

指定された分布に従 う乱数

モデリングとシミュレーション

1

2020年度

一様乱数から指定された分布に従う乱数へ

- シミュレーションにおいて、乱数の分布が指定される場合がある
 - 指数分布に従う乱数
 - でたらめな起こる事象の時間間隔
 - 正規分布に従う乱数
 - ある平均値のまわりのでたらめな揺らぎ
- 変換法
- 棄却法

確率分布と確率密度

- 確率変数 $X \in [a, b)$ に対する確率分布
 - $a \leq X < x$ という「範囲」に対して確率を定義

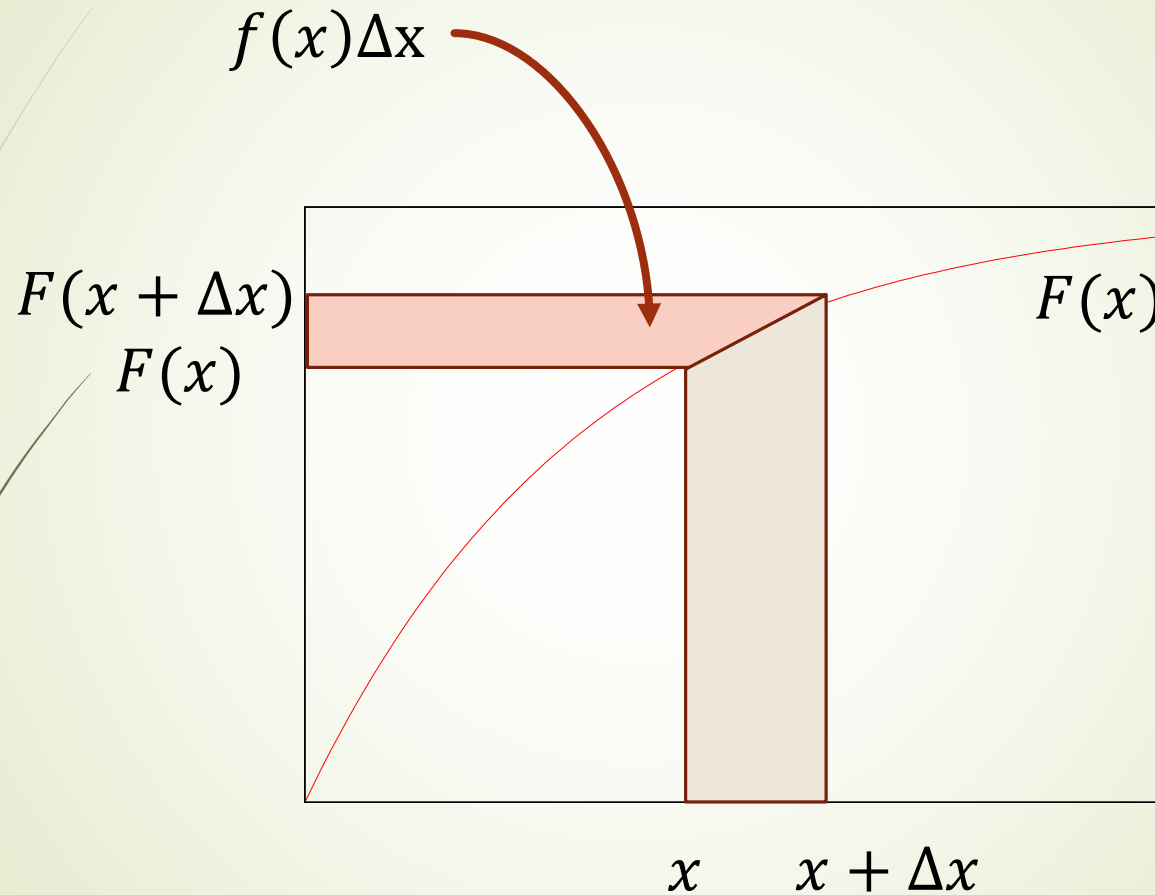
$$F(x) = P(a \leq X < x)$$

- 微小区間 Δx に入る確率： $f(x)\Delta x$

$$f(x)\Delta x = \frac{d}{dx} F(x)\Delta x$$

