



Barabási-Albertモデル

モデリングとシミュレーション

2019年度

scale-free network

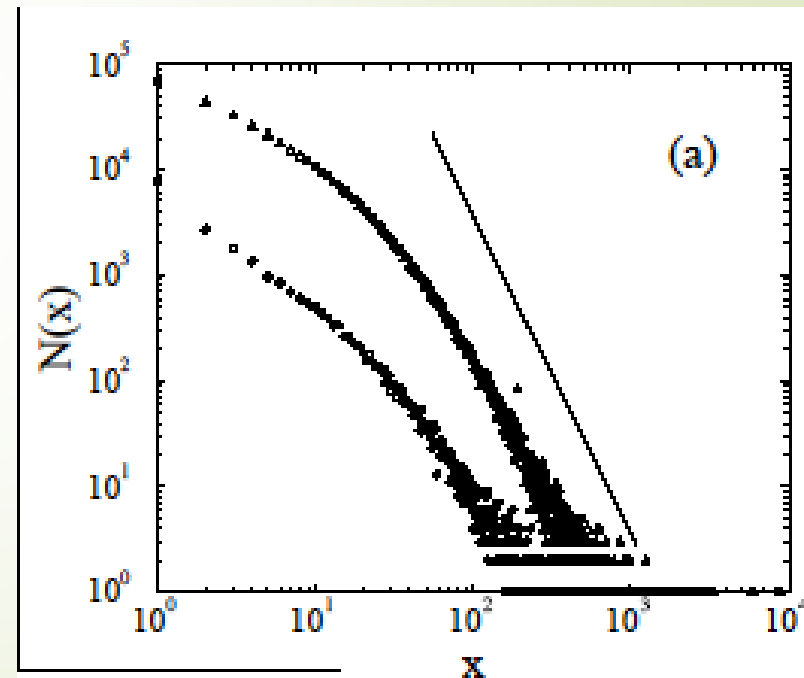
- 現実のネットワークの次数分布
 - べき則 : $P(k) \sim k^{-\gamma}$
- べき則 (power-law)
 - 特徴的長さが無い : scale-free
 - 単位を変えても同じ関数形
 - スケール変換に対して不変

$$P(ak) = a^{-\gamma} P(k)$$

例 1 : 論文の引用

- ➡ 新しい論文が書かれると、他の論文を引用する。
- ➡ 論文は日々生産される。
- ➡ 非平衡ネットワークを形成する。
- ➡ 良く引用される論文は、多くの人に読まれ、さらに引用される。
- ➡ 引用ネットワークでは、引用の多い論文ほど、多くの引用を引き寄せる

- ▶ S. Rednerによる研究
 - ▶ Eur. Phys. J. B 4 (1998) 131.
- ▶ ISI (Institute for Scientific Information)のデータ
- ▶ Physical Review D のデータ
 - $$N(x) \sim x^{-3}$$
- ▶ 引用回数 x である論文数の分布



例 2 : WWW

- ▶ 新しいページを作る
 - ▶ 他へのリンクを含む
 - ▶ 他のページからリンクされる
 - ▶ 新しい内容に更新される
- ▶ 検索サイトに掲載されると、アクセスが増える

- ▶ R. Albert, H. Jeong & A.-L. Barabási,
▶ [Nature 401, \(1999\) 130.](#)
- ▶ In-degree も out-degree も べき則分布 (図 a, b)

$$p(k) \sim k^{-\gamma} \quad \gamma_{\text{out}} \sim 2.45, \quad \gamma_{\text{in}} \sim 2.1$$

