「モデリングとシミュレーション」
2016年度期末レポート課題

締切:2017/2/13

1　期末レポートについて

期末レポート課題は、以下の通りです。期日までに、理工学部7号館2階のレポートボックスへ提出すること。

- 電子的に作成し、A4用紙に印刷して提出すること。
- 正しい日本語で作成すること。
- 他人のレポートを写したと判断した場合には、不合格とする。
- 書籍やWebページ等を参考としている場合には、必ず出典を明示すること。
- 単に課題に答えるだけでなく、課題の説明、考え方、解答過程、開発したプログラム(java及びgnuplot)も含めて、レポートとして筋道のあるものとすること。

2　Logistic 写像

Logistic写像は、生物集団の個体数の簡単なモデルであるとともに、カオスの基本モデルである。カオスとは、系の時間発展が非常に複雑となる現象の総称である。Logistic写像は非常に簡単なモデルであるにも関わらず、パラメタを変えることで周期運動からカオスへと、その挙動を変化させる。

ある時刻tの変数の値$0 \leq x_t \leq 1$に対して、次の時刻$t+1$の値を

$$x_{t+1} = 4\lambda x_t \left(1 - x_t\right) \tag{2.1}$$

で求める。ここで$0 < \lambda < 1$はパラメタである。ここで、

$$f_\lambda\left(x\right) = 4\lambda x\left(1 - x\right) \tag{2.2}$$

と表記することにする。$x = f_\lambda\left(x\right)$となる$x$を関数$f_\lambda$の固定点(fixed point)と呼ぶ。

課題 1　$\lambda < 1/4$ のとき、$0 \le x \le 1$ に対して、常に $x \ge f_\lambda(x)$ となることを示しなさい。このとき、$x = 0$ のみが固定点となる。

時間発展のなかで固定点に収束するとは限らない。固定点が安定でなければ、収束せず、固定点から遠ざかる。その挙動を調べよう。固定点を x^0 とする。時刻 $t = 0$ で、初期値が固定点 x^0 から少しだけずれていたとする。

$$x_0 = x^0 + \epsilon_0 \tag{2.3}$$

このずれ ϵ_0 が次の時刻に小さくなれば安定、大きくなれば不安定である。$\epsilon_0 \ll 1$ であることから

$$\begin{aligned} x_1 &= f_\lambda\left(x^0 + \epsilon_0\right) = f_\lambda\left(x^0\right) + f'_\lambda\left(x^0\right)\epsilon_0 + O\left(\epsilon_0^2\right) \\ &= x^0 + f'_\lambda\left(x^0\right)\epsilon_0 + O\left(\epsilon_0^2\right) \end{aligned} \tag{2.4}$$

である。つまり $|f'_\lambda(x^0)| > 1$ であれば不安定、$|f'_\lambda(x^0)| < 1$ であれば安定となる。

課題 2　$\lambda < 1/4$ のとき、$x = 0$ は安定な固定点であることを示しなさい。

3　一周期運動

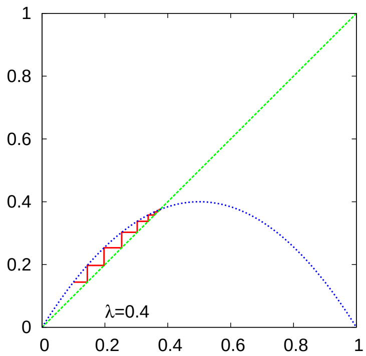

図 1: $\lambda = 0.4$ のときの軌道。固定点に収束する様子が分かる。

$1/4 < \lambda$ では $x = f_\lambda(x)$ の解は $x_1 = 0$ と $x_2 = 1 - 1/(4\lambda)$ の二つとなる。図 1 に $\lambda = 0.4$ のときの、固定点への収束の様子を示す。

課題 3　$1/4 < \lambda < 3/4$ では $x_1 = 0$ は不安定固定点となり、x_2 が安定固定点となることを示しなさい。

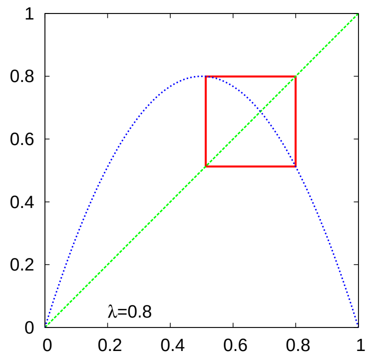

図 2: $\lambda = 0.8$ のときの軌道。二つの点を交互に移動している。

4　二周期運動

$\lambda \to 3/4$ で $f'_\lambda(x_2) \to -1$ となり、不安定となる。λ が 3/4 より大きくなると一周期運動に代わって出現するのが、x の二つの値を交互に移動する二周期運動である。図 2 は、$\lambda = 0.8$ の場合の軌道である。その二つを $x_\pm$ とすると、以下の関係から定義される。

$$x_- = 4\lambda x_+ (1 - x_+) \tag{4.1}$$
$$x_+ = 4\lambda x_- (1 - x_-) \tag{4.2}$$

式 (4.1) から (4.2) を辺々引き、

$$x_+ + x_i = 1 + \frac{1}{4\lambda} \tag{4.3}$$

をえる。さらに、式 (4.1) と (4.2) を辺々加え、式 (4.3) を代入することで、

$$x_+ x_- = \frac{1}{4\lambda}\left(1 + \frac{1}{4\lambda}\right) \tag{4.4}$$

を得る。

課題 4　和と積が与えられたことから、$x_\pm$ は二次方程式の解である。その二次方程式を示すとともに、$x_\pm$ を求めなさい。

合成関数 $F_\lambda^{(k)}(x)$ を以下のように定義する。

$$F_\lambda^{(1)}(x) = f_\lambda(x) \tag{4.5}$$
$$F_\lambda^{(2)}(x) = f_\lambda(f_\lambda(x)) \tag{4.6}$$
$$F_\lambda^{(k+1)}(x) = f_\lambda\left(F_\lambda^{(k)}(x)\right) \tag{4.7}$$

