情報と物理：Vectors

只木進一

2016年後期

物理学に現れる量

- 一つの値で表される量（成分が無い）
  - 質量、エネルギー、温度
  - 座標系の選び方に依存しない
  - スカラー(scalar)と呼ぶ

物理学に現れる量

- 大きさと向きのある量（成分がある）
  - 速度、力、加速度
  - 成分は座標系の選び方に依存
    - 座標の変換則に対応
    - 量としては座標系に依存しない
  - ベクトル(vector)と呼ぶ

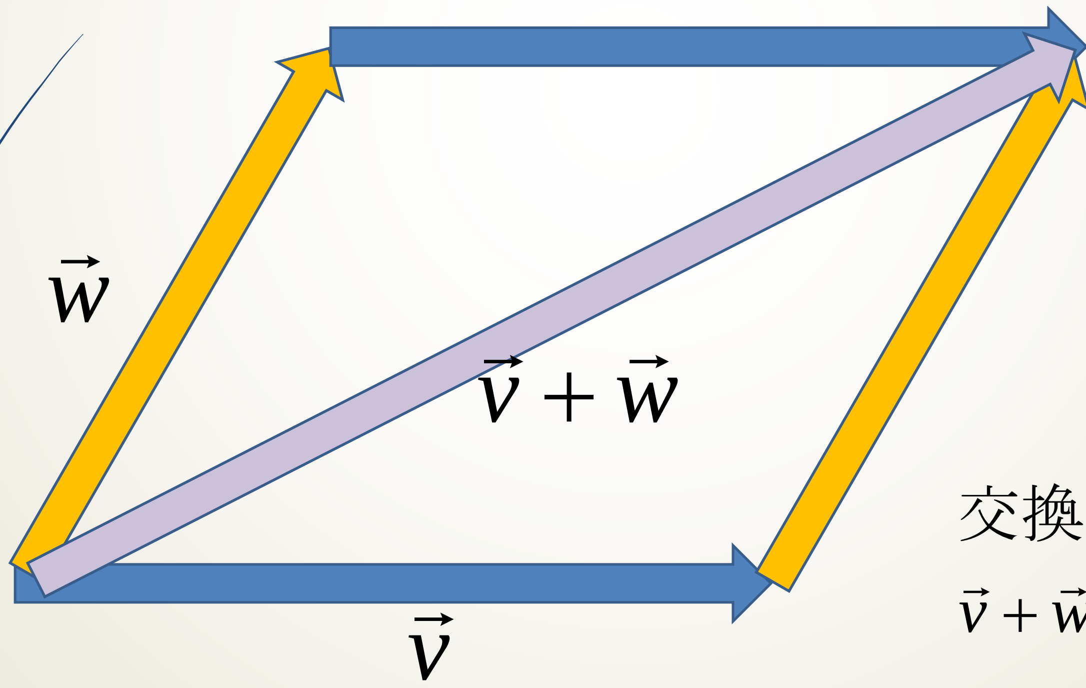
なぜベクトルが力学に現れる？

- 位置：3次元空間の点
- 速度：位置の時間変化
  - 大きさと向きがある
- 加速度：速度の時間変化
  - 大きさと向きがある
- 力：加速度の源
  - 大きさと向きがある

ベクトルとは

- n 次元空間の矢印
  - 大きさと向きがある
- n個の成分
  - 座標系によって成分は異なる
  - 座標の変換則に応じて変化
- 座標系によらず存在する幾何学的モノ

