Barabási-Albertモデル

モデリングとシミュレーション

2020年度

scale-free network

- 現実のネットワークの次数分布
  - べき則：$P(k) \sim k^{-\gamma}$
- べき則 (power-law)
  - 特徴的長さが無い：scale-free
  - 単位を変えても同じ関数形
    - スケール変換に対して不変

$$P(ak) = a^{-\gamma} P(k)$$

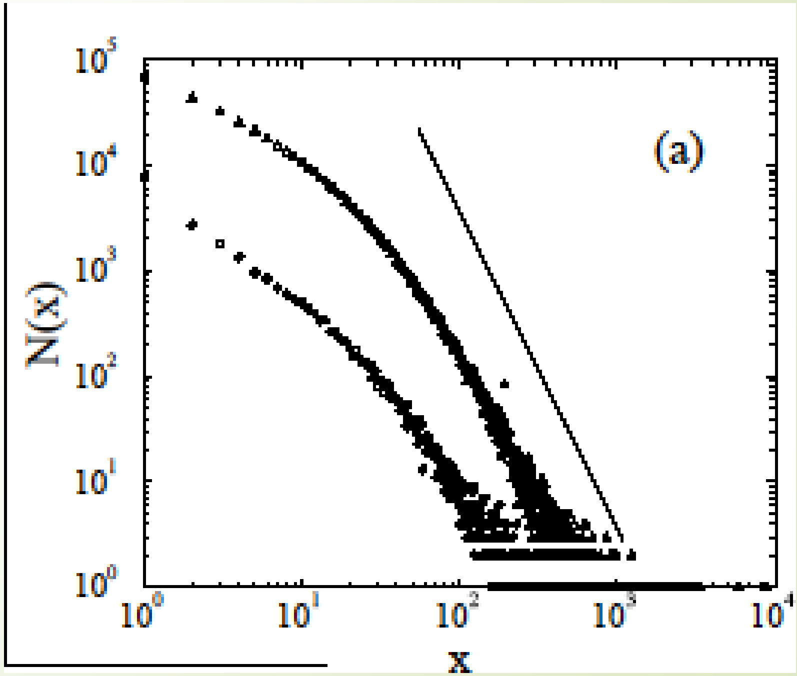
例１：論文の引用

- 新しい論文が書かれると、他の論文を引用する。
- 論文は日々生産される。
- 非平衡ネットワークを形成する。
- 良く引用される論文は、多くの人に読まれ、さらに引用される。
- 引用ネットワークでは、引用の多い論文ほど、多くの引用を引き寄せる

- S. Rednerによる研究
  - Eur. Phys. J. B 4 (1998) 131.
- ISI (Institute for Scientific Information)のデータ
- Physical Review D のデータ

$$N(x) \sim x^{-3}$$

- 引用回数x である論文数の分布



例２：WWW

- 新しいページを作る
  - 他へのリンクを含む
  - 他のページからリンクされる
  - 新しい内容に更新される
- 検索サイトに掲載されると、アクセスが増える

- R. Albert, H. Jeong & A.-L. Barabási,
  - Nature 401, (1999) 130.
- In-degree もout-degreeも　べき則分布(図a,b)

$$p(k) \sim k^{-\gamma} \quad \gamma_{\mathrm{out}} \sim 2.45, \quad \gamma_{\mathrm{in}} \sim 2.1$$

- 平均の最短距離は総頂点数の対数に比例して増大

$$\langle d \rangle = 0.35 + 2.06 \log_{10} N$$

InternetのAS(Autonomous Systems)間の接続

- R. Pastor-Satorras, A. Vázquez and A. Vespignani, Phys. Rev. Lett. 87 (2001) 258701.

$$P(k) \sim k^{-\gamma}, \quad \gamma \sim 2.2$$

英単語の連結

- R. Ferrer i Cancho and R. Solé,
  - Proc. R. Soc. B 268 (2001) 2261.

