{GM}{H^2}$$

- sの原点をずらす

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\theta^2}\left(s - \frac{GM}{H^2}\right) = -\left(s - \frac{GM}{H^2}\right)$$

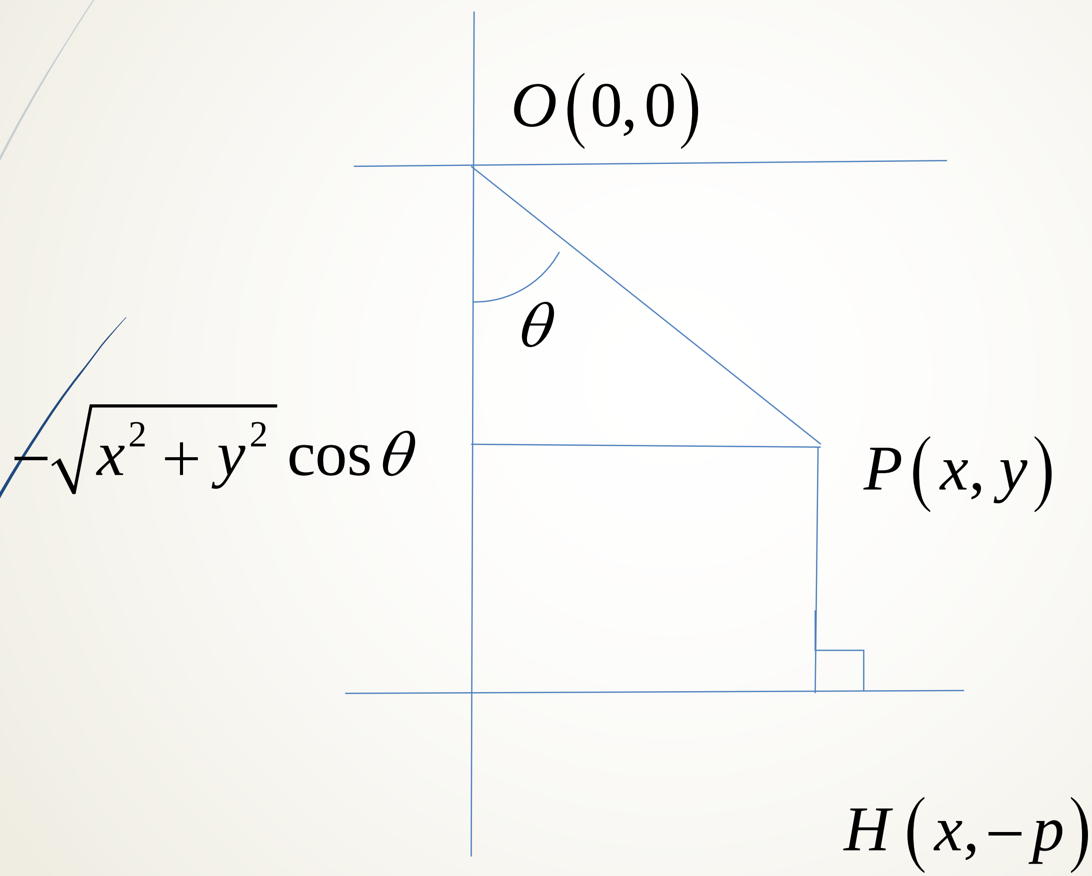
$$s - \frac{GM}{H^2} = A\cos\theta$$

- 位相差は、角度の原点の選び方なのでゼロとした

- 楕円または双曲線
  - 惑星または彗星

$$r = \frac{\dfrac{H^2}{GM}}{\dfrac{H^2}{GM} A\cos\theta + 1}$$

二次曲線と極表示



$$e=\frac{OP}{PH}$$

eが一定である曲線

二次曲線: $e = 1$

- 二次曲線となる

$$\sqrt{x^2 + y^2} = y + p$$

$$x^2 + y^2 = y^2 + 2py + p^2$$

$$y = \frac{1}{2p}\left(x^2 - p^2\right)$$

- 角度と動径の関係

$$r\cos\theta + r = p$$

$$r = \frac{p}{1 + \cos\theta}$$

二次曲線: $0 < e < 1$の場合

$$\sqrt{x^2+y^2} = e(y+p)$$

$$x^2+y^2 = e^2\left(y^2+2py+p^2\right)$$

$$x^2+\left(1-e^2\right)\left(y-\frac{e^2p}{1-e^2}\right)^2 = e^2p^2\frac{1}{1-e^2}$$