ベクトルの和



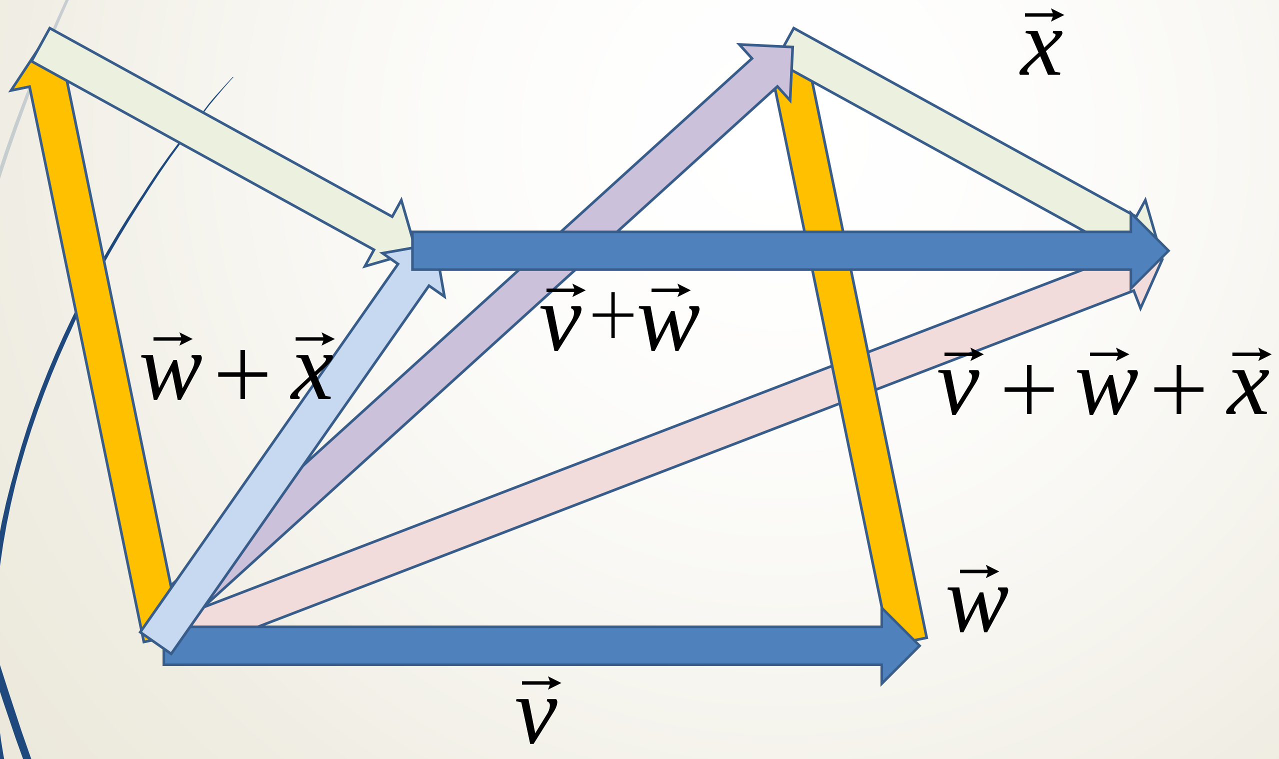
交換則(可換則)