$$\langle d \rangle \sim 2.6$$

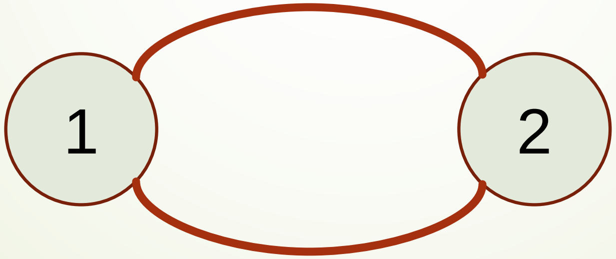
$$P(k) \sim k^{-1.5}$$

成長するネットワーク

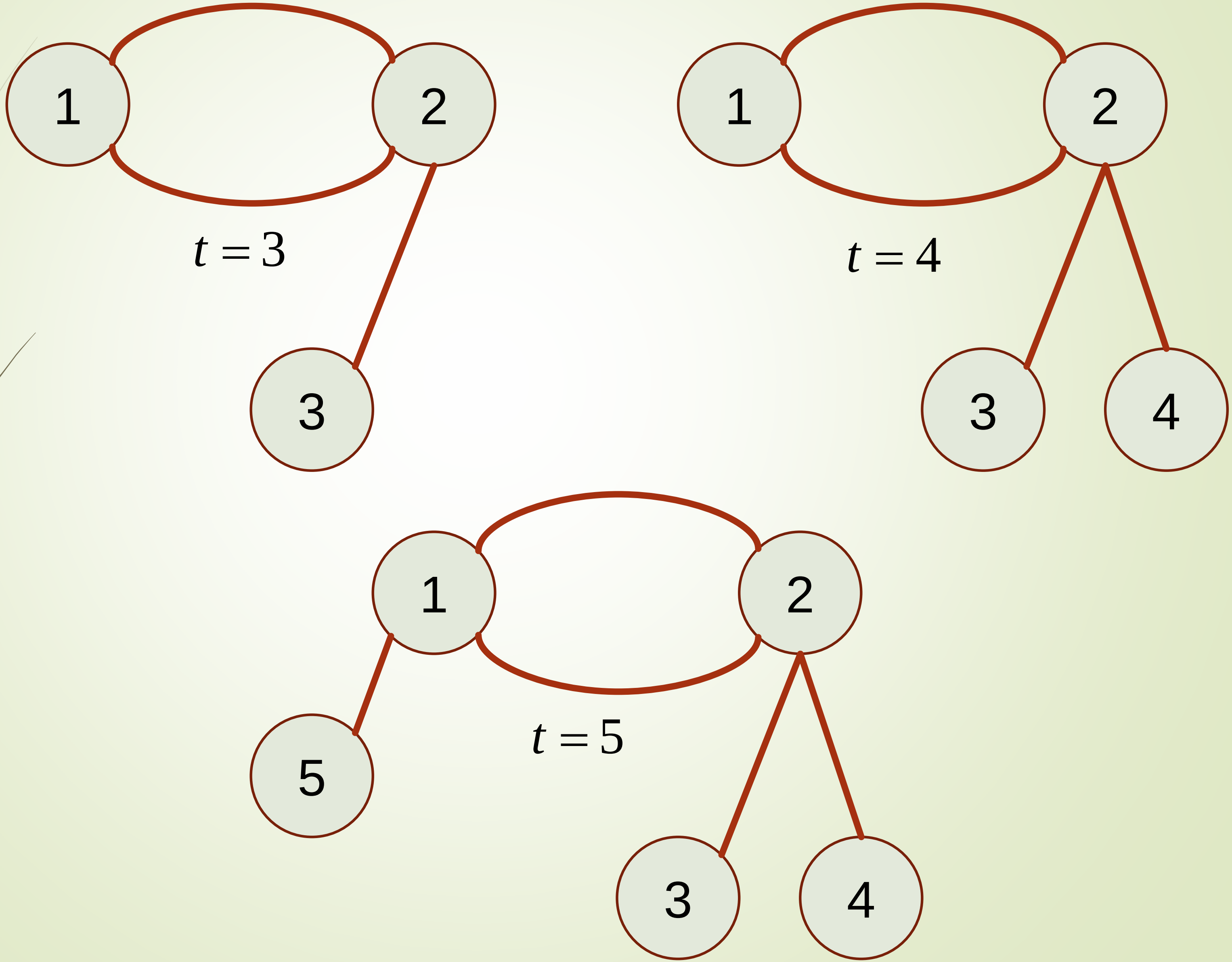
- 実際のネットワークは成長し続けている
  - インターネット
  - Webページのリンク
- 新しくできた頂点は、既存の節へ辺を生成する
  - 既存の頂点の性質に依存せずにランダムに対象を選択
  - 既存の頂点の次数などの性質に依存してランダムに対象を選択

