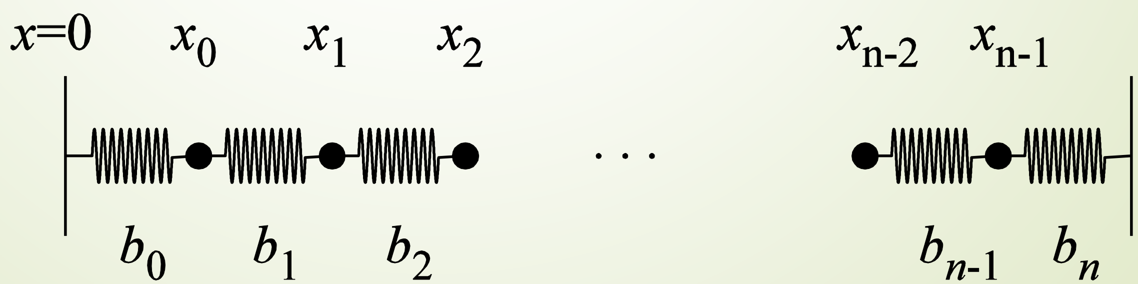
連成振動

モデリングとシミュレーション

2016年度

モデルの設定

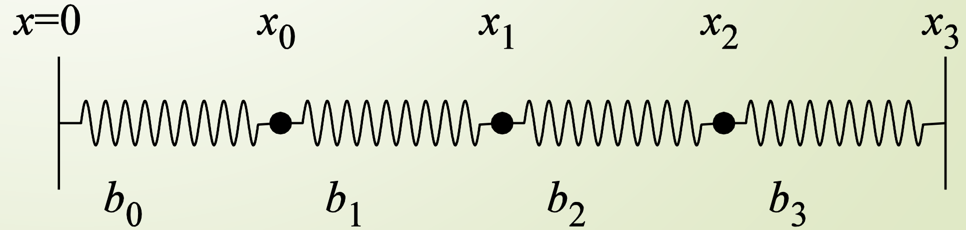
- 自然長bのばねで、質量mの粒子n個が連結されている
  - 粒子の位置：x_i
  - 粒子の平衡位置からのずれ：
    $$y_i = x_i - (i+1)b$$



3粒子系

$$V = \frac{k}{2}\left[y_0^2 + \sum_{i=1}^{2} \left(y_i - y_{i-1} \right)^2 + y_2^2 \right]$$

- ばねの位置エネルギー
  - ばね0：$\frac{ky_0^2}{2}$
  - ばね1：$\frac{k(y_1-y_0)^2}{2}$
  - ばね2：$\frac{k(y_2-y_1)^2}{2}$
  - ばね3：$\frac{ky_2^2}{2}$



3粒子の運動方程式

$$m\frac{\mathrm{d}^2 y_i}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{\partial V}{\partial y_i}$$

$$\Downarrow$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2 y_0}{\mathrm{d}t^2} = -k\left(2y_0 - y_1\right)$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2 y_1}{\mathrm{d}t^2} = -k\left(-y_0 + 2y_1 - y_2\right)$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2 y_2}{\mathrm{d}t^2} = -k\left(-y_1 + 2y_2\right)$$

運動方程式を行列で表記

$$m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = -k\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = -kM\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

- 右辺の行列Mの固有値をλ、対応する固有ベクトルを$\vec{v}_\lambda$とする

$$z_\lambda = \overrightarrow{v_\lambda} \cdot \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

運動方程式を行列で表記

$$m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}z_\lambda = \vec{v}_\lambda \cdot m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = -k\vec{v}_\lambda \cdot M\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$= -k\lambda\vec{v}_\lambda \cdot \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = -k\lambda z_\lambda$$

- 角速度$\omega_\lambda = \sqrt{\frac{k\lambda}{m}}$の単振動

固有値

- 固有値方程式

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\left[(2-\lambda)^2 - 2\right] = 0$$

- 固有値

$$\lambda_0 = 2, \quad \lambda_\pm = 2 \pm \sqrt{2}$$

固有ベクトル

- $\lambda_0 = 2$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v}_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- $\lambda_\pm = 2 \pm \sqrt{2}$

$$\begin{pmatrix} \mp\sqrt{2} & -1 & 0 \\ -1 & \mp\sqrt{2} & -1 \\ 0 & -1 & \mp\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{v_\pm} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \mp\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$z_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(y_0 - y_2\right)$$

$$z_\pm = \frac{1}{2}\left(y_0 \mp \sqrt{2}y_1 + y_2\right)$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2 z_0}{\mathrm{d}t^2} = -2kz_0$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2 z_\pm}{\mathrm{d}t^2} = -\left(2 \pm \sqrt{2}\right)kz_\pm$$

