基本的な力学問題 Runge-Kutta法

モデリングとシミュレーション

2019年度

連立常微分方程式の数値解法 Runge-Kutta法

- 独立変数をt、従属変数を$\vec{y}$とする以下の連立微分方程式を考える。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{y} = \vec{f}\left(t, \vec{y}\right)$$

- 数値解：tをh刻みで増加させ、従属変数の列を得る

$$\vec{y}\left(t\right) \to \vec{y}\left(t+h\right)$$

4次のRunge-Kutta法

$$\vec{k}_1 = h\vec{f}\left(t_n, \vec{y}_n\right)$$

$$\vec{k}_2 = h\vec{f}\left(t_n + \frac{h}{2}, \vec{y}_n + \frac{\vec{k}_1}{2}\right)$$

$$\vec{k}_3 = h\vec{f}\left(t_n + \frac{h}{2}, \vec{y}_n + \frac{\vec{k}_2}{2}\right)$$

$$\vec{k}_4 = h\vec{f}\left(t_n + h, \vec{y}_n + \vec{k}_3\right)$$

$$\vec{y}_{n+1} = \vec{y}_n + \frac{\vec{k}_1}{6} + \frac{\vec{k}_2}{3} + \frac{\vec{k}_3}{3} + \frac{\vec{k}_4}{6} + O\left(h^5\right)$$

RungeKuttaクラス

static メソッドのみで構成

hだけ独立変数を進める
入力：$t, \vec{y}(t), h, \vec{f}(t, \vec{y})$
出力：$\vec{y}(t+h)$

```
/**
 * One step from t to t + h
 * @param t initial value of independent variable
 * @param y initial values of dependent variables
 * @param h step
 * @param eq class contains differential equations
 * @return next values of dependent variables
 */
public static double[] rk4(double t, double y[],
                    double h, DifferentialEquation eq)
```

t1からt2までnstep刻みで独立変数を進める

入力：$\vec{y}(t_1), t_1, t_2, n_{\mathrm{step}}, \vec{f}(t, \vec{y})$

出力：$y[i][j] = y_i(t_j); t_j = j \times \Delta t + t_1, \Delta t = (t_2 - t_1)/n_{\mathrm{step}}$

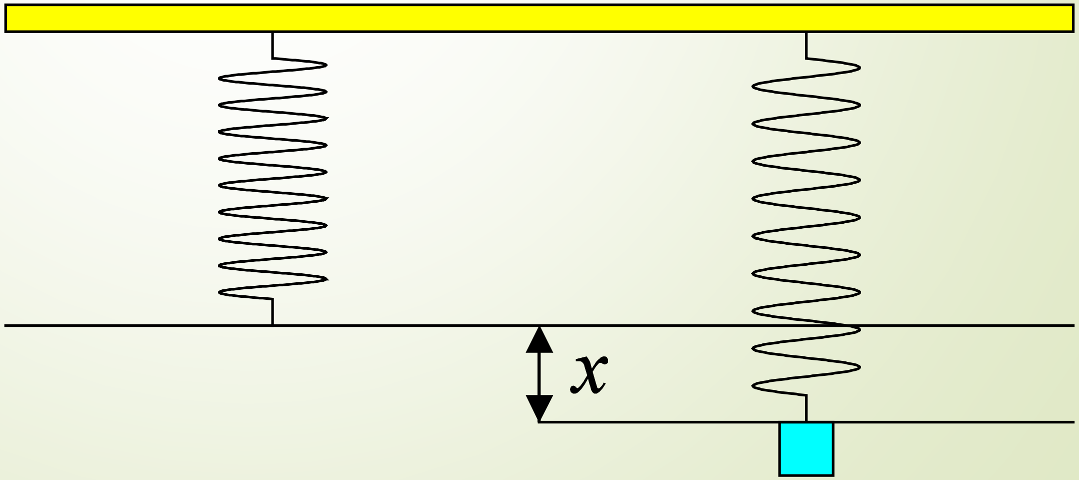
```
/**
 * solve by rk4 from t1 to t2 with nstep
 * @param vstart start values of dependent variables
 * @param t1     initial value of independent variable
 * @param t2     final value of independent variable
 * @param nstep  the number of steps between t1 and t2
 * @param eq     class contains differential equations
 * @return       sequence of values of dependent variables
 */
public static double[][] rkdumb(
        double vstart[], double x1, double x2, int nstep,
        DifferentialEquation eq)
```

