「情報と物理」
2015 年度後期試験問題 (解答例)

1　単振動

ばねに繋がれた質量の粒子が振動する運動を単振動という。ばねの自然長からのずれを x とすると、運動方程式は、時刻を t として次式で表される。

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -kx \tag{1}$$

ここで k は、ばね定数である。

1.1　ばね定数の次元

質量の次元 [M] を 、ばねのずれの次元を [L]、時刻の次元を [T] とする。このとき、ばね定数 k の次元を答えよ。
解答例　左辺の次元は $[\mathrm{MLT}^{-2}]$ である。両辺の次元は等しくなければならないので、 k の次元は以下のようになる。

$$[\mathrm{MT}^{-2}]$$

1.2　一つの解

時刻 $t = 0$ において、速度が 0、振幅が x_0 であったとする。このときの解は

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t) \tag{2}$$

である。ここで ω は角速度と呼ばれる。ω をばね定数 k と質量 m を用いて表せ。
解答例　式 (2) を運動方程式 (1) の左辺に代入すると

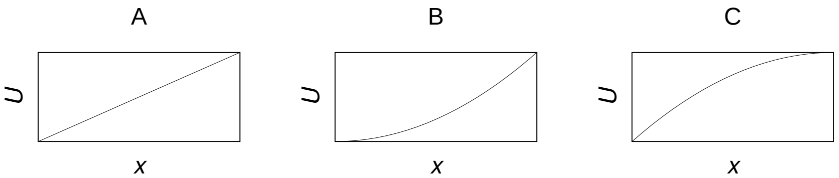
$$-m\omega^2 x(t)$$

となる。運動方程式 (1) の右辺と比較して以下を得る。

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

1.3　ポテンシャルエネルギー

系のエネルギーは、運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和として表される。以下の三つの図は、横軸をずれ x、縦軸はポテンシャルエネルギー U を表している。いずれの変化が正しいか。



解答例　ポテンシャルエネルギーはずれ x の二次関数であることから、B が正しい。

1.4　運動エネルギー最大となる時刻

運動エネルギーが最大となる時刻を、t に対する条件として示しなさい。
解答例　運動エネルギーが最大となるのは、位置エネルギーが最小、つまりばねが自然長 $x = 0$ となる場合である。式 (2) より、$x = 0$ となるのは、n を整数として、時刻 t が次式で表される場合である。

$$\omega t = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$$

1.5　最大速度

問 1.4 で求めた時刻における速度の絶対値を、角速度 ω と振幅 x_0 を用いて示しなさい。
解答例　速度は式 (2) を時刻 t で一階微分することで次式として得られる。

$$v\left(t\right) = -\omega x_0 \sin\left(\omega t\right)$$

$x = 0$ となる時刻を速度の式に代入することで、$x = 0$ を通過する速度の絶対値

$$\omega x_0$$

を得る。

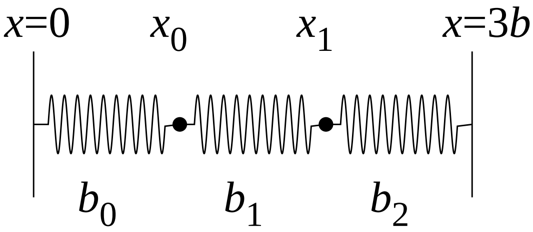
1.6　運動エネルギー最大値

運動エネルギーの最大値の表式を、m、k、及び x_0 を用いて示しなさい。ただし、これら三つの量をすべて使うとは限らない。
解答例　運動エネルギー最大となるときの速度の絶対値が ωx_0 であることから、そのときの運動エネルギーは、次式で与えられ、それが運動エネルギーの最大値に相当する。

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\omega x_0\right)^2 = \frac{1}{2}kx_0^2$$

2　連成振動

2.1　ばねの長さ



図のように二つの質量 m の粒子がばねで繋がれているとする。粒子やばねに働く摩擦を無視することにする。

ばねの自然長を b、ばね定数を k とする。また、粒子の位置を x_0、x_1 と表す。左の壁の位置を $x=0$、右の壁の位置を $x=3b$ とすると、粒子の静止位置は、それぞれ b と $2b$ である。二つの粒子の静止位置からのずれを、それぞれ

$$y_0 = x_0 - b, \quad y_1 = x_1 - 2b$$

とする。このとき、三つのばねの長さ b_0、b_1、b_2 を y_0 と y_1 を用いて表しなさい。

解答例

$$b_0 = y_0 + b, \quad b_1 = y_1 - y_0 + b, \quad b_2 = b - y_1$$

2.2　ポテンシャルエネルギー

ばねに蓄えられるポテンシャルエネルギーは、それぞれのばねの自然長からの差を用いて、以下のように表される。

$$V = \frac{k}{2}\left(b_0 - b\right)^2 + \frac{k}{2}\left(b_1 - b\right)^2 + \frac{k}{2}\left(b_2 - b\right)^2$$

これを y_0、y_1、及び k を用いて表しなさい。

解答例

$$V = \frac{k}{2}\left[y_0^2 + \left(y_1 - y_0\right)^2 + y_1^2\right]$$

2.3　粒子に働く力

粒子 i $(=0,1)$ に働く力 F_i は

$$F_i = -\frac{\partial V}{\partial y_i}$$

で与えられる。二つの粒子に働く力 F_0 と F_1 をそれぞれ求めなさい。

解答例

$$F_0 = -\frac{\partial V}{\partial y_0} = -ky_0 + k\left(y_1 - y_0\right)$$

$$F_1 = -\frac{\partial V}{\partial y_1} = -ky_1 - k\left(y_1 - y_0\right)$$

2.4 粒子の運動方程式

y_0 及び y_1 に対する運動方程式を示しなさい。

解答例

$$m\frac{\mathrm{d}^2 y_0}{\mathrm{d}t^2} = -ky_0 + k\left(y_1 - y_0\right)$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2 y_1}{\mathrm{d}t^2} = -ky_1 - k\left(y_1 - y_0\right)$$