



連成振動

モデリングとシミュレーション

2020年度



1

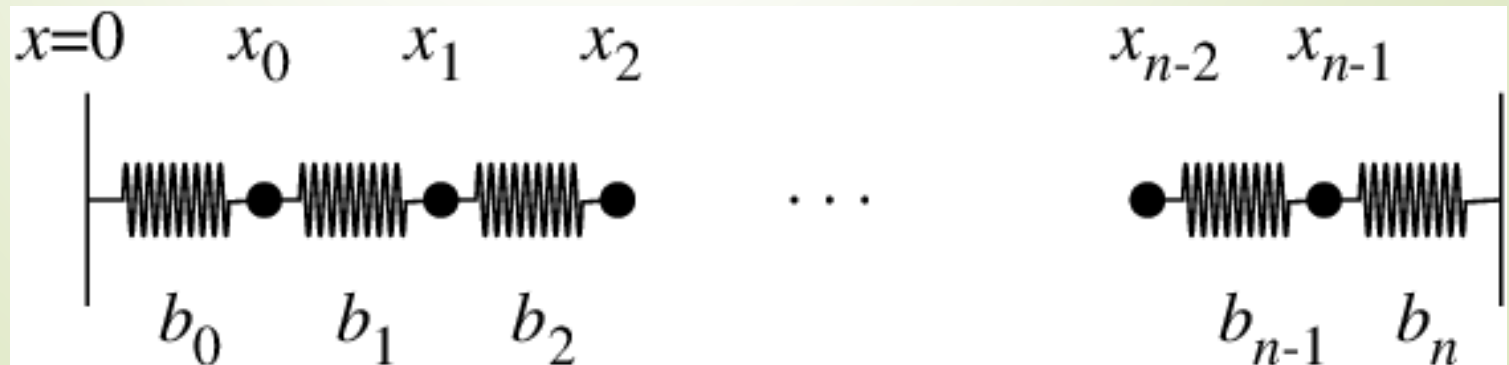
モデルの設定

➡ 自然長 b のばねで、質量 m の粒子 n 個を連結

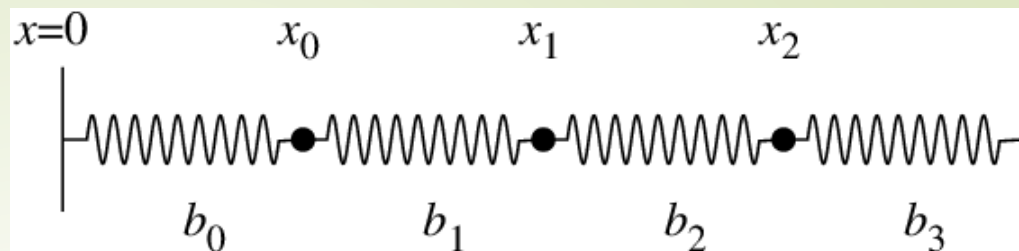
➡ 粒子の位置： x_i

➡ 粒子の静止位置からのずれ：

$$y_i = x_i - (i + 1)b$$



3粒子系



ばねの位置エネルギー

ばね0 : $\frac{ky_0^2}{2}$

ばね1 : $\frac{k(y_1 - y_0)^2}{2}$

ばね2 : $\frac{k(y_2 - y_1)^2}{2}$

ばね3 : $\frac{ky_2^2}{2}$

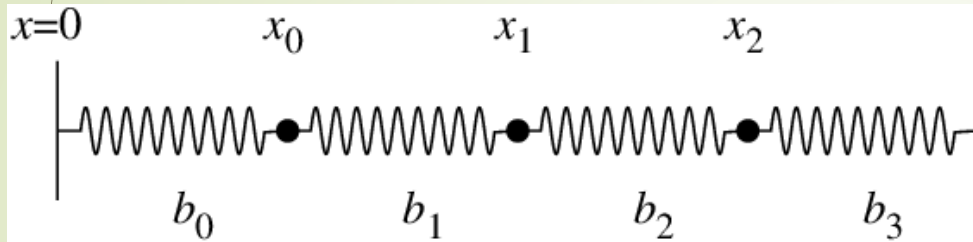
$$V = \frac{k}{2} \left[y_0^2 + \sum_{i=1}^2 (y_i - y_{i-1})^2 + y_2^2 \right]$$