$$\vec{v}+\vec{w}=\vec{w}+\vec{v}$$

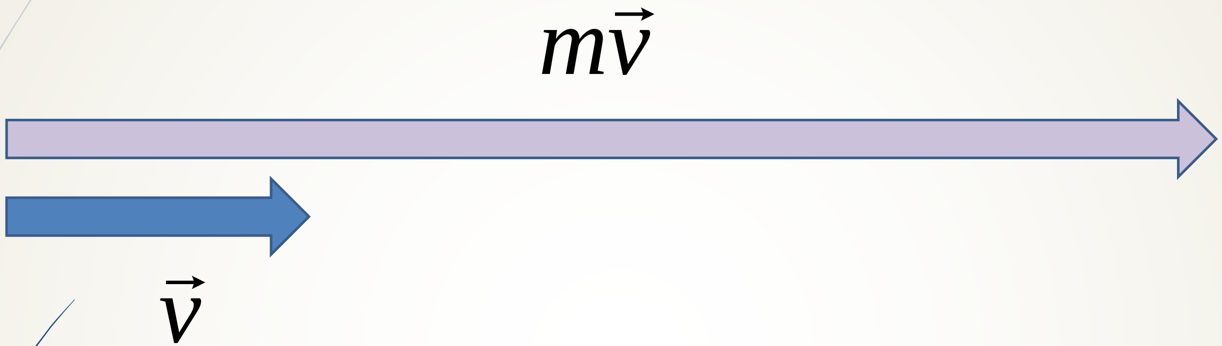
ベクトルの和

結合則

$$(\vec{v}+\vec{w})+\vec{x}=\vec{v}+(\vec{w}+\vec{x})$$



ベクトルのスカラー積



結合則・分配則

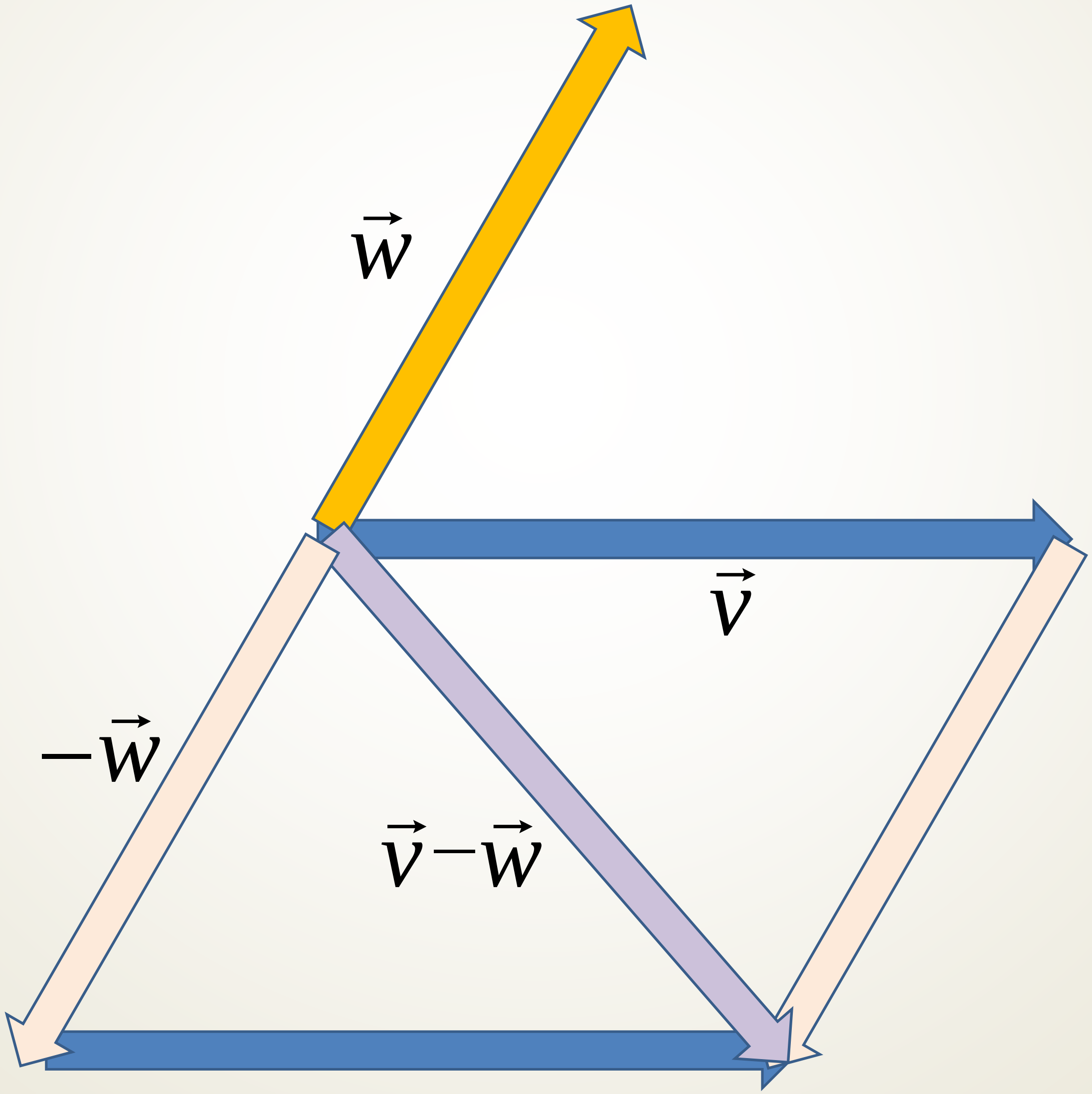
$$m(n\vec{v}) = n(m\vec{v}) = (nm)\vec{v}$$