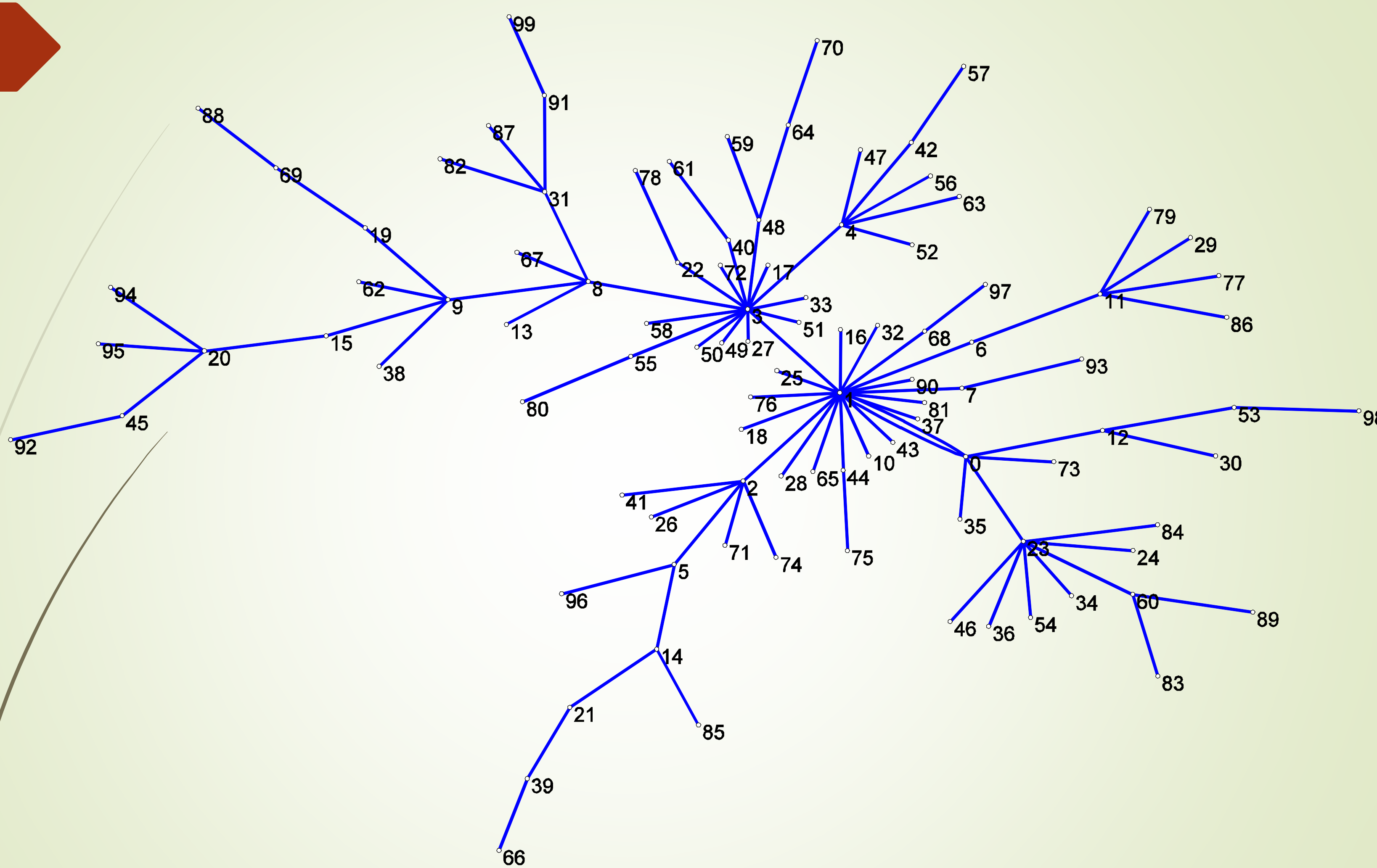
成長するランダムネットワーク

- 多重接続を許す無向ネットワーク
- 初期時刻($t = 2$)で、二個の頂点を二本の辺で接続



- 各時刻で、一つの頂点を追加し、既存の頂点を次数に比例する確率でランダムに選択して接続
  - 次数kの頂点が選ばれる確率：$k/(2t)$
  - 次数の総和が$2t$であることに注意
- 各時刻tで、t個の頂点とt本の辺
- 各頂点に、その頂点ができた時刻の番号sを付ける


