# 指定された分布に従う乱数

## モデリングとシミュレーション

2019年度

# 一様乱数から指定された分布に従う乱数へ

- シミュレーションにおいて、乱数の分布が指定される場合がある
  - 指数分布に従う乱数
    - でたらめな時間間隔で事象が発生する
  - 正規分布に従う乱数
    - ある平均値のまわりのでたらめな揺らぎ
- 変換法
- 棄却法

# 確率分布

- 実数に対する分布
  - 実数は連続であることに注意
  - 「ある値になる確率」はあり得ない
- 確率変数$X \in [a, b)$に対する確率分布
  - $\mathrm{a} \leq X < x$という「範囲」に対して確率を定義

$$F(x) = P(a \leq X < x)$$

# 確率密度

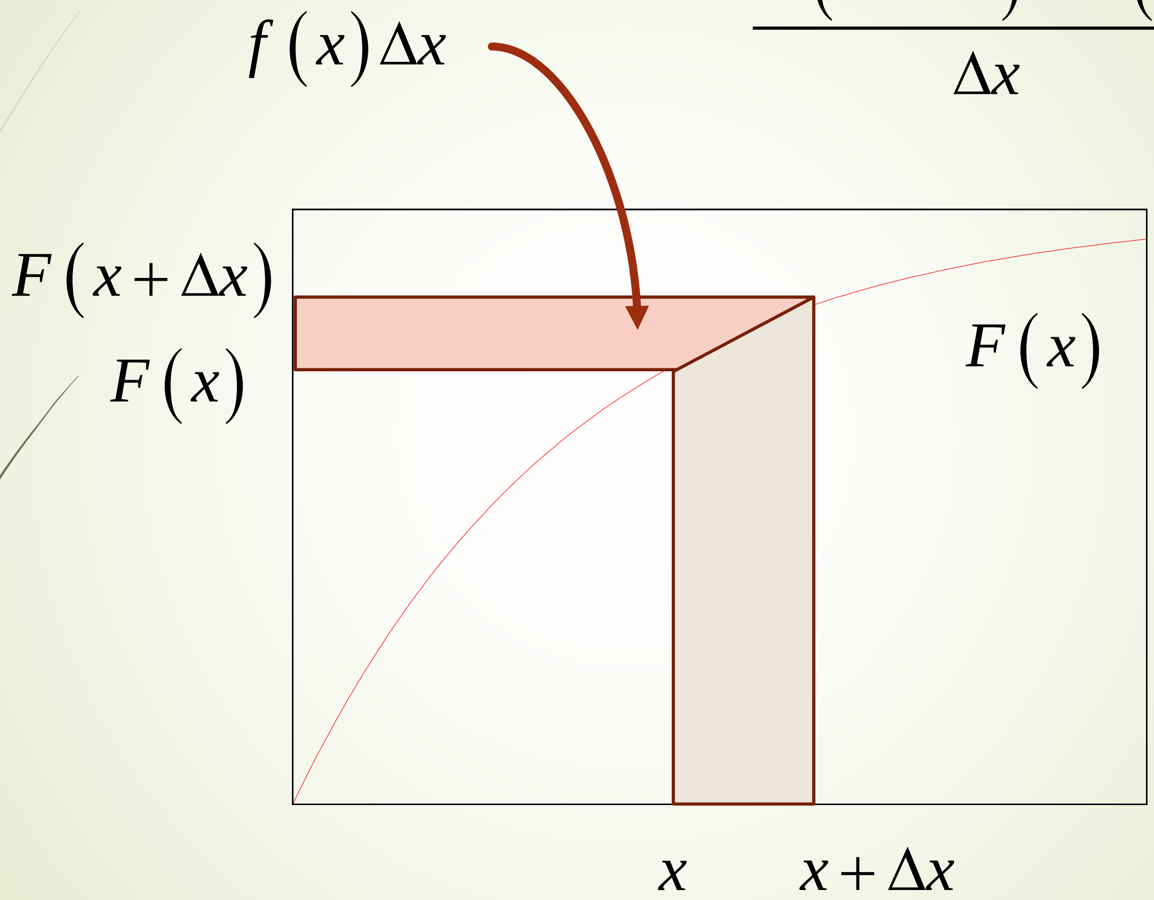
- 微小区間$(X \in [x, x+\Delta x))$に入る確率

$$f(x)\Delta x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x)\Delta x$$

$$F(x) = \int_a^x f(y)\,\mathrm{d}y$$

- $f(x)$を確率密度と呼ぶ
  - 確率そのものでないことに注意
  - 区間幅を乗じて確率になる

$$\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} \simeq f(x)$$



# 変換法

- $r \in [0,1)$の一様乱数を生成
  - $x$へ変換　　$x = F^{-1}(r)$
- $[x, x+\Delta x)$に入る確率
  - $[F(x), F(x+\Delta x))$の長さ