戻り値の最初のインデクスは変数インデクス、二番目は独立変数のステップ

例：バネの振動

- Hooke の法則
  - 力は変位に比例する

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -kx$$



一般解

- 一般解は、二つの解の重ね合わせ

$$x = A\cos\omega t + B\sin\omega t$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

- 別の表現

$$x = C\cos(\omega t + \delta)$$

$$= C(\cos\omega t\cos\delta - \sin\omega t\sin\delta)$$

$$A = C\cos\delta$$

$$B = -C\sin\delta$$

三角関数と指数関数

- Eulerの公式

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

指数関数を用いた解

- 一般解　　$x(t) = ae^{i\omega t} + be^{-i\omega t}, \quad \omega^2 = k/m$
- 例えば、以下のような初期値の場合

$$x(0) = 0, \quad v(0) = v_0$$

- 一般解から

$$x(0) = a + b = 0, \quad v(0) = i\omega(a - b) = v_0$$

$$\Downarrow$$

$$a = -b = -i\frac{v_0}{2\omega}$$

$$x(t) = -i\frac{v_0}{2\omega}\left(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}\right) = \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t)$$

二階微分方程式の一階連立微分方程式への変換

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = F\left(x, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = F\left(x, \mathrm{v}\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v$$

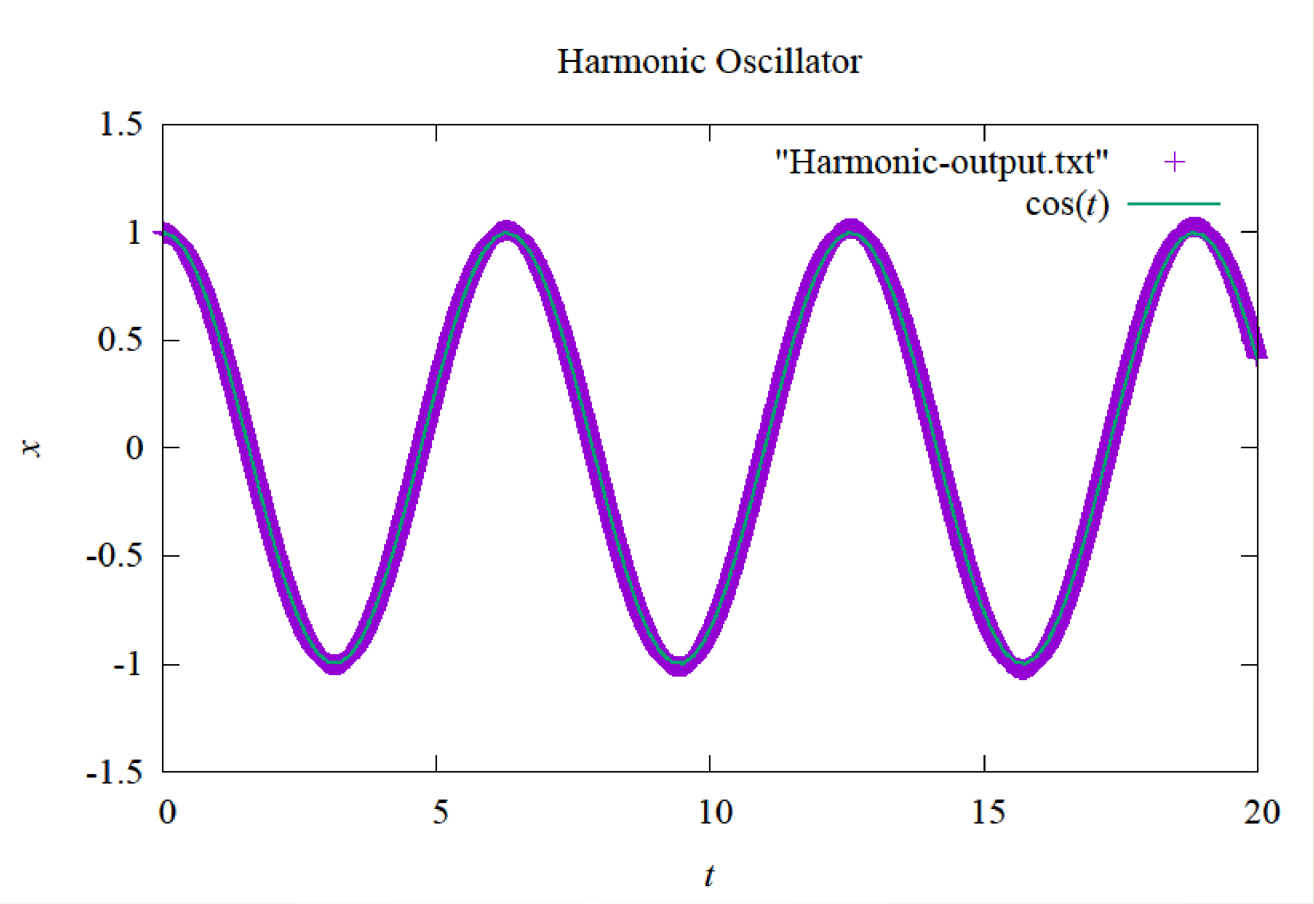
例：二階微分方程式から一階微分方程式へ：振動子

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -kx$$

$$\Rightarrow$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{k}{m}x$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v$$