1
2
3
$t = 3$
1
2
3
4
$t = 4$
1
2
5
3
4
$t = 5$


99
70
57
91
64
88
87
59
47
42
82
78
61
69
31
56
63
48
4
52
19
40
79
29
67
22
72
17
8
62
9
33
94
97
77
3
11
13
58
51
16
32
68
86
15
95
20
50
49
27
6
38
55
93
25
90
7
80
76
81
53
98
1
37
18
43
12
10
0
73
30
28
65
44
92
45
41
2
35
84
26
23
24
71
74
75
5
60
34
89
96
46
36
54
14
83
85
21
39
66

頂点sにk本の辺がある確率

- 時刻tに存在する頂点数はt
- 時刻$t+1$で頂点sの次数がkになるには
  - 時刻tで、次数が$k-1$であり、新しく生成された頂点から、選ばれ、辺が生成される：確率$(\mathrm{k}-1)/(2t)$
  - 時刻tで、次数がkであり、新しく生成された頂点から、選ばれず、辺が生成されない：確率$1-k/(2t)$

$$p(k,s,t+1)=\frac{k-1}{2t}p(k-1,s,t)+\left(1-\frac{k}{2t}\right)p(k,s,t)$$

- 初期条件
  - 初期の二つの頂点の次数は2

$$p\left(k, s=\{1,2\}, t=2\right)=\delta_{k,2}$$

- 新しい頂点の次数は1

$$p\left(k, s=t, t>2\right)=\delta_{k,1}$$

- ある時刻で存在する頂点に関する平均
  - 頂点数がtであることに注意

$$P\left(k,t\right)=\frac{1}{t}\sum_{s=1}^{t} p\left(k,s,t\right)$$

$$\sum_{s=1}^{t} p(k,s,t+1) = \frac{k-1}{2t}\sum_{s=1}^{t} p(k-1,s,t) + \left(1-\frac{k}{2t}\right)\sum_{s=1}^{t} p(k,s,t)$$

$$\sum_{s=1}^{t+1} p(k,s,t+1) - \delta_{k,1} = \frac{k-1}{2t}\sum_{s=1}^{t} p(k-1,s,t) + \left(1-\frac{k}{2t}\right)\sum_{s=1}^{t} p(k,s,t)$$

左辺の計算に注意

- 時刻が$t+1$であること
- 和の上限

Master方程式の両辺の平均をとる

$$\left(t+1\right)P\left(k,t+1\right)-\delta_{k,1}=\frac{k-1}{2}P\left(k-1,t\right)+t\left(1-\frac{k}{2t}\right)P\left(k,t\right)$$

$$\left(t+1\right)P\left(k,t+1\right)-tP\left(k,t\right)=\frac{1}{2}\left[\left(k-1\right)P\left(k-1,t\right)-kP\left(k,t\right)\right]+\delta_{k,1}$$

$$t\left[P\left(k,t+1\right)-P\left(k,t\right)\right]+P\left(k,t+1\right)=\frac{1}{2}\left[\left(k-1\right)P\left(k-1,t\right)-kP\left(k,t\right)\right]+\delta_{k,1}$$

平衡解

- 長時間後に確率分布が一定になるとする

$$P(k,t) \xrightarrow[t\to\infty]{} P(k)$$

- 平衡解に対する方程式

$$(k+2)P(k)-(k-1)P(k-1)=2\delta_{k,1}$$

平衡解

$$P(k) = \frac{k-1}{k+2} P(k-1) \quad \text{for } k > 1$$

$$P(1) = \frac{2}{3}$$

- べき関数分布

$$P(k) = \frac{4}{(k+2)(k+1)k}$$

$$= 4k^{-3}\left(1 - \frac{3}{k} + O\left(k^{-2}\right)\right)$$

- 規格化されているか確認

$$\sum_{k=1}^{N}\frac{4}{k(k+1)(k+2)}=2\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right)$$