$$F(x) = \int_a^x f(y)dy$$

$$\frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = f(x)$$



変換法

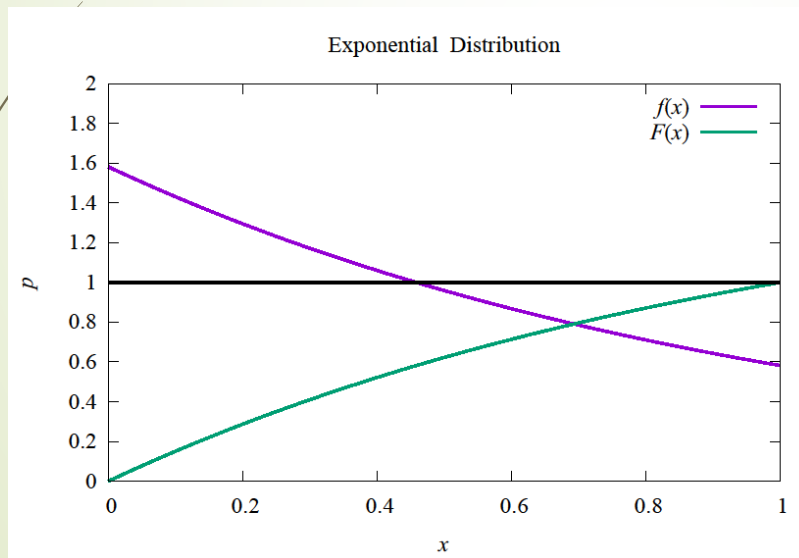
Transformation method

- ▶ $r \in [0,1)$ の一様乱数を生成
 - ▶ x へ変換 : $x = F^{-1}(r)$
- ▶ $[x, x + \Delta x)$ に入る確率
 - ▶ $[F(x), F(x + \Delta x))$ の長さ
$$F(x + \Delta x) - F(x) = f(x)\Delta x + O(\Delta x^2)$$
 - ▶ つまり、 $f(x)$ に従う乱数

