「情報と物理」
2013年度後期試験問題(解答例)

1 単振動

ばねに繋がれた質量の粒子が振動する運動を単振動という。ばねの自然長からのずれを x とすると、運動方程式は、時刻を t として次式で表される。

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -kx \tag{1}$$

ここで k は、ばね定数である。

1.1 ばね定数の次元

質量の次元 [M] を 、ばねのずれの次元を [L]、時刻の次元を [T] とする。このとき、ばね定数 k の次元を答えよ。

解答例 左辺の次元は $[\mathrm{MLT}^{-2}]$ である。両辺の次元は等しくなければならないので、 k の次元は以下のようになる。

$$[\mathrm{MT}^{-2}]$$

1.2 一つの解

時刻 t において、速度が 0、振幅が x_0 であったとする。このときの解は

$$x(t) = x_0\cos(\omega t) \tag{2}$$

である。ここで ω は角速度と呼ばれる。ω をばね定数 k と質量 m を用いて表せ。

解答例 式 (2) を運動方程式 (1) の左辺に代入すると

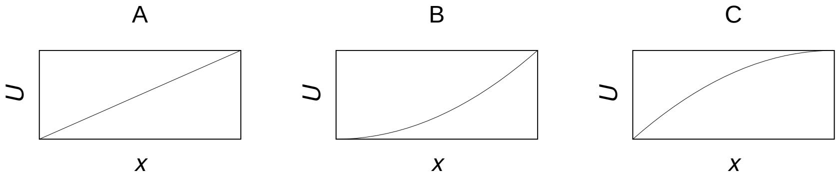
$$-m\omega^2 x(t)$$

となる。運動方程式 (1) の右辺と比較して以下を得る。

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

1.3　位置エネルギー

系のエネルギーは、運動エネルギーと位置エネルギーの和として表される。以下の三つの図は、横軸をずれ x、縦軸は位置エネルギー U を表している。いずれの変化が正しいか。



解答例　位置エネルギーはずれ x の二次関数であることから、B が正しい。

1.4　運動エネルギー最大となる時刻

運動エネルギーが最大となるのは、どのような時か。t に対する条件として示しなさい。
解答例　運動エネルギーが最大となるのは、位置エネルギーが最小、つまりばねが自然長 $x=0$ となる場合である。式 (2) より、$x=0$ となるのは、n を整数として、時刻 t が次式で表される場合である。

$$\omega t=\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$$

1.5　最大速度

問 1.4 で求めた時刻における速度の絶対値を、角速度 ω と振幅 x_0 を用いて示しなさい。
解答例　速度は式 (2) を時刻 t で一階微分することで次式として得られる。

$$v\left(t\right)=-\omega x_0\sin\left(\omega t\right)$$

$x=0$ となる時刻を速度の式に代入することで、$x=0$ を通過する速度の絶対値

$$\omega x_0$$

を得る。

1.6　運動エネルギー最大値

運動エネルギーの最大値の表式を、m、k、及び x_0 を用いて示しなさい。ただし、これら三つの量をすべて使うとは限らない。
解答例　運動エネルギー最大となるときの速度の絶対値が ωx_0 であることから、そのときの運動エネルギーは、次式で与えられ、それが運動エネルギーの最大値に相当する。

$$\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m\left(\omega x_0\right)^2=\frac{1}{2}kx_0^2$$

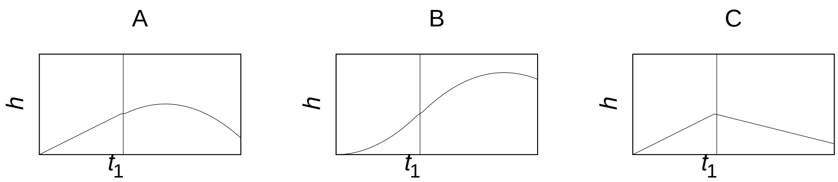
2　ロケット打ち上げ

質量 m のロケット打ち上げを考える。時刻 $t=0$ で、高さ $h=0$ から打ち上げる。初速は 0 である。時刻 t_1 までは、鉛直上方へ一定の推進力 $F > mg$ で上昇する。ここで g は重力加速度である。つまり、ロケットには推進力 F と重量 mg が作用している。

時刻 t_1 で燃料が無くなり、その後は重力のみがロケットに作用するとする。燃料の消費によるロケットの質量の変化、ロケットの大きさ、ロケットへの摩擦は無視することとする。

2.1　軌道の概形

軌道の大まかな形を考える。横軸に時刻、縦軸にその時の鉛直方向の高さを描いた図は、以下のうちのいずれが正しいか？



解答例　時刻 t_1 までは上向きの一様加速度であるため、下に凸な二次曲線である。t_1 以降は下向きの一様加速度であるため、上に凸な二次曲線である。したがって B が正しい。

2.2　燃料が無くなった時刻の速度

燃料が無くなる時刻 t_1 における鉛直上方向の速度 $v\left(t_1\right)$ を求めなさい。

解答例　燃料が無くなった時刻 t_1 における鉛直方向の速度は次式で与えられる。

$$\frac{1}{m}\left(F - mg\right) t_1 = g\left(\frac{F}{mg} - 1\right) t_1$$

2.3　燃料が無くなった時刻での高さ

燃料が無くなる時刻 t_1 における高さ $h\left(t_1\right)$ を求めなさい。

解答例

$$h\left(t_1\right) = \frac{1}{2} g\left(\frac{F}{mg} - 1\right) t_1^2$$

2.4　最高点となる時刻

最高点となる時刻 t_2 は、t_1 から t_2 までに発生する重力による鉛直下向きの速度と $v\left(t_1\right)$ が等しくなる時刻である。時刻 t_2 を求めなさい。

解答例　時刻 t_1 から t_2 までに重力によって発生する鉛直下向きの速度は

$$g\left(t_2 - t_2\right)$$

である。この値と $v \leq mgt_1$ を等しいと置くことで、最高点となる時刻 t_2 を得る。

$$t_2 = \frac{F}{mg} t_1$$

2.5　燃料が無くなった後の上昇する高さ

燃料が無くなった時刻 t_1 から最高点となる時刻 t_2 までに上昇する高さ Δh を求めなさい。

解答例　時刻 t_1 における速度が $v\left(t_1\right)$ であることを考慮する。

$$
\begin{aligned}
\Delta h &= v\left(t_1\right)\left(t_2-t_1\right)-\frac{1}{2}g\left(t_2-t_1\right)^2 \\
&= \left[v\left(t_1\right)-\frac{1}{2}g\left(t_2-t_1\right)\right]\left(t_2-t_1\right) \\
&= \left[g\left(\frac{F}{mg}-1\right)t_1-\frac{1}{2}g\left(\frac{F}{mg}-1\right)t_1\right]\left(\frac{F}{mg}-1\right)t_1 \\
&= \frac{1}{2}g\left(\frac{F}{mg}-1\right)^2 t_1^2
\end{aligned}
$$

2.6　最高の高さ

最高の高さ H を求めなさい。答えは、m、g、F 及び t_1 を用いて表しなさい。

解答例　最高点の高さを得る。

$$
H=h\left(t_1\right)+\Delta h=\frac{1}{2}g\left(\frac{F}{mg}-1\right)t_1^2+\frac{1}{2}g\left(\frac{F}{mg}-1\right)^2 t_1^2=\frac{1}{2m}F\left(\frac{F}{mg}-1\right)t_1^2
$$