$$(m+n)\vec{v} = m\vec{v} + n\vec{v}$$

$$m(\vec{v}+\vec{w}) = m\vec{v} + m\vec{w}$$

9

ベクトルの差



2次元空間Euclid空間のベクトル

- x座標、y座標の成分として表すことができる。
- 成分を並べる表記

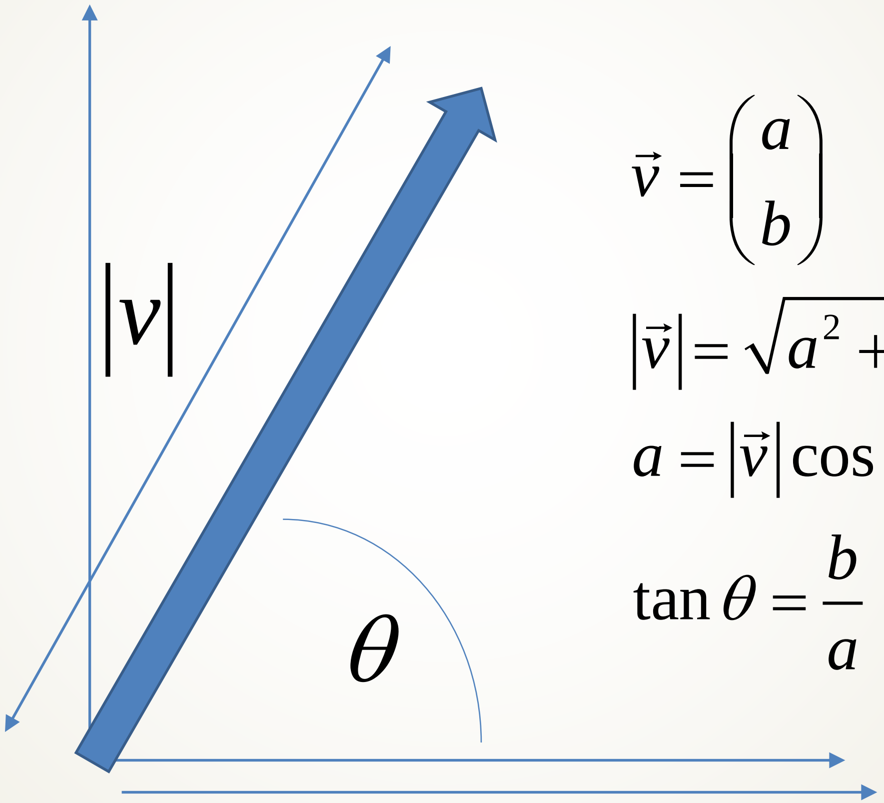
$$\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

- 単位ベクトルでの表現
  - ベクトルの和、スカラー積の性質の応用

$$\vec{v} = a\vec{e}_x + b\vec{e}_y$$

- n個のベクトルの組$(\vec{v}_0, \vec{v}_0, \dots \vec{v}_{n-1})$が一次独立とは
  - どの$\vec{v}_i$も、他のベクトルの線形結合で表せない
    - $\vec{v}_i = \sum_{j \neq i} a_j \vec{v}_j$となる$a_j$は存在しない
- nは空間の次元と一致する

ベクトルの大きさと成分



$$\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$a = |\vec{v}|\cos\theta,\ b = |\vec{v}|\sin\theta$$

$$\tan\theta = \frac{b}{a}$$

ベクトルの和:成分表示

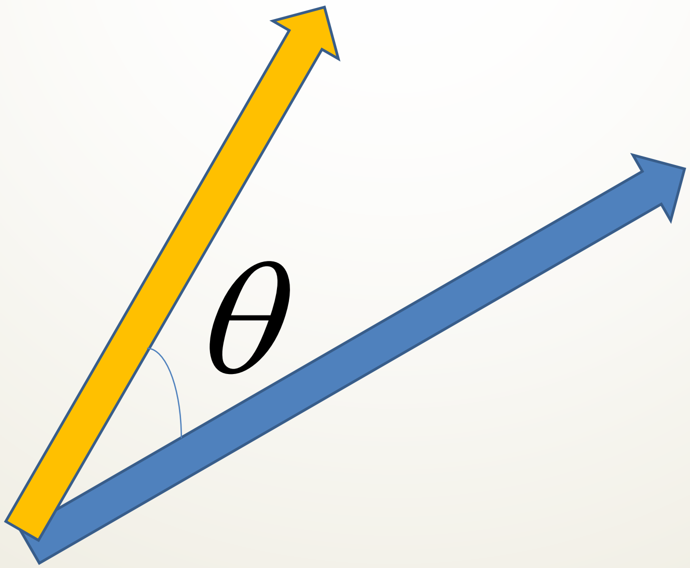
$$\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}$$