- ▶ 平均の最短距離は総頂点数の対数に比例して増大

$$\langle d \rangle = 0.35 + 2.06 \log_{10} N$$

InternetのAS(Autonomous Systems)間の接続

- ▶ R. Pastor-Satorras, A. Vázquez and A. Vespignani, [Phys. Rev. Lett. 87 \(2001\) 258701.](#)

$$P(k) \sim k^{-\gamma}, \quad \gamma \sim 2.2$$

英単語の連結

- R. Ferrer i Cancho and R. Solé,
➤ [Proc. R. Soc. B 268 \(2001\) 2261.](#)

$$\langle d \rangle \sim 2.6$$

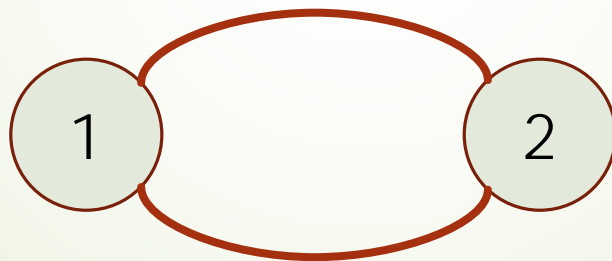
$$P(k) \sim k^{-1.5}$$

成長するネットワーク

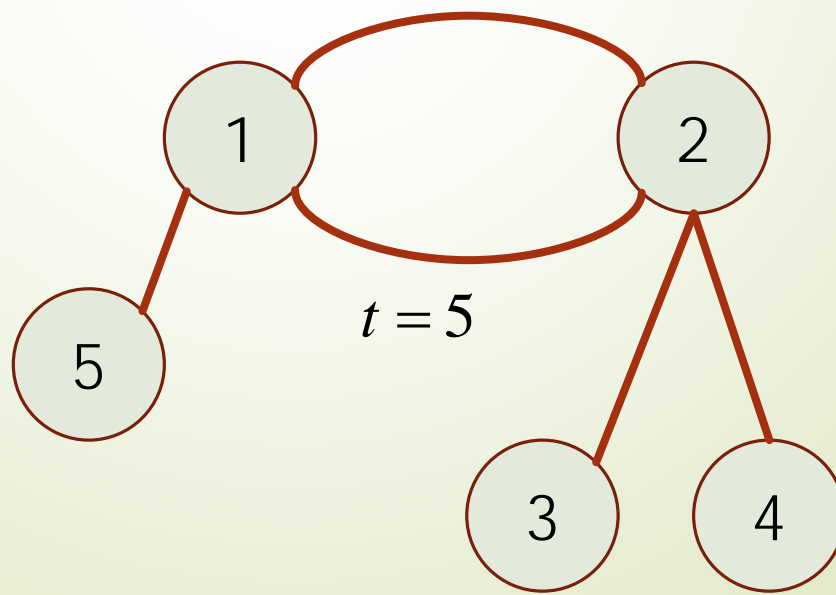
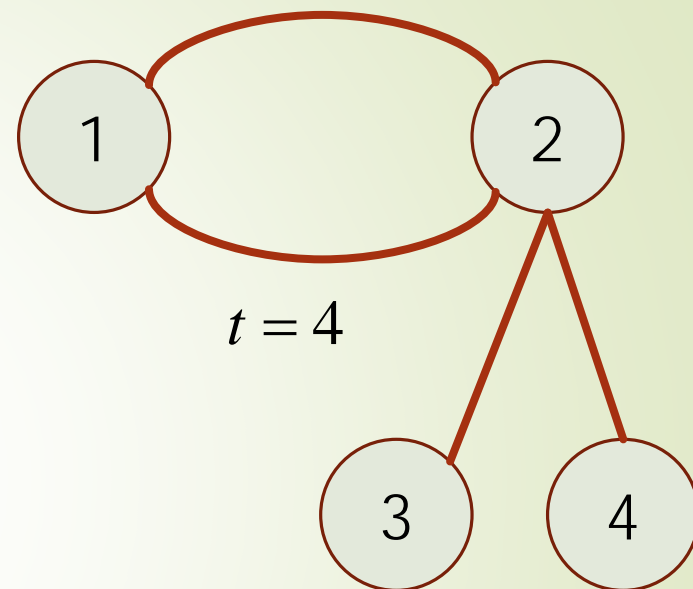
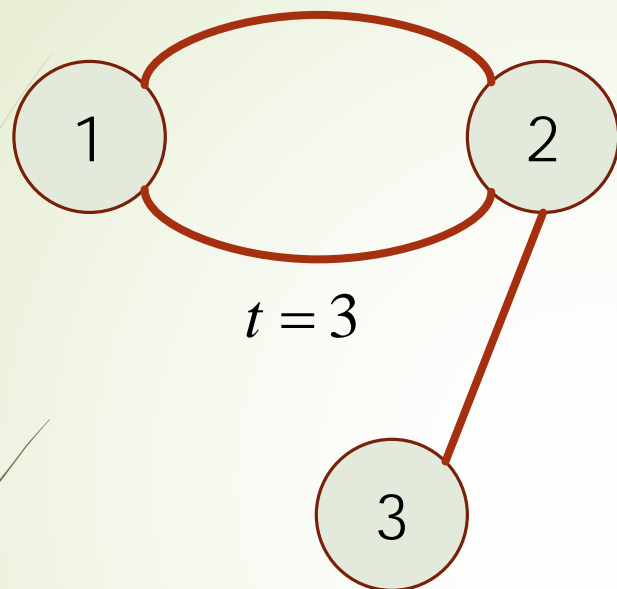
- 実際のネットワークは成長し続けている
 - インターネット
 - Webページのリンク
- 新しくできた頂点は、既存の節へ辺を生成する
 - 既存の頂点の性質に依存せずにランダムに対象を選択
 - 既存の頂点の次数などの性質に依存してランダムに対象を選択

