情報と物理：解析力学入門

只木進一

2018年後期

運動方程式を導く原理？

- Newton力学
  - Newtonは、何かの原理から運動法則を導いたのではない
- しかし、
  - 人は、常に上位の「原理」を探している
  - 「なぜ、〇〇の法則は成り立つか？」
- 何かの原理からNewton力学を導出できるか

登場人物

- Joseph-Louis Lagrange (1736 – 1813)
  - 18世紀最大の数学者
  - イタリア生まれ
- William Rowan Hamilton (1805 – 1865)
  - 数学者、物理学者
  - アイルランド生まれ

最小作用原理
Principle of Least Action

- Newton力学を原理的に導出する
  - 何かを最大または最小にするのがNewton力学？
  - 実現される運動は何かの**最適解**
- 準備
  - 力学法則は座標系に依存しない
  - 一般的な座標系$\{q_0, q_1, \cdots\}$を利用する

Lagrange形式の理論

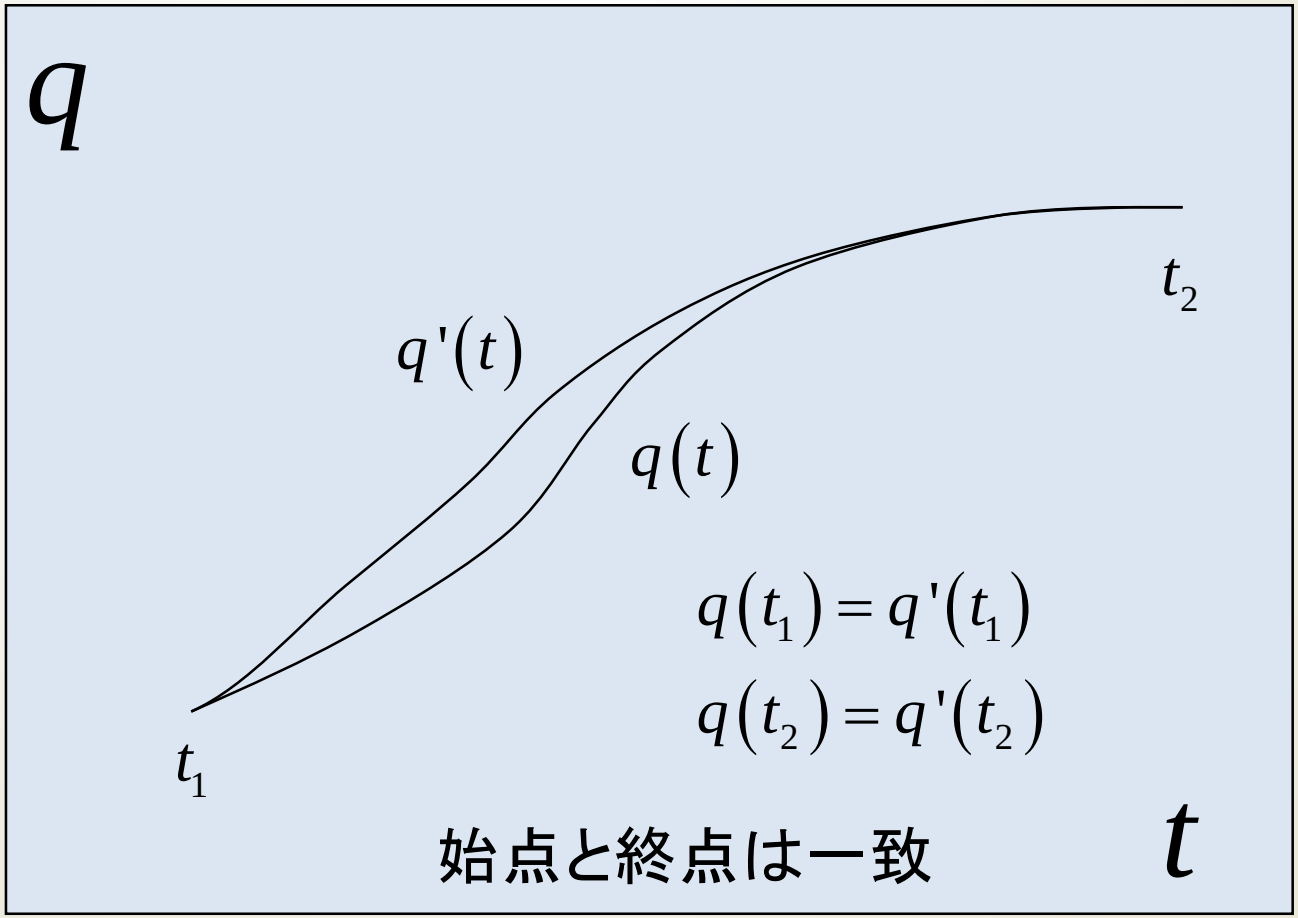
- 一次元運動を考える
  - 位置 q とその時間微分 $\dot{q}$
  - ポテンシャルエネルギー$V(q)$
- Lagrangian ($q(t)$と$\dot{q}(t)$の関数)