3粒子系：運動方程式

$$V = \frac{k}{2} \left[y_0^2 + \sum_{i=1}^2 (y_i - y_{i-1})^2 + y_2^2 \right] \quad m \frac{d^2 y_i}{dt^2} = - \frac{\partial V}{\partial y_i}$$



$$\begin{aligned} m \frac{d^2 y_0}{dt^2} &= -k(2y_0 - y_1) \\ m \frac{d^2 y_1}{dt^2} &= -k(-y_0 + 2y_1 - y_2) \\ m \frac{d^2 y_2}{dt^2} &= -k(-y_1 + 2y_2) \end{aligned}$$



$$m \frac{d^2 y_0}{dt^2} = -k(2y_0 - y_1)$$

$$m \frac{d^2 y_1}{dt^2} = -k(-y_0 + 2y_1 - y_2)$$

$$m \frac{d^2 y_2}{dt^2} = -k(-y_1 + 2y_2)$$

➡ 0番の粒子に働く力

➡ 0番のバネ： $-ky_0$

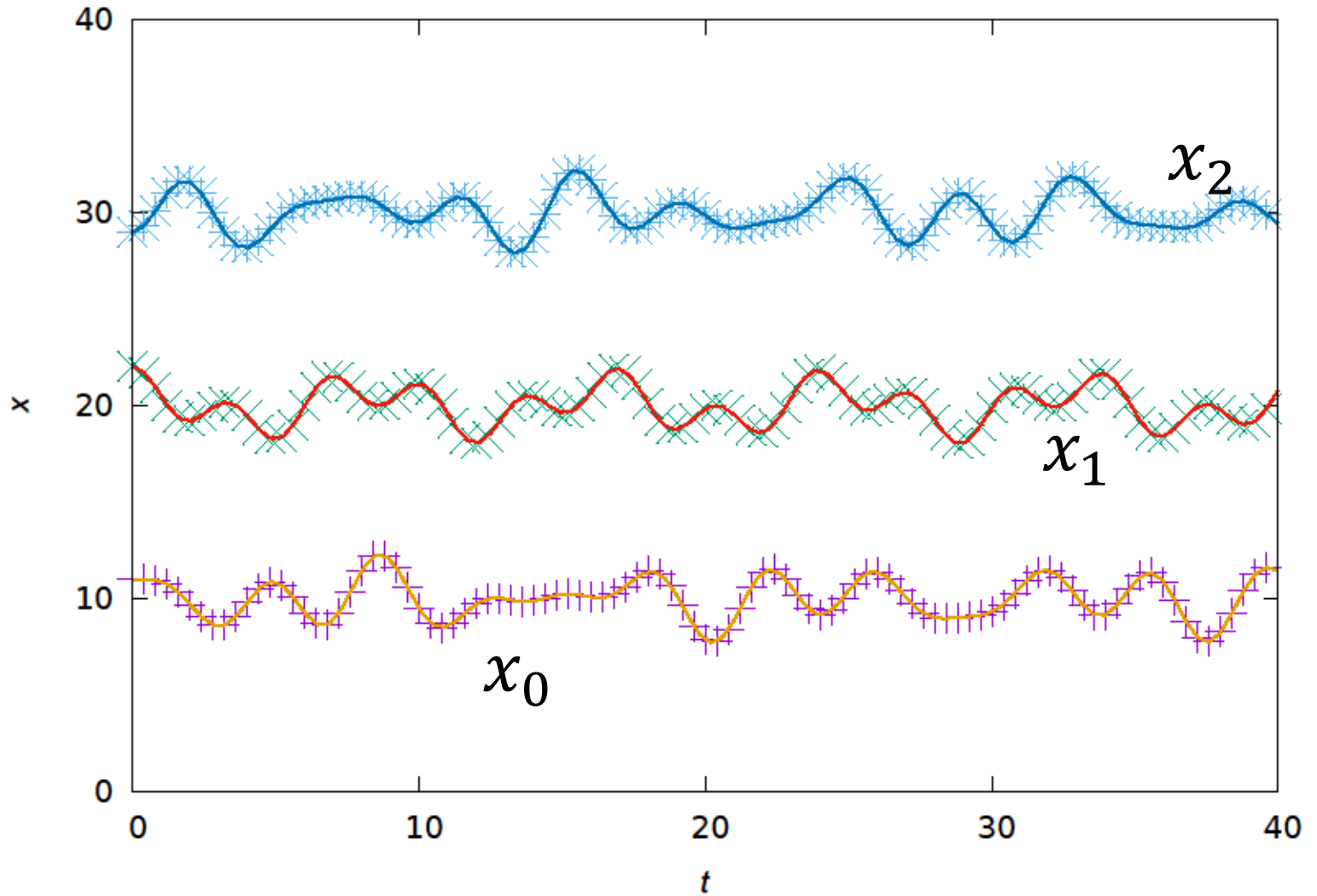
➡ 1番のバネ： $k(y_1 - y_0)$

➡ 1番の粒子に働く力

➡ 1番のバネ： $-k(y_1 - y_0)$

➡ 2番のバネ： $k(y_2 - y_1)$

$$\frac{k}{m} = 1, (x(0), v(0)) = ((1,0), (2,0), (-1,0)), b = 10$$



運動方程式を行列で表記

$$m \frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = -k \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = -kM \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

- ▶ 右辺の行列 M の固有値を λ 、対応する固有ベクトルを \vec{v}_λ とする

$$M \vec{v}_\lambda = \lambda \vec{v}_\lambda$$

固有値を求める

➤ 固有値方程式

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \left[(2-\lambda)^2 - 2 \right] = 0$$

➤ 固有値は3個

$$\lambda_0 = 2, \quad \lambda_{\pm} = 2 \pm \sqrt{2}$$

正規直交化固有ベクトル