厳密解が得られる場合には必ず比較すること

例：減衰振動

- 摩擦がある場合

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -kx - \gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

- 解を仮定

$$x(t) = (A\cos\omega t + B\sin\omega t)e^{-\alpha t}$$

- エネルギーは保存しない
  - 摩擦で散逸する

$$x(t) = \left(A\cos\omega t + B\sin\omega t\right)e^{-\alpha t}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \left[\left(-\alpha A + \omega B\right)\cos\omega t + \left(-\omega A - \alpha B\right)\sin\omega t\right]e^{-\alpha t}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = [\left(\alpha^2 A - \omega^2 A - 2\alpha\omega B\right)\cos\omega t$$

$$+\left(2\alpha\omega A + \alpha^2 B - \omega^2 B\right)\sin\omega t]e^{-\alpha t}$$

- 運動方程式に代入

$$m\left(\alpha^2 A-\omega^2 A-2\alpha\omega B\right)=-kA-\gamma\left(-\alpha A+\omega B\right)$$

$$m\left(2\alpha\omega A+\alpha^2 B-\omega^2 B\right)=-kB-\gamma\left(-\alpha B-\omega A\right)$$

⇩

$$m\left(\alpha^2-\omega^2\right)=-k+\alpha\gamma$$

$$-2\alpha m=\gamma$$

⇨

$$\alpha=\frac{\gamma}{2m}$$

$$\omega^2=\frac{1}{m}\left(k-\frac{\gamma^2}{4m}\right)$$

- 境界条件：$x(0) = 0$及び$v(0) = 1$

$$x(0) = 0 \rightarrow A = 0$$

$$v(0) = 1 \rightarrow -\alpha A + \omega B = 1 \rightarrow B = \omega^{-1}$$

$$x(t) = \omega^{-1} \mathrm{e}^{-\alpha t} \sin \omega t$$