$$L\left(q(t),\dot{q}(t)\right)=\frac{1}{2}m\dot{q}(t)^2-V\left(q(t)\right)$$

- 作用：Lagrangianを軌道に沿って積分

$$I=\int_{t_1}^{t_2}L\left(q(t),\dot{q}(t)\right)\mathrm{d}t$$

Lagrange形式の理論
二つの経路$q(t)$と$q'(t)$



Lagrange形式の理論
二つの経路$q(t)$と$q'(t)$の意味

- 関数 $\eta(t)$:条件 $\eta(t_1) = \eta(t_2) = 0$ を満たす($\epsilon \ll 1$)

$$q'(t) = q(t) + \epsilon\eta(t)$$

$$\delta q(t) \equiv q'(t) - q(t) = \epsilon\eta(t)$$

$$\delta\dot{q}(t) \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta q(t) = \dot{q}'(t) - \dot{q}(t)$$

関数を微小に変化させる
変分(variation)と呼ぶ

Lagrange形式の理論
経路のずれ

- Lagrangianの経路 $q'(t)$ に対する経路 $q(t)$ からのずれ
  - q と $\dot{q}$ を独立として扱うことに注意

$$L\left(q'(t),\dot{q}'(t)\right)=L\left(q(t)+\delta q(t),\dot{q}'(t)+\delta\dot{q}(t)\right)$$

$$=L\left(q(t),\dot{q}(t)\right)+\frac{\partial L}{\partial q}\delta q(t)+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q}(t)+\ldots$$

ϵによる展開と同等

$$\delta L=\frac{\partial L}{\partial q}\delta q(t)+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q}(t)$$

Lagrange形式の理論
作用の差

$$\delta I = \int_{t_1}^{t_2} \delta L \mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \delta q \right] \mathrm{d}t$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q} \delta q - \delta q \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right] \mathrm{d}t + \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right]_{t_1}^{t_2}$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right] \delta q \mathrm{d}t$$

注意：部分積分
両端で $\delta q = 0$

Hamiltonの最小作用の原理

- 作用の**極値**が、軌道を与える。

$$\delta I = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right] \delta q \mathrm{d}t = 0$$

- 任意の軌道のずれ δq (任意関数 η)に対して上式が成り立つには

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0$$

- Euler-Lagrange方程式

Hamiltonの最小作用の原理

$$\frac{\partial L}{\partial q} = -\frac{\partial V}{\partial q}, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q}$$

$$m\frac{\mathrm{d}\dot{q}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial V}{\partial q}$$

- 作用を最小化する軌道が、運動方程式の解
- 運動方程式がEuler-Lagrange方程式として導出できる

変分法 (Variational method)

- 作用 I は、時間の関数としての位置$q(t)$とその時間微分$\dot{q}(t)$の汎関数(functional)(関数を引数とし、数を返す「関数」)
- 汎関数を関数で微分することを変分(variation)と呼ぶ

エネルギー保存則
Energy Conservation

- Langangian L が時刻 t に陽に(explicitly)依存しない
  - 座標 q と速度 $\dot{q}$ を通じて時刻 t に陰(implicitly)に依存
  - $\frac{\partial L}{\partial t}$ が右辺に表れない