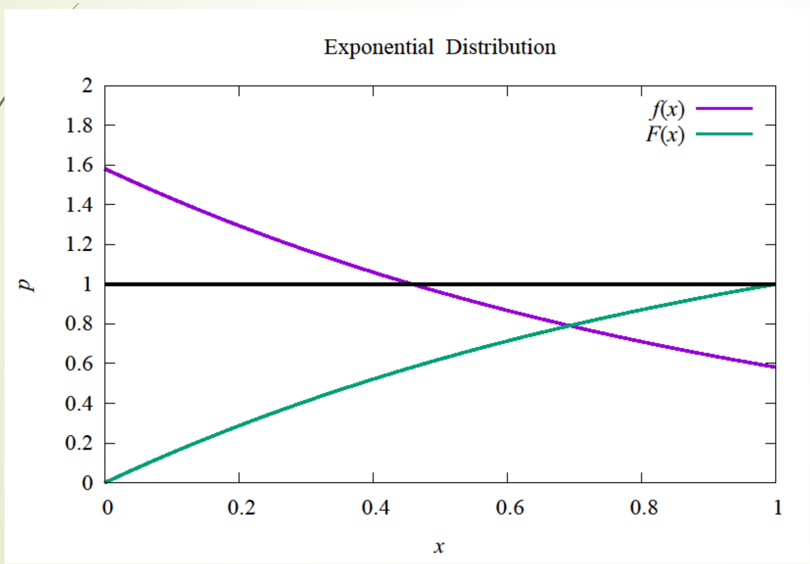
$$F(x+\Delta x) - F(x) = f(x)\Delta x + O\left(\Delta x^2\right)$$

  - つまり、$f(x)$に従う乱数

# 例：指数分布

$$f(x) = Ae^{-x}, \quad 0 \le x < 1, \quad A = \frac{e}{e-1}$$

$$F(x) = \int_0^x f(y)\,\mathrm{d}y = A\left(1 - e^{-x}\right)$$




$$F^{-1}(r) = -\ln(1 - r/A)$$

# 変換法の困難さ

- 変換法が使えるためには
  - 確率分布$F(x)$の表式を得られる
    - 確率密度の不定積分の表式が得られる
  - 確率分布の逆関数$F^{-1}(x)$の表式を得られる
- これらは、かなり特殊な場合

# 正規分布：特殊な例

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left( -\frac{x^2}{2\sigma^2} \right), \quad -\infty < x < \infty$$

- 不定積分は誤差関数と呼ばれ、表式は知られていない
  - 数表があるのみ
  - 単純な変換法は使えない
- 標準的な確率分布
  - よく使われる

- 二次元正規分布を考える

$$f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

- 極座標へ変換 $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$

$$f(r)\mathrm{r}\mathrm{d}\mathrm{r}\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2\pi\sigma^2}r\exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right)\mathrm{d}\mathrm{r}\mathrm{d}\theta$$

- 注：Jacobian

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f\left(x, y\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{0}^{\infty}\int_{0}^{2\pi} f\left(r\cos\theta, r\sin\theta\right) r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

- $\theta$方向には一様であること
  - $\theta$方向に積分

$$f(r)r\mathrm{d}r = \frac{1}{\sigma^2} r \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right)\mathrm{d}r$$

- 動径方向の確率分布は積分可能

$$\rho = \int_0^r f(r')r'\mathrm{d}r' = \int_0^r \frac{1}{\sigma^2} r' \exp\left(-\frac{r'^2}{2\sigma^2}\right)\mathrm{d}r' = 1 - \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$r = \sqrt{-2\sigma^2 \ln(1-\rho)}$$