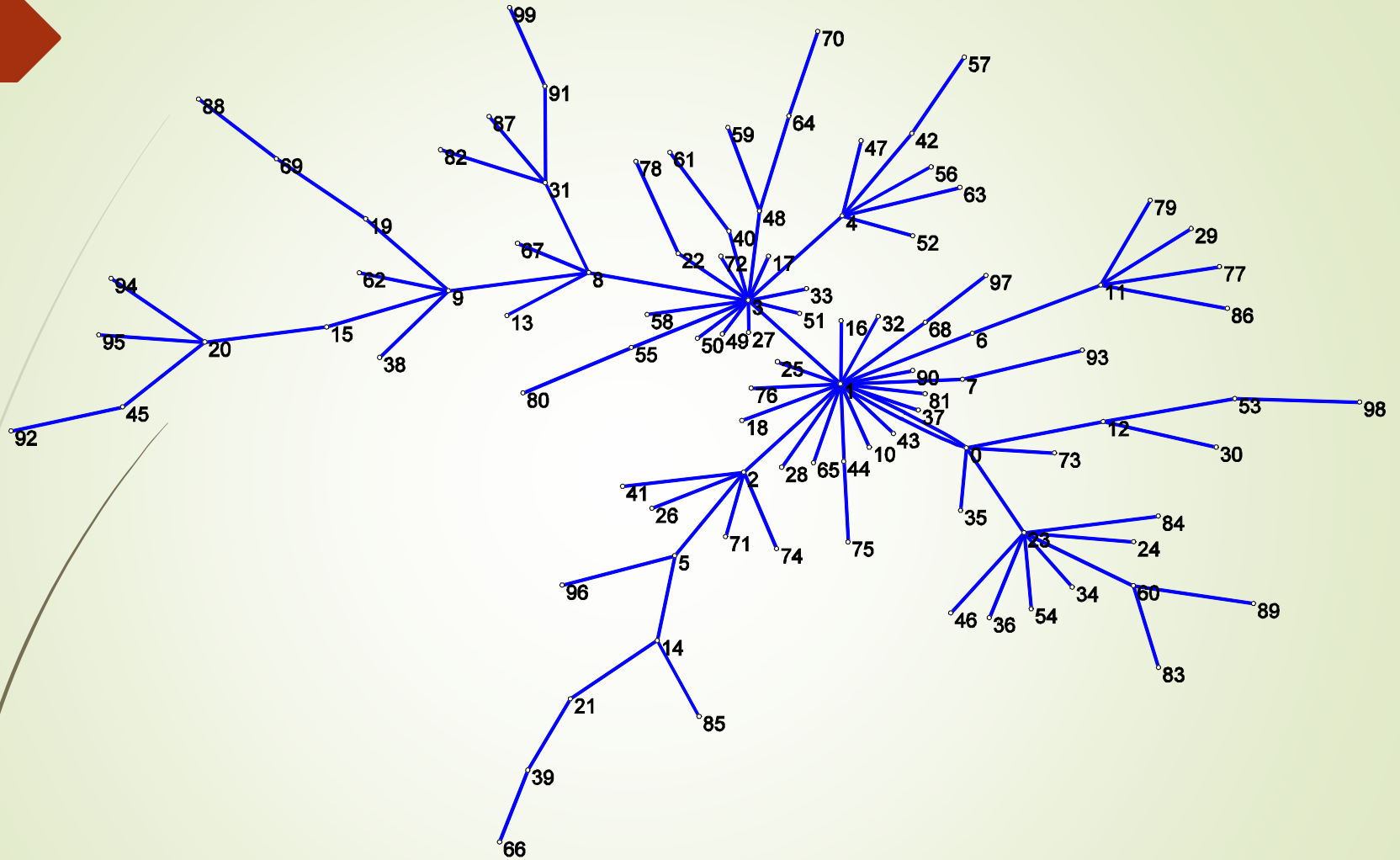
成長するランダムネットワーク

- ▶ 多重接続を許す無向ネットワーク
- ▶ 初期時刻($t = 2$)で、二個の頂点を二本の辺で接続



- 各時刻で、一つの頂点を追加し、既存の頂点を**度数に比例する確率**でランダムに選択して接続
 - 度数 k の頂点を選ばれる確率： $k/(2t)$
 - 度数の総和が $2t$ であることに注意
- 各時刻 t で、 t 個の頂点と t 本の辺
- 各頂点に、その頂点ができ時刻の番号 s を付ける





頂点 s に k 本の辺がある確率

- ➡ 時刻 t に存在する頂点数は t
- ➡ 時刻 $t + 1$ で頂点 s の次数が k になるには
 - ➡ 時刻 t で、次数が $k - 1$ であり、新しく生成された頂点から、選ばれ、辺が生成される：確率 $(k - 1)/(2t)$
 - ➡ 時刻 t で、次数が k であり、新しく生成された頂点から、選ばれず、辺が生成されない：確率 $1 - k/(2t)$

$$p(k, s, t + 1) = \frac{k - 1}{2t} p(k - 1, s, t) + \left(1 - \frac{k}{2t}\right) p(k, s, t)$$

➤ 初期条件

- 初期の二つの頂点の次数は2

$$p(k, s = \{1, 2\}, t = 2) = \delta_{k,2}$$

➤ 新しい頂点の次数は1

$$p(k, s = t, t > 2) = \delta_{k,1}$$