この時、$x_\pm$ は $x = F_\lambda^{(2)}(x)$ の固定点である。

安定性を調べるためには、固定点における $x = F_\lambda^{(2)}(x)$ の傾きを調べる必要がある。

$$F_\lambda^{\prime(2)}(x) = f_\lambda^\prime(f_\lambda(x))\, f_\lambda^\prime(x) \tag{4.8}$$

に対して、$x_\pm$ を代入する。ここで、$x_\mp = f_\lambda(x_\pm)$ に注意する。

$$F_\lambda^{\prime(2)}(x_\pm) = f_\lambda^\prime(x_\mp)\, f_\lambda^\prime(x_\pm) \tag{4.9}$$

課題 5　$f_\lambda^\prime(x_\pm)$ 及び $F_\lambda^{\prime(2)}(x)$ を λ の関数として求めなさい。また、区間 $3/4 < \lambda < \left(1+\sqrt{6}\right)/4$ において、$F_\lambda^{\prime(2)}(x)$ は、λ の減少関数であることを示しなさい。

$\lambda = 3/4$ では $f_\lambda^\prime(x_\pm) = -1$ より

$$F_\lambda^{\prime(2)}(x_\pm) = 1 \tag{4.10}$$

$\lambda = \left(1+\sqrt{6}\right)/4$ では $f_\lambda^\prime(x_\pm) = -1 \mp \sqrt{2}$ より

$$F_\lambda^{\prime(2)}(x_\pm) = -1 \tag{4.11}$$

となり、この区間 $3/4 < \lambda < \left(1+\sqrt{6}\right)/4$ で二周期運動が安定である。

5　周期倍加からカオスへ

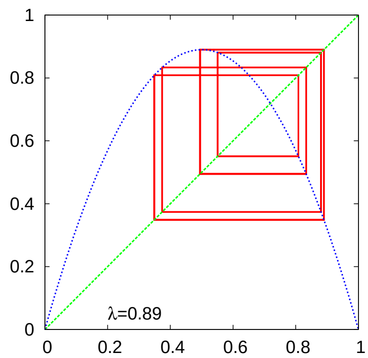

図 3: $\lambda = 0.89$ のときの軌道。八周期運動を示す。

$\lambda = \left(1+\sqrt{6}\right)/4$ で二周期運動は不安定となり、四周期運動が出現する。λ が増加すると四周期運動も不安定となり、八周期運動が出現する (図 3)。このようにパラメタの変化に伴って倍の周期が次々と現れることを周期倍加と呼ぶ。

Logistic 写像では、周期倍加の起こる λ の幅は次第に狭くなり、$\lambda < 1$ で周期が無限となってしまう。もはや運動は周期的ではないが、まったくでたらめでもない。初期条件のわずかな差は急速に拡大されるために、動きの予想ができない。こ

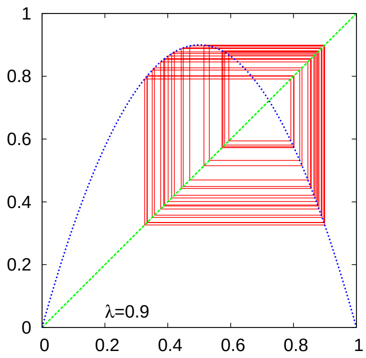

図 4: $\lambda = 0.9$ のときの軌道。カオスを示す。

のような運動をカオスと呼ぶ。図 4 は $\lambda = 0.9$ の軌道である。複雑なふるまいとなっている。

$\lambda = 0.9$ の場合は、軌道は二つの区間に限定されていることに注目する。左側の区間 $A = \left[F_\lambda^{(2)}(1/2), F_\lambda^{(4)}(1/2)\right]$ と右側の区間 $B = \left[F_\lambda^{(3)}(1/2), F_\lambda^{(1)}(1/2)\right]$ である。ここで、$\lambda = 0.9$ の場合は、以下の不等式が成り立つことに留意する。

$$F_\lambda^{(3)}\left(\frac{1}{2}\right) < F_\lambda^{(5)}\left(\frac{1}{2}\right) < F_\lambda^{(1)}\left(\frac{1}{2}\right) \tag{5.1}$$

$$F_\lambda^{(2)}\left(\frac{1}{2}\right) < \frac{1}{2} < F_\lambda^{(4)}\left(\frac{1}{2}\right) \tag{5.2}$$

課題 6　以上より、以下のように区間内の点が写像されることを確かめなさい。

$$f_\lambda(A) = f_\lambda\left(\left[F_\lambda^{(2)}\left(\frac{1}{2}\right), F_\lambda^{(4)}\left(\frac{1}{2}\right)\right]\right) = B \tag{5.3}$$

$$f_\lambda(B) = f_\lambda\left(\left[F_\lambda^{(3)}\left(\frac{1}{2}\right), F_\lambda^{(1)}\left(\frac{1}{2}\right)\right]\right) = A \tag{5.4}$$

ここで、区間 A は

$$A = \left[F_\lambda^{(2)}\left(\frac{1}{2}\right), \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, F_\lambda^{(4)}\left(\frac{1}{2}\right)\right] \tag{5.5}$$

の二つからなることに注意しなさい。