➡ $\lambda_0 = 2$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \vec{v}_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

➡ $\lambda_{\pm} = 2 \pm \sqrt{2}$

$$\begin{pmatrix} \mp\sqrt{2} & -1 & 0 \\ -1 & \mp\sqrt{2} & -1 \\ 0 & -1 & \mp\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \vec{v}_{\pm} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \mp\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

解を固有ベクトルで展開

z_λ は時間のある関数

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = z_+ \vec{v}_+ + z_0 \vec{v}_0 + z_- \vec{v}_-$$

$$z_\lambda = \vec{v}_\lambda \cdot \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$z_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} (y_0 - y_2)$$

$$z_\pm = \frac{1}{2} (y_0 \mp \sqrt{2} y_1 + y_2)$$

注意： \vec{v}_λ は互いに直交

左辺

$$\begin{aligned} m \frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} &= m \frac{d^2}{dt^2} (z_+ \vec{v}_+ + z_0 \vec{v}_0 + z_- \vec{v}_-) \\ &= m \frac{d^2 z_+}{dt^2} \vec{v}_+ + m \frac{d^2 z_0}{dt^2} \vec{v}_0 + m \frac{d^2 z_-}{dt^2} \vec{v}_- \end{aligned}$$

右辺

$$\begin{aligned} -kM \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} &= -kM (z_+ \vec{v}_+ + z_0 \vec{v}_0 + z_- \vec{v}_-) \\ &= -k (\lambda_+ z_+ \vec{v}_+ + \lambda_0 z_0 \vec{v}_0 + \lambda_- z_- \vec{v}_-) \end{aligned}$$