- 楕円

$$r\cos\theta+\frac{r}{e} = p$$

$$r = \frac{ep}{1+e\cos\theta}$$

二次曲線：$e > 1$の場合

$$\sqrt{x^2+y^2}=e\left(y+p\right)$$

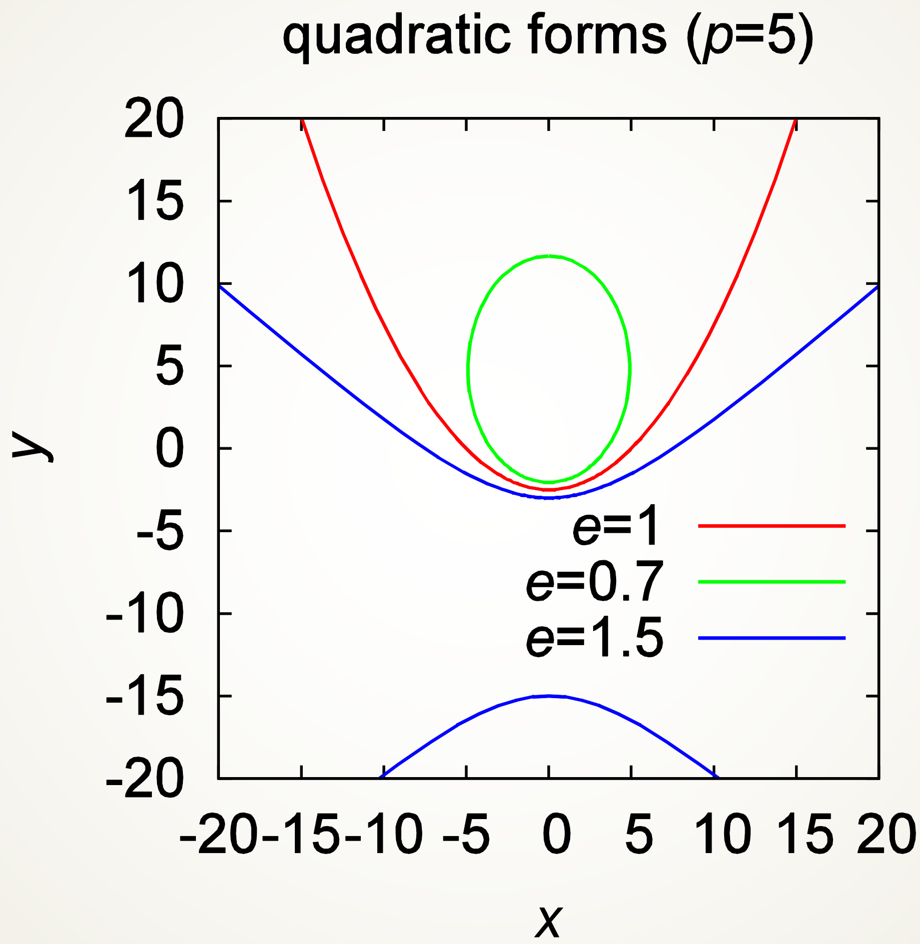
$$x^2+y^2=e^2\left(y^2+2py+p^2\right)$$

$$-x^2+\left(e^2-1\right)\left(y+\frac{e^2p}{e^2-1}\right)^2=e^2p^2\frac{1}{e^2-1}$$

- 双曲線

$$r\cos\theta+\frac{r}{e}=p$$

$$r=\frac{ep}{1+e\cos\theta}$$


quadratic forms (p=5)
20
15
10
5
0
-5
-10
-15
-20
y
-20 -15 -10 -5 0 5 10 15 20
x
e=1
e=0.7
e=1.5