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i}\frac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}t} + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\mathrm{d}\dot{q}_i}{\mathrm{d}t}$$

- Euler-Lagrange方程式から $\dfrac{\partial L}{\partial q_i} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = \sum_i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}t} + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\mathrm{d}\dot{q}_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_i \left(\dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \right] = 0$$

- $\tilde{E}$は保存する。つまり時間に対して不変

$$\tilde{E} = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L$$

- Descartes座標では

$$L = \frac{1}{2} m \sum_i \dot{q}_i{}^2 - V(\vec{q})$$

$$\tilde{E} = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L = m \sum_i \dot{q}_i^2 - \frac{1}{2} m \sum_i \dot{q}_i^2 + V(\vec{q})$$

$$= \frac{1}{2} m \sum_i \dot{q}_i^2 + V(\vec{q}) = E$$

- エネルギー保存が導出された

Hamiltonの正準形式

- 運動量をLagrangianを通じて定義する

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$$

- Euler-Lagrange方程式から $\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0$

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial L}{\partial q}$$

Hamiltonの正準形式

- 座標 q と対応する運動量pを独立変数とする
  - $\dot{q}$ は q と p の関数
- Hamiltonian

$$H(q,p)=\dot{q}(q,p)\,p-L\big(q,\dot{q}(q,p)\big)$$

  - エネルギーの表式であることに注意

Hamiltonの正準形式

- Hamiltonianの形式的全微分

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}H(q,p) &= \frac{\partial H}{\partial q}\mathrm{d}q + \frac{\partial H}{\partial p}\mathrm{d}p \\
&= \left[\frac{\partial(\dot{q}p)}{\partial q} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{\partial \dot{q}}{\partial q} - \frac{\partial L}{\partial q}\right]\mathrm{d}q + \left[\frac{\partial(\dot{q}p)}{\partial p} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{\partial \dot{q}}{\partial p}\right]\mathrm{d}p \\
&= \left[\frac{\partial \dot{q}}{\partial q}p - p\frac{\partial \dot{q}}{\partial q} - \dot{p}\right]\mathrm{d}q + \left[\frac{\partial \dot{q}}{\partial p}p + \dot{q} - p\frac{\partial \dot{q}}{\partial p}\right]\mathrm{d}p \\
&= -\dot{p}\mathrm{d}q + \dot{q}\mathrm{d}p
\end{aligned}
$$

Hamiltonの正準方程式

- Hamiltonianの形式的全微分とLagrangianを使った全微分を比較すると
  - 運動方程式が一階連立微分方程式として得られる

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial p}$$

  - 注意：第二の式は、q に対応した「速度」を与えるものではなく、q の時間変化を与えるものと解する

解析力学の利点

- 要素に働く力ではなく、系を構成する要素のエネルギーから構成
- 一般座標で構成できる
  - 速度や力の座標変換の面倒から解放
- 見かけ上の力に惑わされない
- 拘束条件も扱える

例:一次元の重力中の運動

- 運動エネルギーと位置エネルギー

$$T = \frac{1}{2} m\dot{x}^2, \quad V = mgx$$

- Lagrangian

$$L = T - V = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 - mgx \qquad \frac{\partial L}{\partial x} = -mg, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$$

- Euler-Lagrange方程式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = m\ddot{x} + mg = 0 \quad \Rightarrow \quad m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -mg$$

運動方程式

例:一次元の重力中の運動 Hamilton正準方程式

- $(x, \dot{x})$から(x, p)へ　$p = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$

- Hamiltonian

$$H = p\dot{x} - L = \frac{1}{m}p^2 - \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + mgx = \frac{p^2}{2m} + mgx$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} = mg, \quad \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}$$

- 正準方程式

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = -mg, \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{p}{m}$$

連立方程式となった運動方程式

一次元調和振動子

- 運動エネルギーと位置エネルギー

$$T = \frac{1}{2} m\dot{x}^2, \quad V = \frac{1}{2} kx^2$$

- Lagrangian

$$L = T - V = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 - \frac{1}{2} kx^2$$