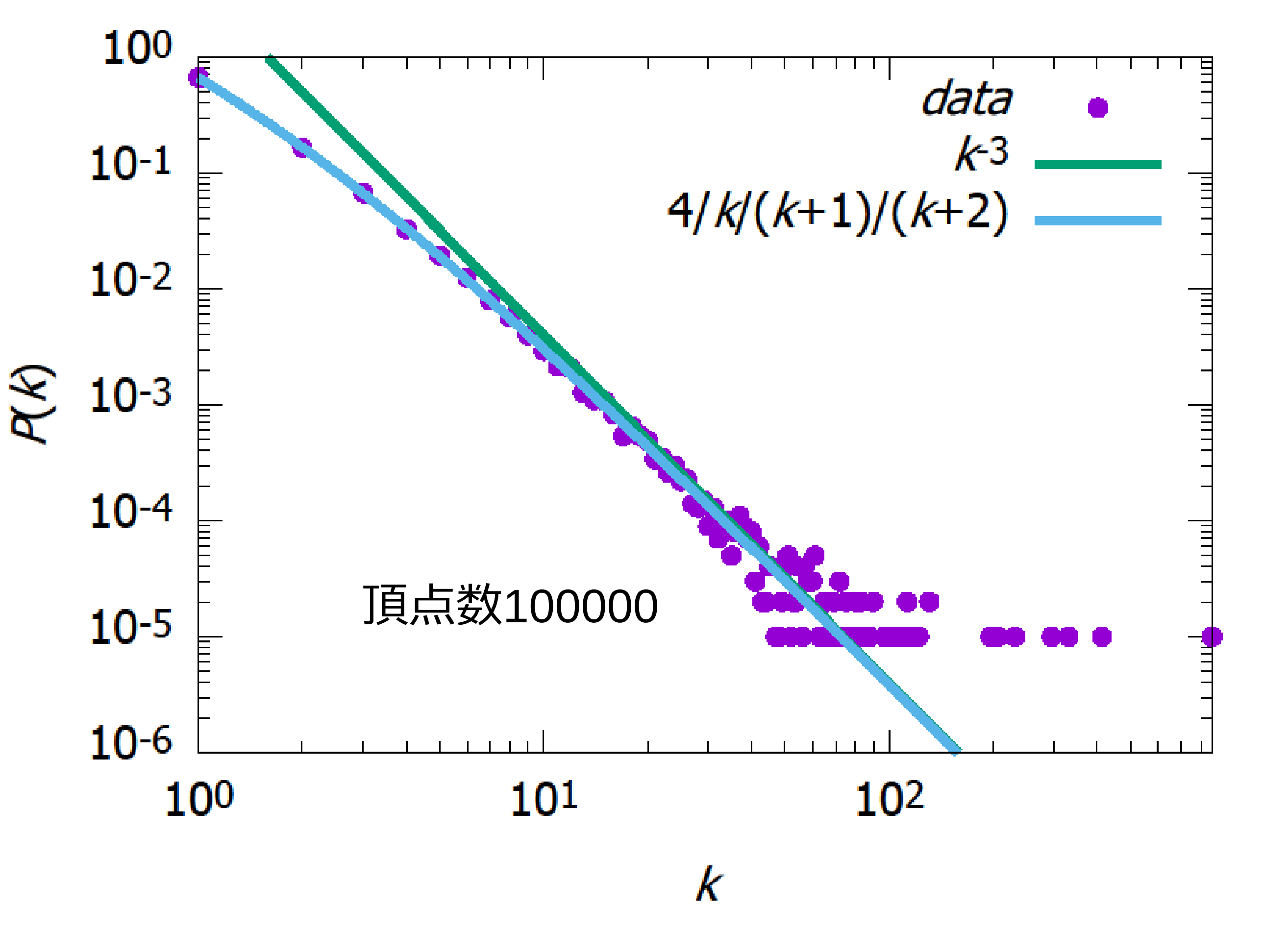
$$=2\left(\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k(k+1)}-\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right)$$