➤ ある時刻で存在する頂点に関する平均

- 頂点数が t であることに注意

$$P(k, t) = \frac{1}{t} \sum_{s=1}^t p(k, s, t)$$

$$\sum_{s=1}^t p(k, s, t+1) = \frac{k-1}{2t} \sum_{s=1}^t p(k-1, s, t) + \left(1 - \frac{k}{2t}\right) \sum_{s=1}^t p(k, s, t)$$
$$\sum_{s=1}^{t+1} p(k, s, t+1) - \delta_{k,1} = \frac{k-1}{2t} \sum_{s=1}^t p(k-1, s, t) + \left(1 - \frac{k}{2t}\right) \sum_{s=1}^t p(k, s, t)$$

左辺の計算に注意

- 時刻が $t + 1$ であること
- 和の上限

Master方程式の両辺の平均をとる

$$(t+1)P(k, t+1) - \delta_{k,1} = \frac{k-1}{2}P(k-1, t) + t\left(1 - \frac{k}{2t}\right)P(k, t)$$

$$(t+1)P(k, t+1) - tP(k, t) = \frac{1}{2}[(k-1)P(k-1, t) - kP(k, t)] + \delta_{k,1}$$

$$t[P(k, t+1) - P(k, t)] + P(k, t+1) = \frac{1}{2}[(k-1)P(k-1, t) - kP(k, t)] + \delta_{k,1}$$