例:一次元調和振動子 Lagrange形式

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -kx, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$$

- Euler-Lagrange方程式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = m\ddot{x} + kx = 0 \quad \Rightarrow \quad m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -kx$$

運動方程式

例:一次元調和振動子 Hamilton正準方程式

- $(x, \dot{x})$から(x, p)へ

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$$

- Hamiltonian

$$H = p\dot{x} - L = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} = kx, \quad \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}$$

- 正準方程式

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = -kx, \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{p}{m}$$

例:中心力場中の粒子の運動(2次元)

- Lagrangian

$$L = \frac{1}{2} m \left(v_x^2 + v_y^2 \right) - V\left(\sqrt{(x^2 + y^2)} \right)$$

- 極座標へ

$$x = r\cos\theta \qquad v_x = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta$$

$$y = r\sin\theta \qquad v_y = \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta$$

例：中心力場中の粒子の運動(2次元)：極座標でのLagrangian

$$L=\frac{m}{2}\left(\dot{r}^2\cos^2\theta-2r\dot{r}\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta+r^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta\right)$$
$$+\frac{m}{2}\left(\dot{r}^2\sin^2\theta+2r\dot{r}\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta+r^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta\right)-V(r)$$
$$=\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2\right)-V(r)$$

座標変換は難しくない

例：中心力場中の粒子の運動(2次元):Euler-Lagrange方程式

- Euler-Lagrange方程式

$$\frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\theta}^2 - \frac{\partial U}{\partial r} \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}$$

- 以上から

$$m\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) + \frac{\partial V}{\partial r} = 0$$

r一定で、$V \propto r^{-1}$ならば$\dot{\theta}^2 \propto r^{-3}$

$$m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r^2\dot{\theta}\right) = 0$$

面積速度一定

例:中心力場中の粒子の運動(2次元):Hamilton形式

- Hamilton形式へ

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \quad p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}$$

角運動量

$$\begin{aligned} H &= p_r\dot{r} + p_\theta\dot{\theta} - L \\ &= \frac{p_r^2}{m} + \frac{{p_\theta}^2}{mr^2} - \left[\frac{p_r^2}{2m} + \frac{{p_\theta}^2}{2mr^2} - V(r)\right] \\ &= \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{1}{r^2}p_\theta^2\right) + V(r) \end{aligned}$$

例:中心力場中の粒子の運動(2次元):正準方程式

- 正準方程式

$$\frac{\mathrm{d}p_r}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{{p_\theta}^2}{mr^3} - \frac{\partial V}{\partial r}$$

$$\frac{\mathrm{d}p_\theta}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m}$$

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{1}{m}\frac{p_\theta}{r^2}$$

角運動量保存則

例：二体問題

- 二つの粒子(質量m_1とm_2)が、その相対距離rのみで決まるポテンシャルの下で運動
- Lagrangian

$$L = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1{}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2{}^2 - V(r)$$

- 重心座標$\vec{R}$と相対座標$\vec{r}$を導入

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{x}_1 + m_2\vec{x}_2}{M}, \quad M = m_1 + m_2$$

$$\vec{r} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$$

$$\vec{x}_1 = \vec{R} + \frac{m_2}{M}\vec{r}$$

$$\vec{x}_2 = \vec{R} - \frac{m_1}{M}\vec{r}$$

- Lagrangianを書き直す

$$
\begin{aligned}
L &= \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1{}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2{}^2 - V(r) \\
&= \frac{1}{2} m_1 \left(\dot{\vec{R}} + \frac{m_2}{M} \dot{\vec{r}} \right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\dot{\vec{R}} - \frac{m_1}{M} \dot{\vec{r}} \right)^2 - V(r) \\
&= \frac{1}{2} M \dot{R}^2 + \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 - V(r), \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{M}
\end{aligned}
$$