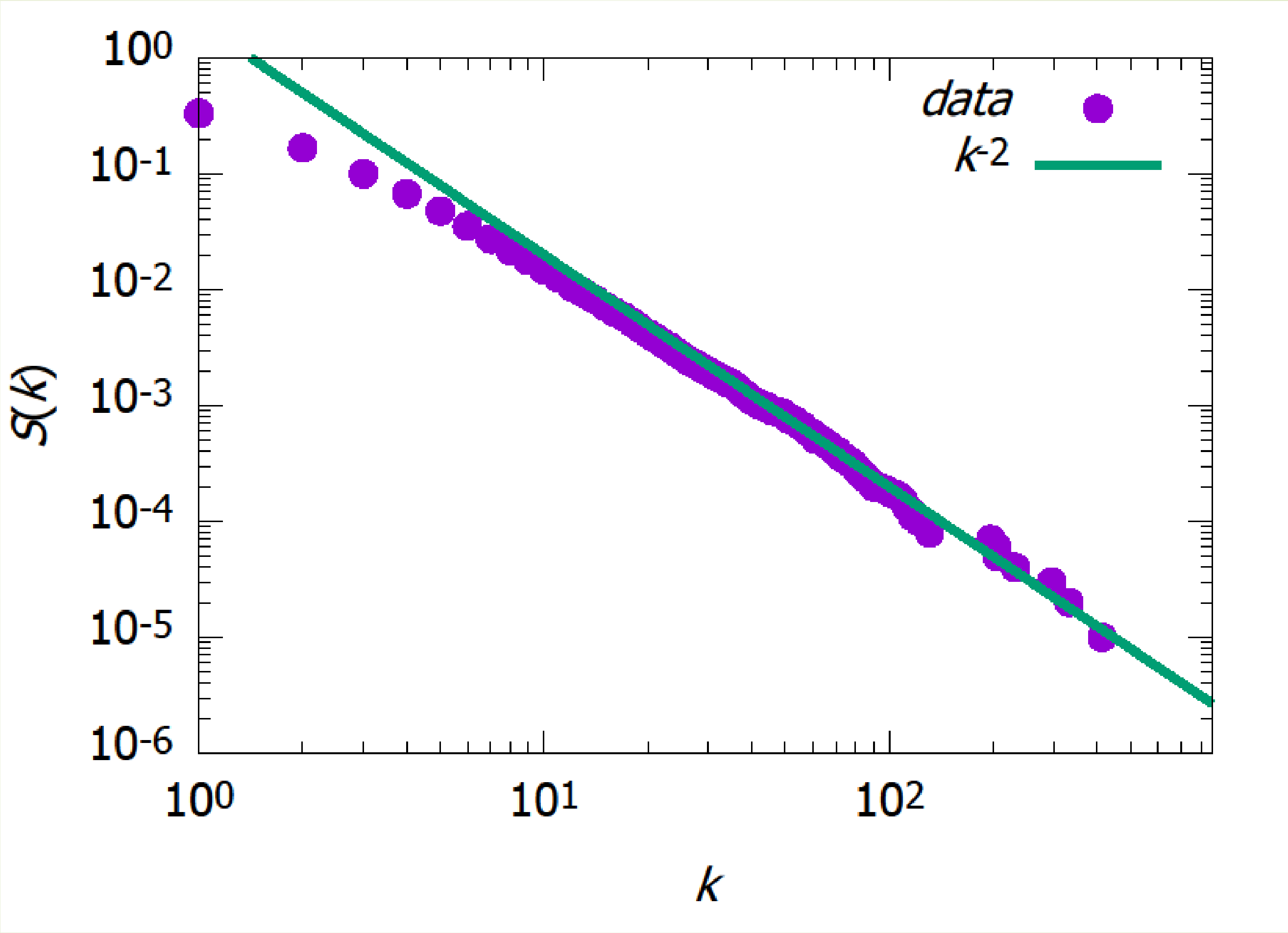
$$=2\left(\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k(k+1)}-\sum_{k=2}^{N+1}\frac{1}{k(k+1)}\right)$$

$$=2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{(N+1)(N+2)}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{k(k+1)(k+2)}=\lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N}\frac{4}{k(k+1)(k+2)}$$

$$=2\lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{(N+1)(N+2)}\right)=1$$


data
k-3
4/k/(k+1)/(k+2)
頂点数100000
P(k)
k
10-6
10-5
10-4
10-3
10-2
10-1
100
100
101
102



$$S(k) = 1 - \sum_{j=1}^{k} P(j)$$