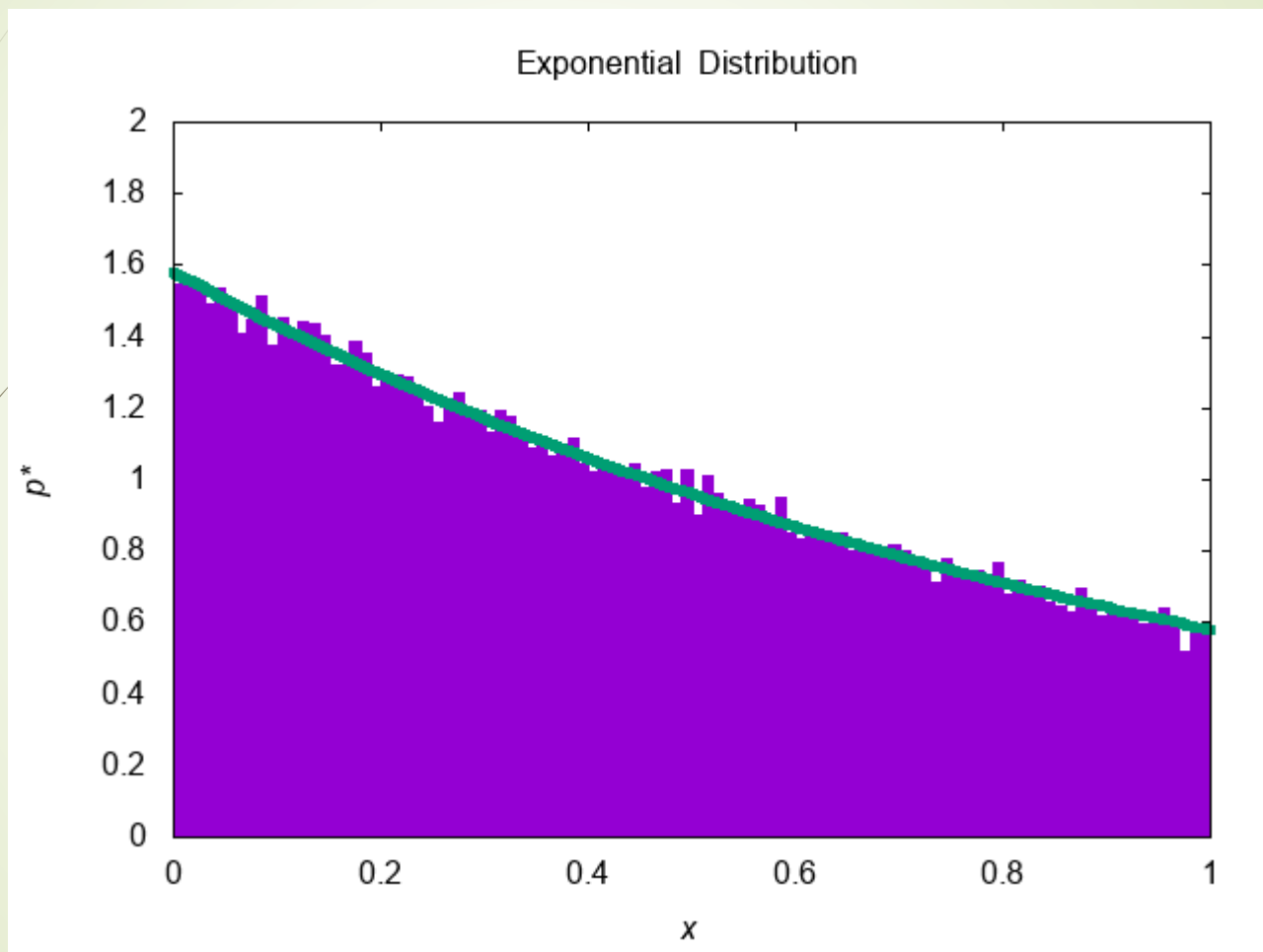
例：指数分布

$$f(x) = Ae^{-x}, 0 \leq x < 1, A = \frac{e}{e-1}$$

$$F(x) = \int_0^x f(y)dy = A(1 - e^{-x})$$



$$F^{-1}(r) = -\ln(1 - r/A)$$



変換法の困難さ

- ▶ 変換法が使えるためには
 - ▶ 確率分布 $F(x)$ の表式を得られる
 - ▶ 確率密度の不定積分の表式が得られる
 - ▶ 確率分布の逆関数 $F^{-1}(x)$ の表式を得られる
- ▶ これらは、**かなり特殊**な場合

正規分布：特殊な例

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right), -\infty < x < \infty$$

- ▶ 不定積分は誤差関数と呼ばれ、表式は知られていない
 - ▶ 数表があるのみ
 - ▶ 単純な変換法は使えない
- ▶ 標準的な確率分布
 - ▶ よく使われる

➡ 二次元正規分布を考える

$$f(x, y)dx dy = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}\right) dx dy$$

➡ 極座標へ変換

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

$$f(r)rdrd\theta = \frac{r}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) drd\theta$$