$$= (a+c)\vec{e}_x + (b+d)\vec{e}_y$$

内積

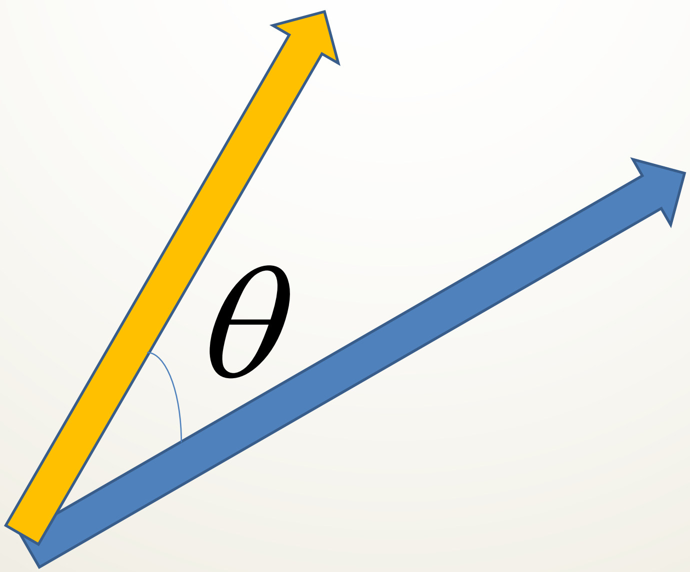
$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \left|\vec{v}\right|\left|\vec{w}\right| \cos\theta$$



内積:成分で見ると

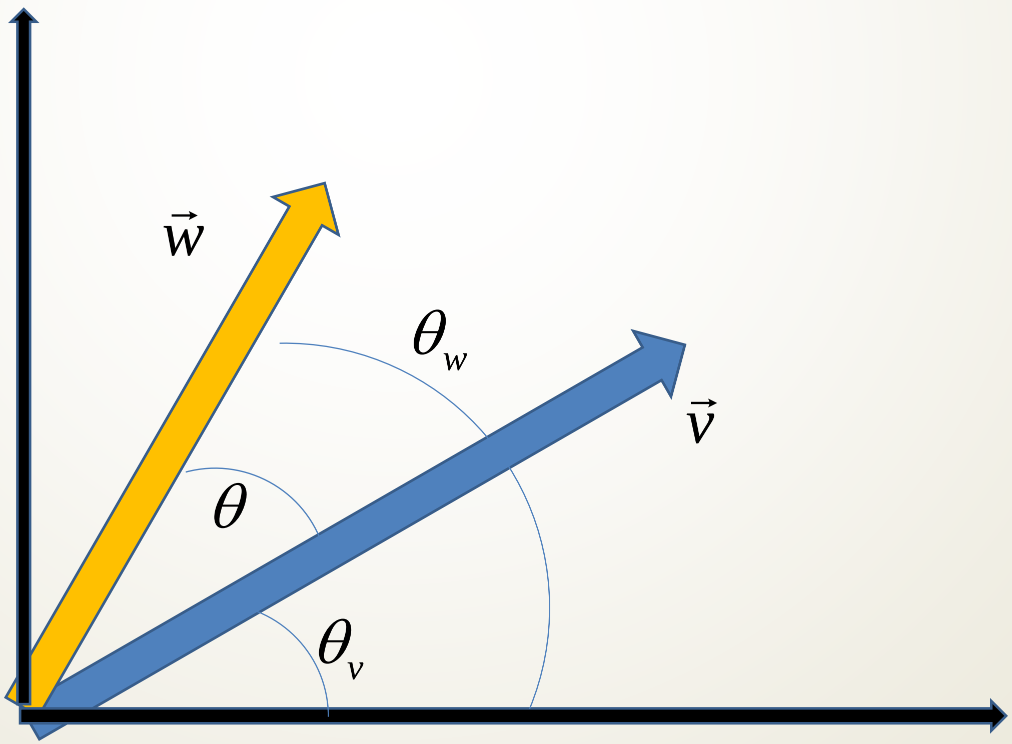
$$\vec{v}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix},\ \vec{w}=\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}$$

$$\vec{v}\cdot\vec{w}=(a\vec{e}_x+b\vec{e}_y)\cdot(c\vec{e}_x+d\vec{e}_y)$$
$$=ac(\vec{e}_x\cdot\vec{e}_x)+(ad+bc)(\vec{e}_x\cdot\vec{e}_y)+bd(\vec{e}_y\cdot\vec{e}_y)=ac+bd$$



$$\vec{v}\cdot\vec{w} = ac + bd = |\vec{v}||\vec{w}|\cos\theta_v \cos\theta_w + |\vec{v}||\vec{w}|\sin\theta_v \sin\theta_w$$