固有ベクトル毎の微分方程式へ分解

$$m \frac{d^2}{dt^2} z_\lambda = -k \lambda z_\lambda \quad \text{角速度 } \omega_\lambda = \sqrt{\frac{k\lambda}{m}} \text{ の単振動}$$

$$m \frac{d^2 z_0}{dt^2} = -2kz_0$$

$$m \frac{d^2 z_\pm}{dt^2} = -(2 \pm \sqrt{2})kz_\pm$$

3種類の角速度の単振動

$$y_0 = \frac{1}{2}(z_+ + \sqrt{2}z_0 + z_-)$$

$$y_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}(z_+ - z_-)$$

$$y_2 = \frac{1}{2}(z_+ - \sqrt{2}z_0 + z_-)$$

3種類の角速度の単振動の重ね合わせ

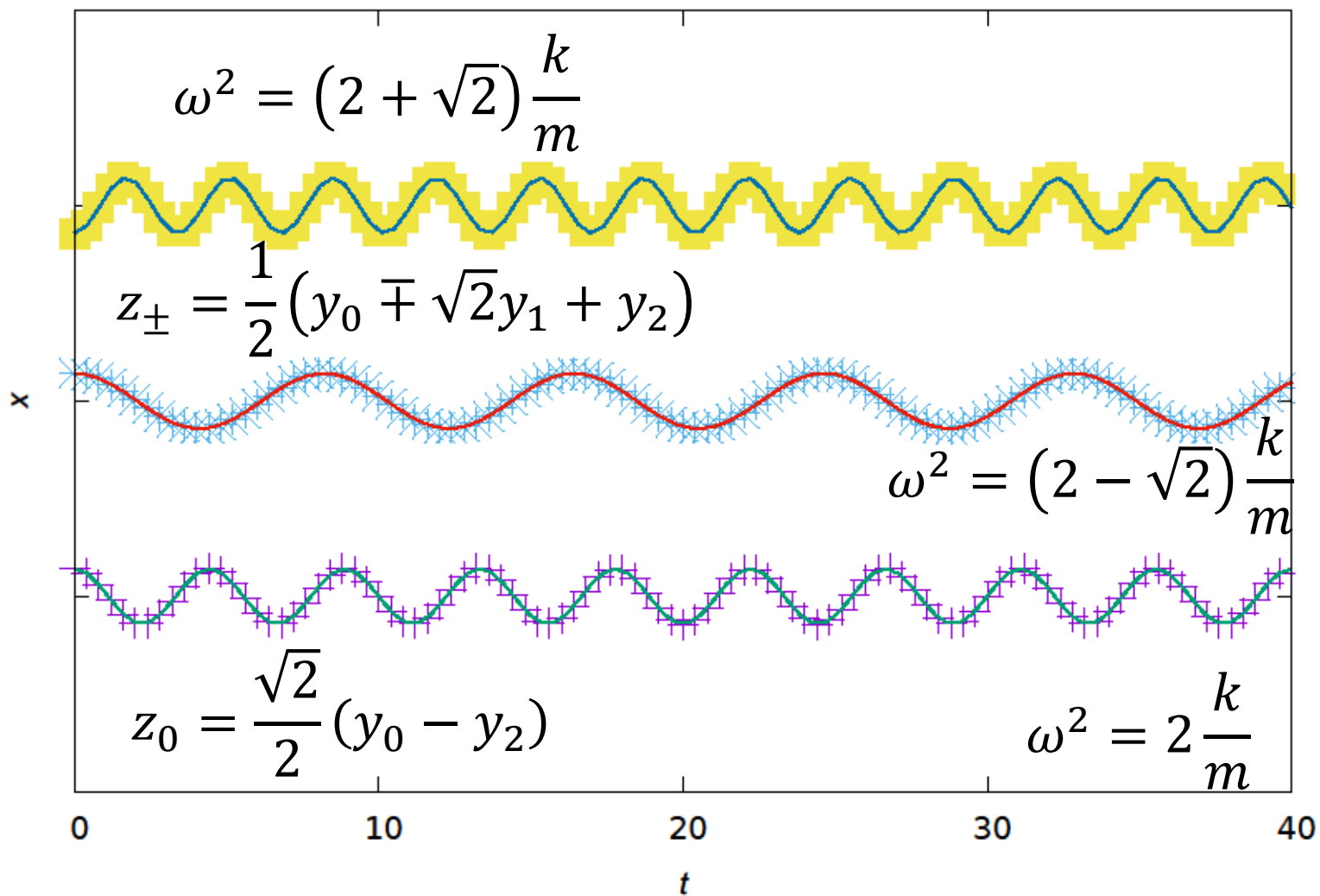
$$x_0 = b + y_0 = b + \frac{1}{2}(z_+ + \sqrt{2}z_0 + z_-)$$