► 注 : Jacobian

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

➤ θ 方向には一様であること

➤ θ 方向に積分

$$f(r)rdr = \frac{r}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) dr$$

➤ 動径方向の確率分布は積分可能

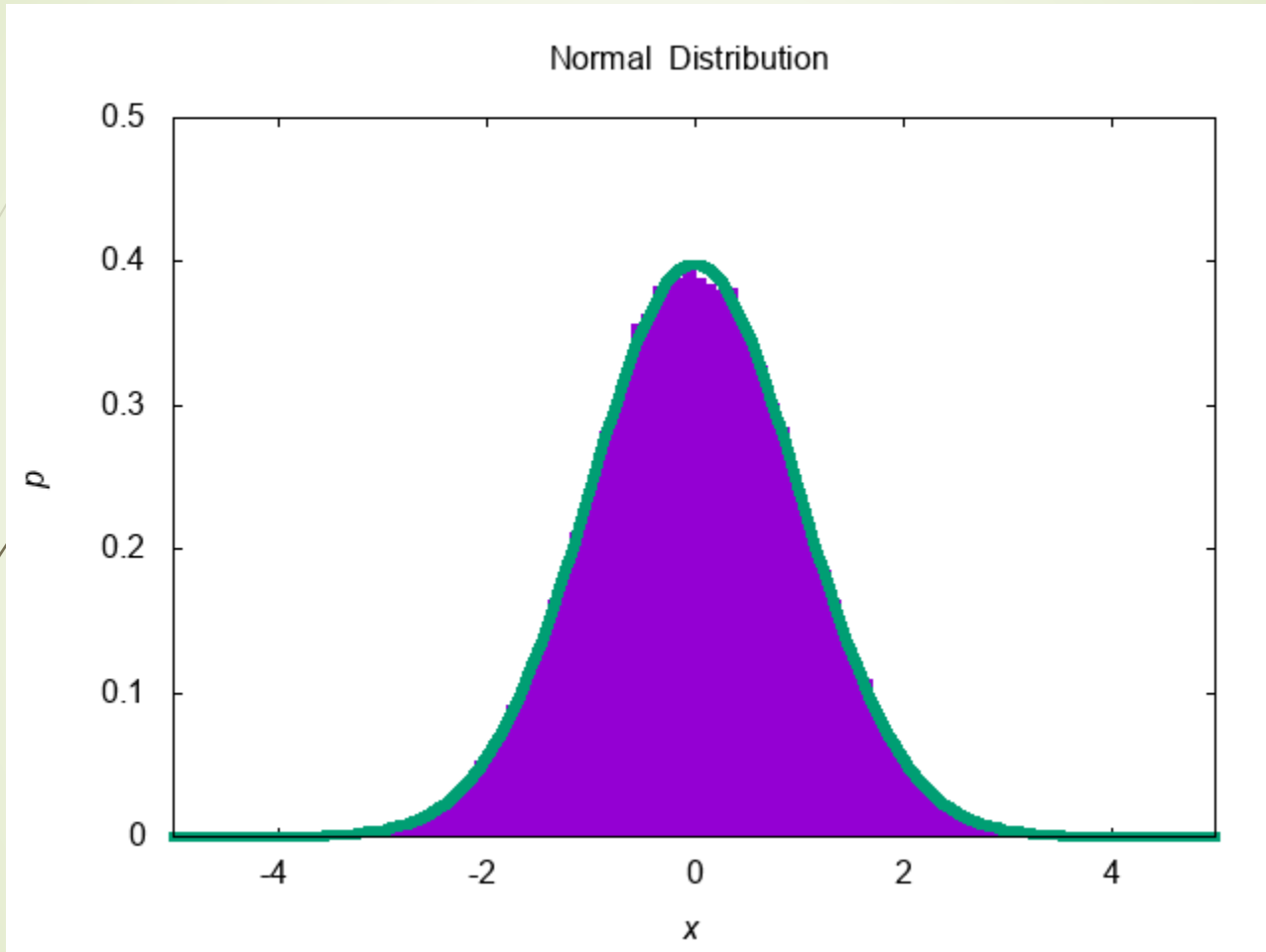
$$\begin{aligned}\rho &= \int_0^r f(r')r' dr' \\ &= \int_0^r \frac{r'}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{r'^2}{2\sigma^2}\right) dr' = 1 - \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) \\ r &= \sqrt{-2\sigma^2 \ln(1 - \rho)}\end{aligned}$$