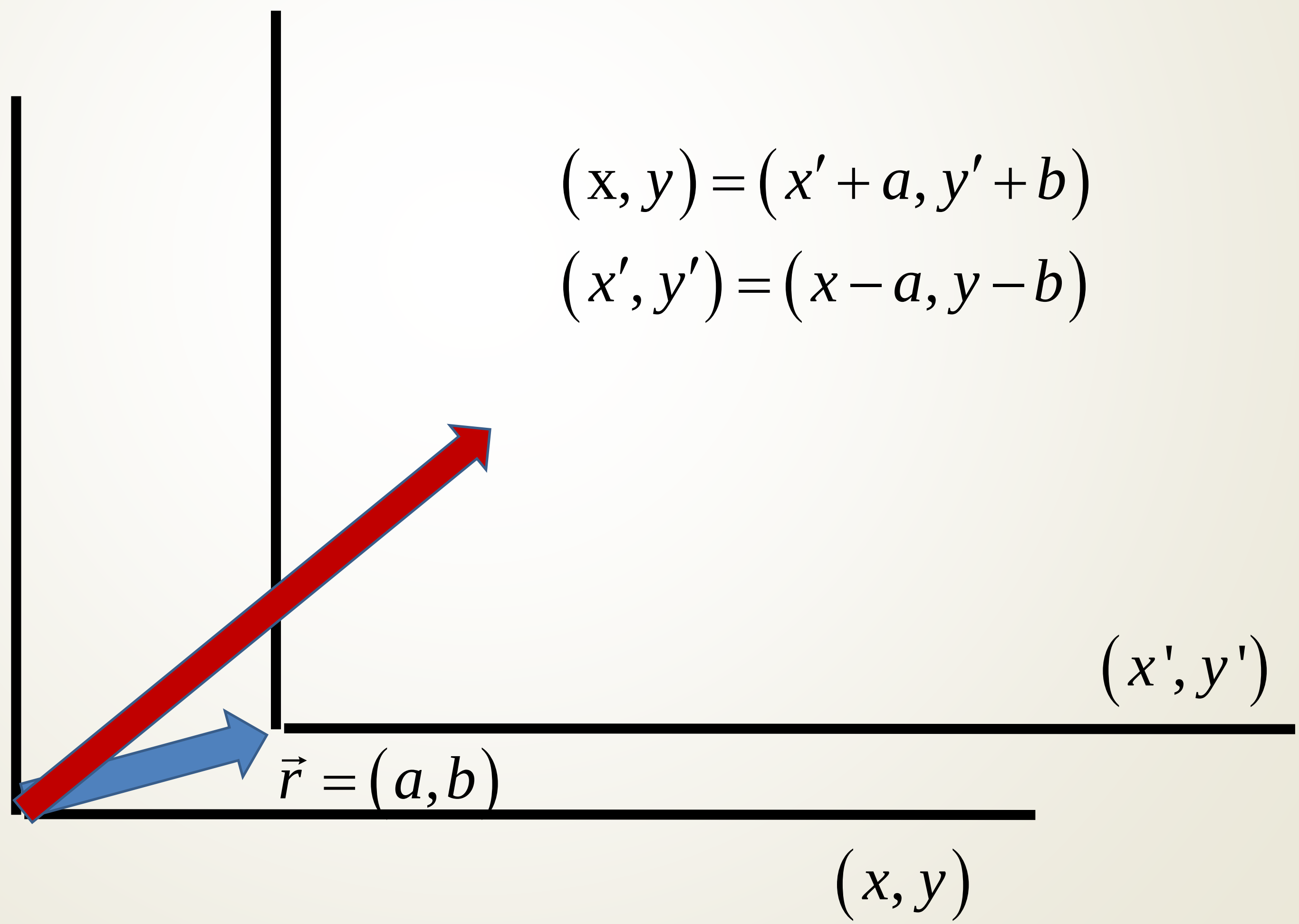
$$= |\vec{v}||\vec{w}|\cos\left(\theta_w - \theta_v\right)$$