- 重心$\vec{R}$は自由運動
- 相対位置$\vec{r}$は、質量μの粒子がポテンシャル$V(r)$内での運動に対応

- Hamilton形式へ

$$\vec{P} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{R}}} = M\dot{\vec{R}}, \quad \vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} = \mu\dot{\vec{r}}$$

$$H = \frac{1}{2M}\dot{P}^2 + \frac{1}{2\mu}\dot{p}^2 + V(r)$$

- 二つの粒子の運動量の和

$$\vec{P} = M\dot{\vec{R}} = m_1\dot{\vec{x}}_1 + m_2\dot{\vec{x}}_2$$

- Hamilton形式での運動方程式

運動量保存則

$$\frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t} = 0 \qquad \frac{\mathrm{d}\vec{R}}{\mathrm{d}t} = \frac{\vec{P}}{M}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = -\nabla V \qquad \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\vec{p}}{\mu}$$

拘束条件のある場合 Lagrangeの未定定数法

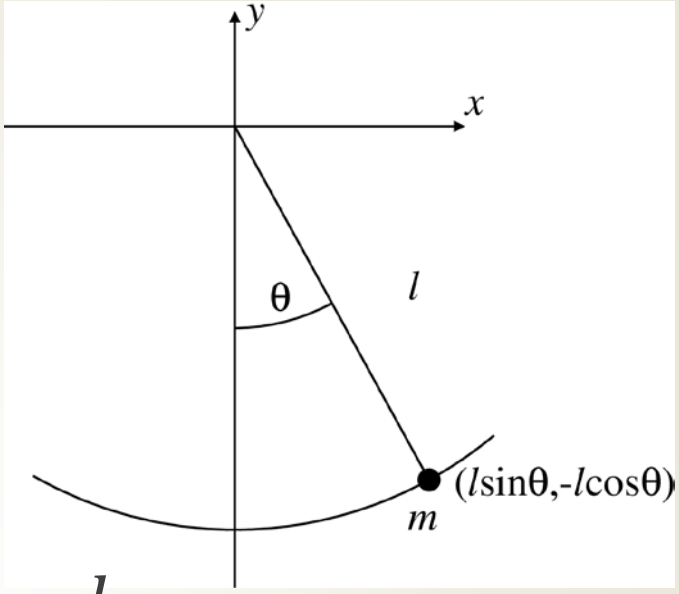
- n個の座標q_iに対して、m個の拘束条件$\phi_k(\vec{q}) = 0$がある場合

$$L'\left(\vec{q},\dot{\vec{q}}\right) = L\left(\vec{q},\dot{\vec{q}}\right) + \sum_k \lambda_k \phi_k\left(\vec{q}\right)$$

- L'を使ったEuler-Lagrange方程式と拘束条件

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L'}{\partial q_i}$$

単振子



- 拘束条件：振子の長さ$l = l_0$

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) = \frac{m}{2}\left[\left(\dot{l}\sin\theta + l\dot{\theta}\cos\theta\right)^2 + \left(\dot{l}\cos\theta - l\dot{\theta}\sin\theta\right)^2\right]$$

$$= \frac{m}{2}\left(\dot{l}^2 + l^2\dot{\theta}^2\right)$$

$$V = -mgl\cos\theta$$

$$L = T - V$$

$$L' = L - \lambda\left(l - l_0\right)$$

$$\frac{\partial L'}{\partial l} = ml\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta - \lambda, \quad \frac{\partial L'}{\partial \dot{l}} = m\dot{l}$$

$$\frac{\partial L'}{\partial \theta} = -mgl\sin\theta, \quad \frac{\partial L'}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L'}{\partial \dot{l}} = \frac{\partial L}{\partial l}$$

$$\Rightarrow m\ddot{l} = ml\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta - \lambda$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L'}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial L}{\partial \theta}$$

$$\Rightarrow 2ml\dot{l}\dot{\theta} + ml^2\ddot{\theta} = -mgl\sin\theta$$

- $l = l_0$より

$$-l_0\dot{\theta}^2 = g\cos\theta - \frac{\lambda}{m}$$

$$l_0\ddot{\theta} = -g\sin\theta$$

- 振子の張力λが自然に導入された
  - 振り子の講義の際にTと表記したもの