3種類の角速度の単振動

$$y_0 = \frac{1}{2}\left(z_+ + \sqrt{2}z_0 + z_-\right)$$

$$y_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(z_+ - z_-\right)$$

$$y_2 = \frac{1}{2}\left(z_+ - \sqrt{2}z_0 + z_-\right)$$

3種類の角速度の単振動の重ね合わせ

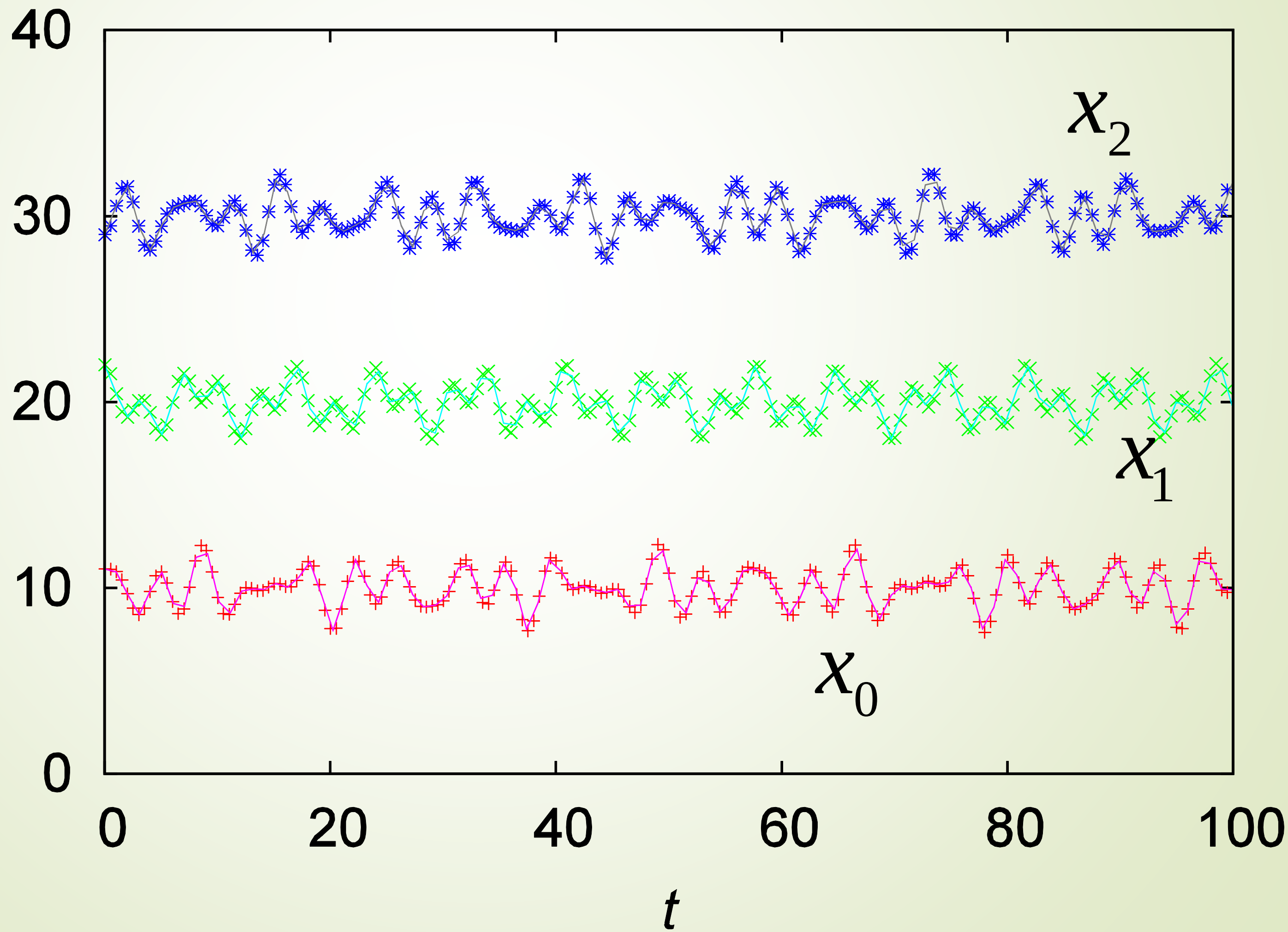
$$x_0 = b + y_0 = b + \frac{1}{2}\left(z_+ + \sqrt{2}z_0 + z_-\right)$$

$$x_1 = 2b + y_1 = 2b + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(z_+ - z_-\right)$$