座標変換:平行移動

$$\left(\mathrm{x}, y\right) = \left(x' + a, y' + b\right)$$

$$\left(x', y'\right) = \left(x - a, y - b\right)$$

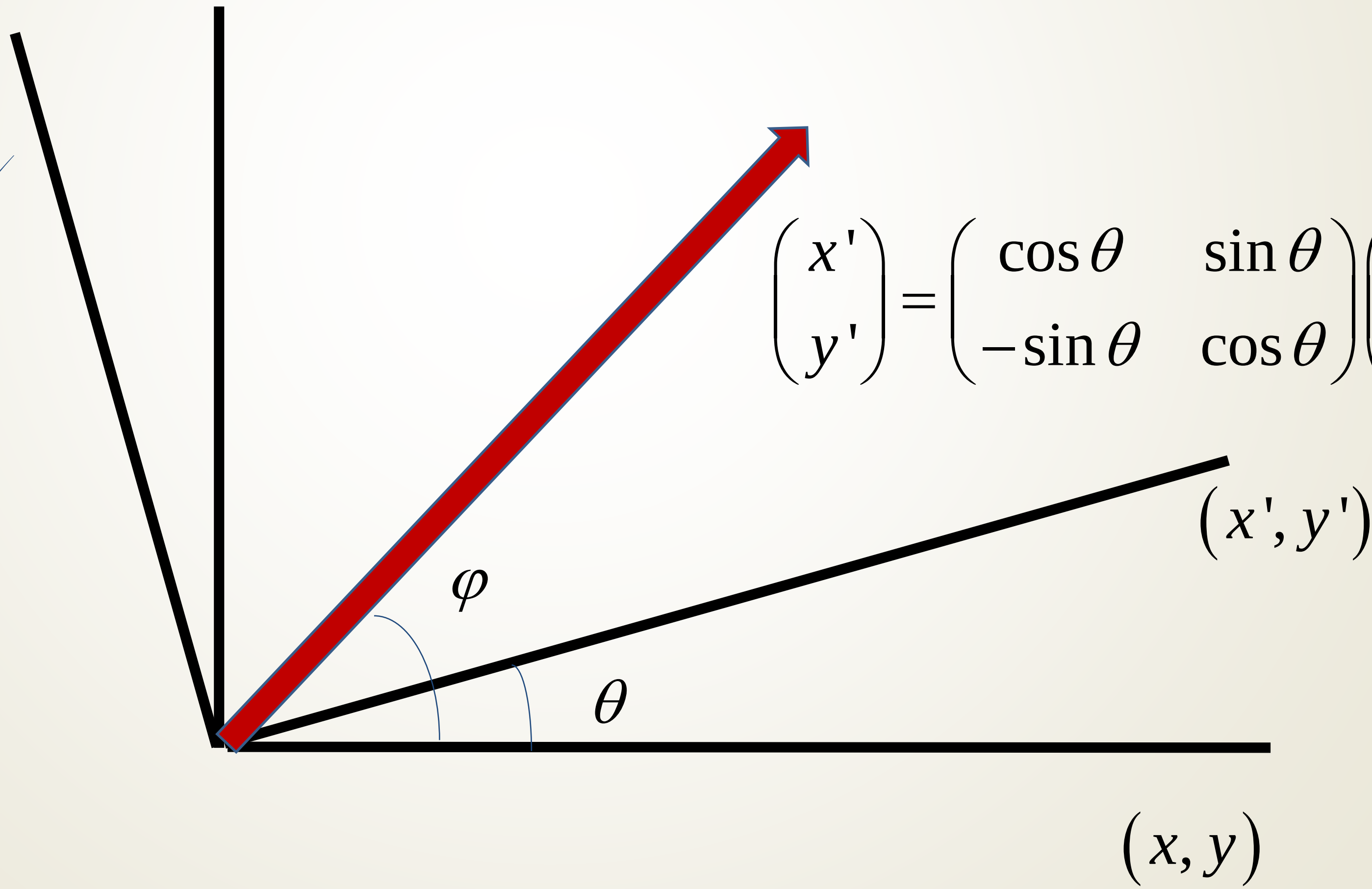


座標変換:回転

$$x' = r\cos(\varphi - \theta) = r\cos\varphi\cos\theta + r\sin\varphi\sin\theta = x\cos\theta + y\sin\theta$$

$$y' = r\sin(\varphi - \theta) = r\sin\varphi\cos\theta - r\cos\varphi\sin\theta = y\cos\theta - x\sin\theta$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



発展：3次元

- 外積$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$

$$C_x = A_y B_z - A_z B_y$$
$$C_y = A_z B_x - A_x B_z$$
$$C_z = A_x B_y - A_y B_x$$

- 発散

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$$

- 回転

$$\vec{\nabla}\times\vec{A}=\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{e}_x+\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{e}_y+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{e}_z$$