- 二つの乱数$(u, v), 0 \leq u, v, < 1$

$$r = \sqrt{-2\sigma^2 \ln(1-u)}, \quad \theta = 2\pi v$$

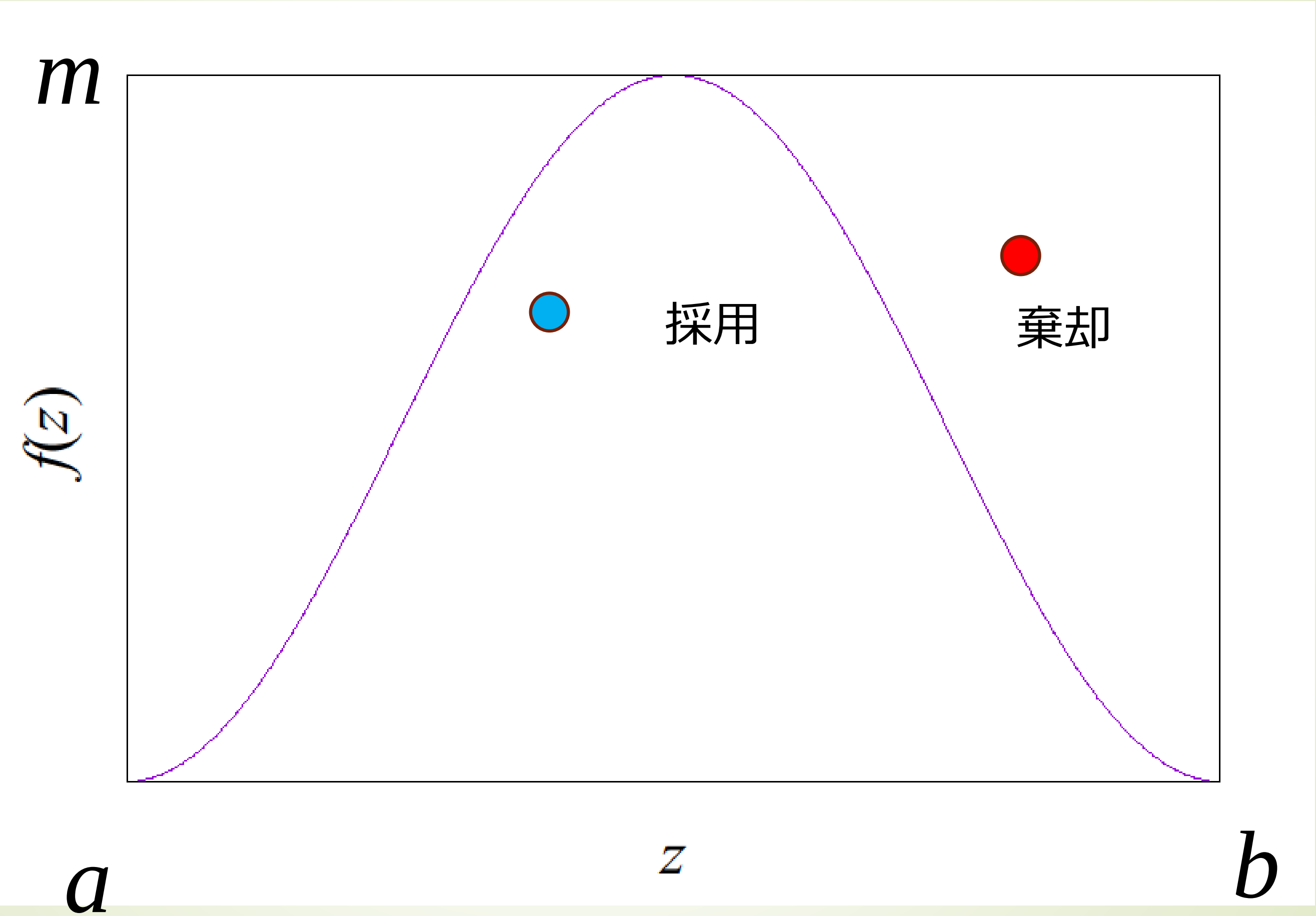
$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta$$

# 棄却法 (rejection method)

- 変換法で生成できない確率分布に対応
- 効率は悪いが、応用範囲が広い

1. $f(z)$
   1. 定義域：$z \in [a, b)$、値域：$0 \leq f(z) < m$
2. 乱数生成 $(x, y) \in [0,1)^2$
3. $z = (b - a)x + a$
4. $y < f(z)/m$ならば$z$を採用
5. それ以外ならば棄却
6. 次の乱数を生成：2へ戻る


m
f(z)
採用
棄却
a
z
b

# ヒストグラムと規格化

- ヒストグラムは区間毎の頻度、または相対頻度
- 確率密度関数と比較するには
  - 確率密度関数は規格化されている
  - 積分すると1になる
- ヒストグラムを規格化するには？

# ヒストグラムの規格化

- bin の幅$w$
- bin の頻度$h_i$
- $s = \sum h_i$
- $\frac{h_i}{s}$ : 相対頻度
- $g_i = \frac{1}{w}\frac{h_i}{s}$

$$\sum w g_i = \frac{1}{sw}\sum w h_i = 1$$