➤ 二つの乱数 (u, v) , $0 \leq u, v, < 1$

$$r = \sqrt{-2\sigma^2 \ln(1 - u)}, \theta = 2\pi v$$

$$x = r \cos \theta$$

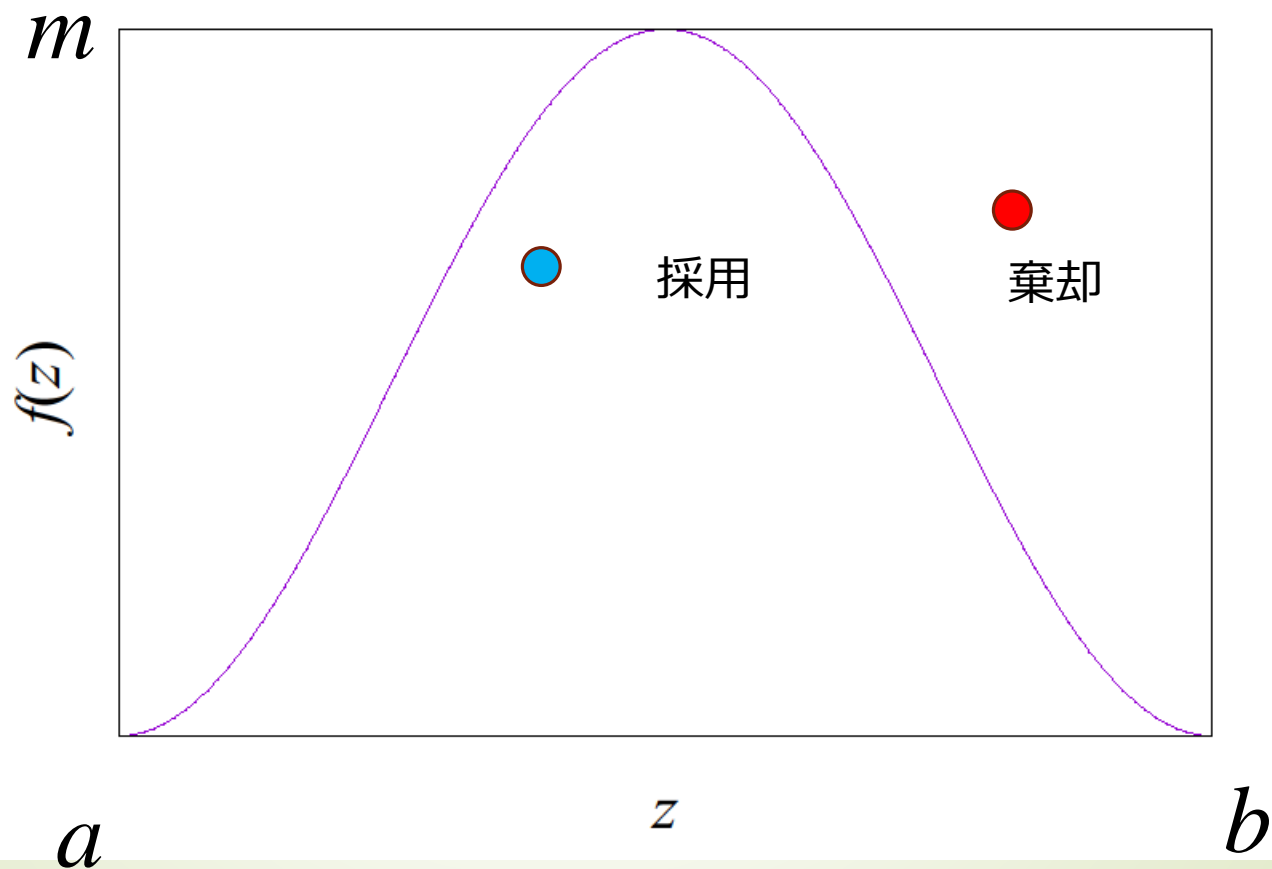
$$y = r \sin \theta$$



棄却法 (rejection method)

- ➡ 変換法で生成できない確率分布に対応
- ➡ 効率は悪いが、応用範囲が広い

1. $f(z)$
 1. 定義域 : $z \in [a, b)$ 、値域 : $0 \leq f(z) < m$
2. 乱数生成 $(x, y) \in [0, 1)^2$
3. $z = (b - a)x + a$
4. $y < f(z)/m$ ならば z を採用
5. それ以外ならば棄却
6. 次の乱数を生成 : 2へ戻る



$$f(x) = \frac{3}{4}(-x^2 + 1)$$