$$x_1 = 2b + y_1 = 2b - \frac{\sqrt{2}}{2}(z_+ - z_-)$$

$$x_2 = 3b + y_2 = 3b + \frac{1}{2}(z_+ - \sqrt{2}z_0 + z_-)$$

各単振動

見やすいように、縦軸をずらしている



n 粒子へ拡張

▶ ばねに蓄えられるエネルギー

$$V = \frac{k}{2} \left[y_0^2 + \sum_{i=1}^{n-1} (y_i - y_{i-1})^2 + y_{n-1}^2 \right]$$

▶ 運動方程式

$$m \frac{d^2 y_i}{dt^2} = - \frac{\partial V}{\partial y_i}$$



$$m \frac{d^2 y_i}{dt^2} = -k \sum_{j=0}^{n-1} M_{ij} y_j$$
$$M_{ij} = \begin{cases} 2 & i = j \\ -1 & j = i \pm 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

連立微分方程式への変形

➡ ずれ y_i とその速度 v_i

$$\frac{dy_i}{dt} = v_i$$

$$\frac{dv_i}{dt} = -\frac{k}{m} \sum_{j=0}^{n-1} M_{ij} y_j$$

$$M_{ij} = \begin{cases} 2 & i = j \\ -1 & j = i \pm 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$yy[2i] = y_i$$

$$yy[2i+1] = v_i$$

偶数番は位置
奇数番は速度

クラス設計の工夫

- ▶ Runge-Kutta法を使って数値解
 - ▶ 変数と振動子の位置・速度との対応が分りにくくなる
- ▶ クラスOscillatorState
 - ▶ 初期値設定やデータ取り出しに利用

コンストラクタ

- OscillatorStateインスタンスの配列を引数に：内部の配列yへ変換

```
1. public CoupledOscillators(OscillatorState oscillators[],
2.     double k, double b) {
3.     this.b = b;
4.     numOscillators = oscillators.length;//振動子の数
5.     y = new double[2 * numOscillators];//従属変数
6.     t = oscillators[0].t;//独立変数の初期値
7.     //偶数番目の従属変数は変位、奇数番目は速度
8.     //初期値設定
9.     for (int i = 0; i < numOscillators; i++) {
10.         y[2 * i] = oscillators[i].x;//変位
11.         y[2 * i + 1] = oscillators[i].v;//速度
12.     }
```

取り出し

内部の配列yからOscillator配列へ変換

```
/**
 * 現在の状態をOscillatorStateとして返す
 *
 * @return
 */
public OscillatorState[] getOscillators() {
    OscillatorState oscillators[] =
        new OscillatorState[numOscillators];
    for (int i = 0; i < numOscillators; i++) {
        oscillators[i]
            = new OscillatorState(t, y[2 * i], y[2 * i + 1]);
    }
    return oscillators;
}
```