$$x_2 = 3b + y_2 = 3b + \frac{1}{2}\left(z_+ - \sqrt{2}z_0 + z_-\right)$$

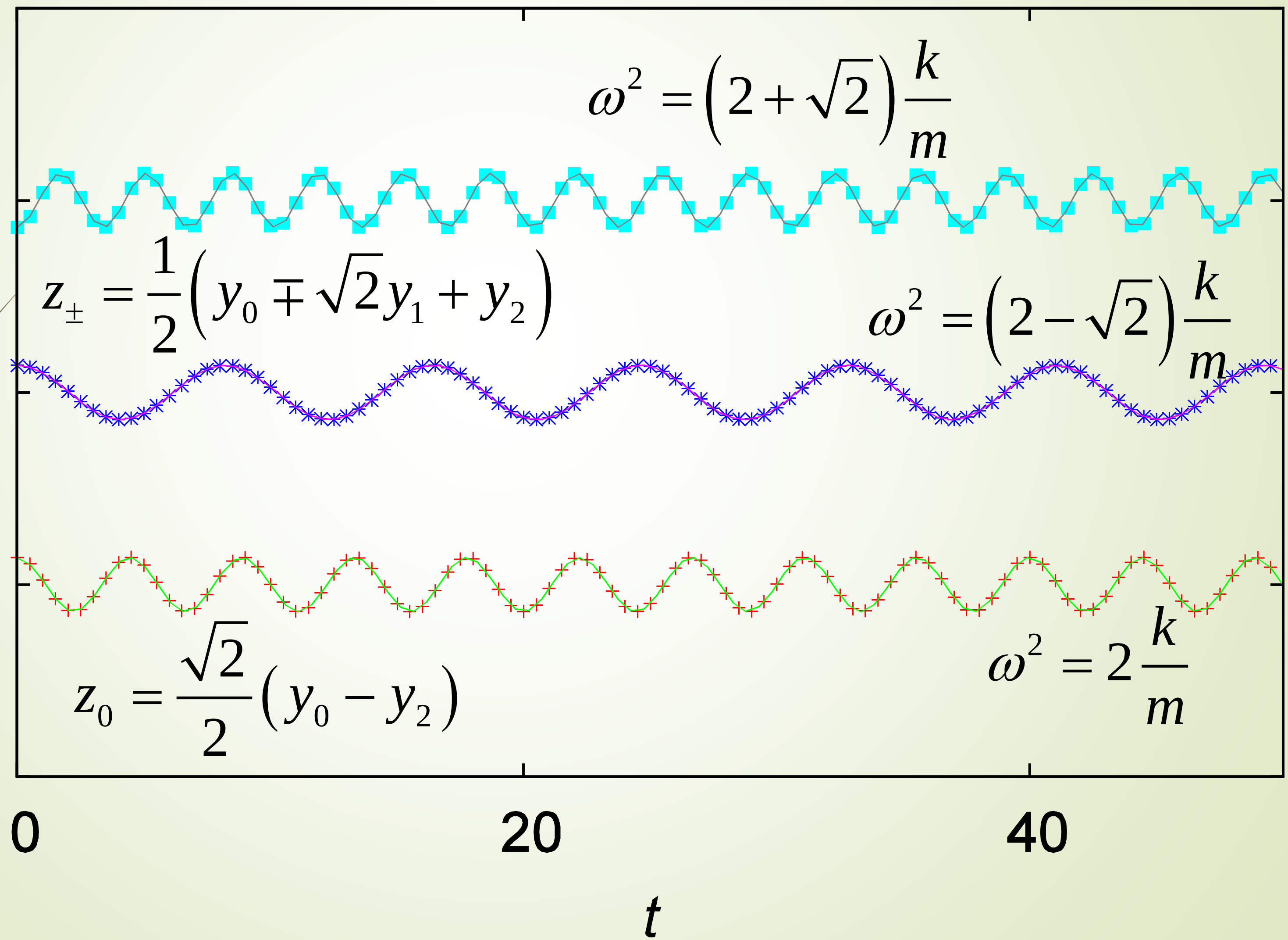
$$k/m=1,\quad \big(x(0),v(0)\big)=\big((1,0),(2,0),(-1,0)\big),\quad b=10$$

$$z_0=\sqrt{2}\cos\lambda_0 t,\quad z_\pm=\pm\sqrt{2}\cos\lambda_\pm t$$



各単振動

見やすいように、縦軸をずらしている



n粒子

- ばねに蓄えられるエネルギー

$$V = \frac{k}{2}\left[y_0^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \left(y_i - y_{i-1} \right)^2 + y_{n-1}^2 \right]$$

- 運動方程式

$$m\frac{\mathrm{d}^2 y_i}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{\partial V}{\partial y_i}$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2 y_i}{\mathrm{d}t^2} = -k\sum_{j=0}^{n-1} M_{ij} y_j$$

$$M_{ij} = \begin{cases} 2 & i = j \\ -1 & j = i \pm 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

連立微分方程式への変形

- ずれy_iとその速度v_i

$$\frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}t} = v_i$$

$$\frac{\mathrm{d}v_i}{\mathrm{d}t} = -\frac{k}{m}\sum_{j=0}^{n-1} M_{ij} y_j$$

$$M_{ij} = \begin{cases} 2 & i = j \\ -1 & j = i \pm 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$yy[2i] = \mathrm{y}_i$$

$$yy[2i+1] = v_i$$

クラス設計

- Runge-Kutta法を使って数値解
  - 変数と振動子の位置・速度との対応が分りにくくなる
- 一つの振動子の位置と速度を組にしたクラスOscillator
  - 初期値設定やデータ取り出しに利用

gnuplotの工夫

- 一つのファイルに(t, y_0, y_1, y_2)をスペース区切りで出力
- plot ファイル名 using 1:3
  - (t, y_1)をプロット
- plot ファイル名 using 1:($3+5)
  - $(t, y_1 + 5)$をプロット