平衡解

- ➡ 長時間後に確率分布が一定になるとする

$$P(k, t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} P(k)$$

- ➡ 平衡解に対する方程式

$$(k+2)P(k) - (k-1)P(k-1) = 2\delta_{k,1}$$

平衡解

$$P(k) = \frac{k-1}{k+2} P(k-1) \quad \text{for } k > 1$$

$$P(1) = \frac{2}{3}$$

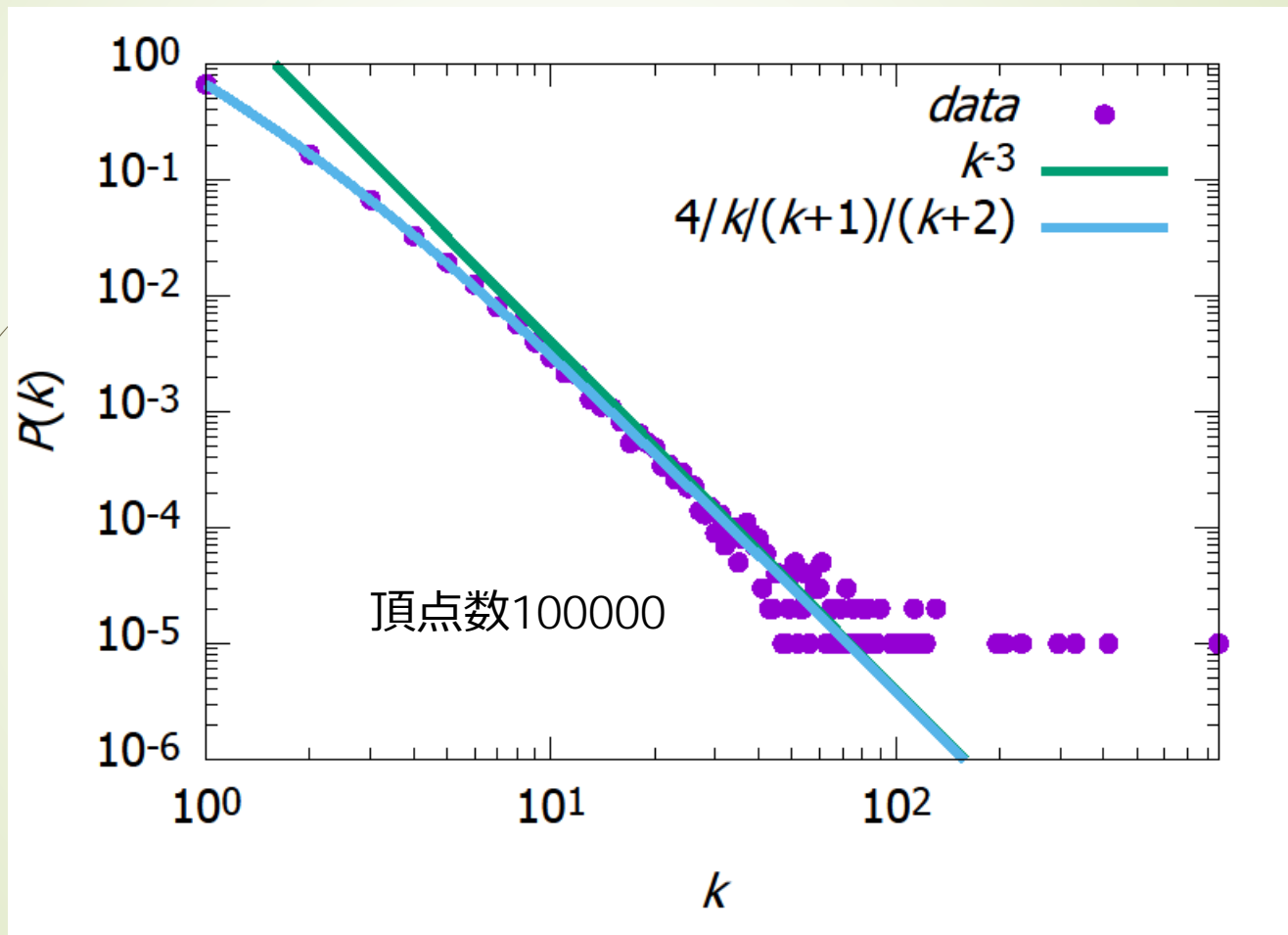
➡ ベキ関数分布

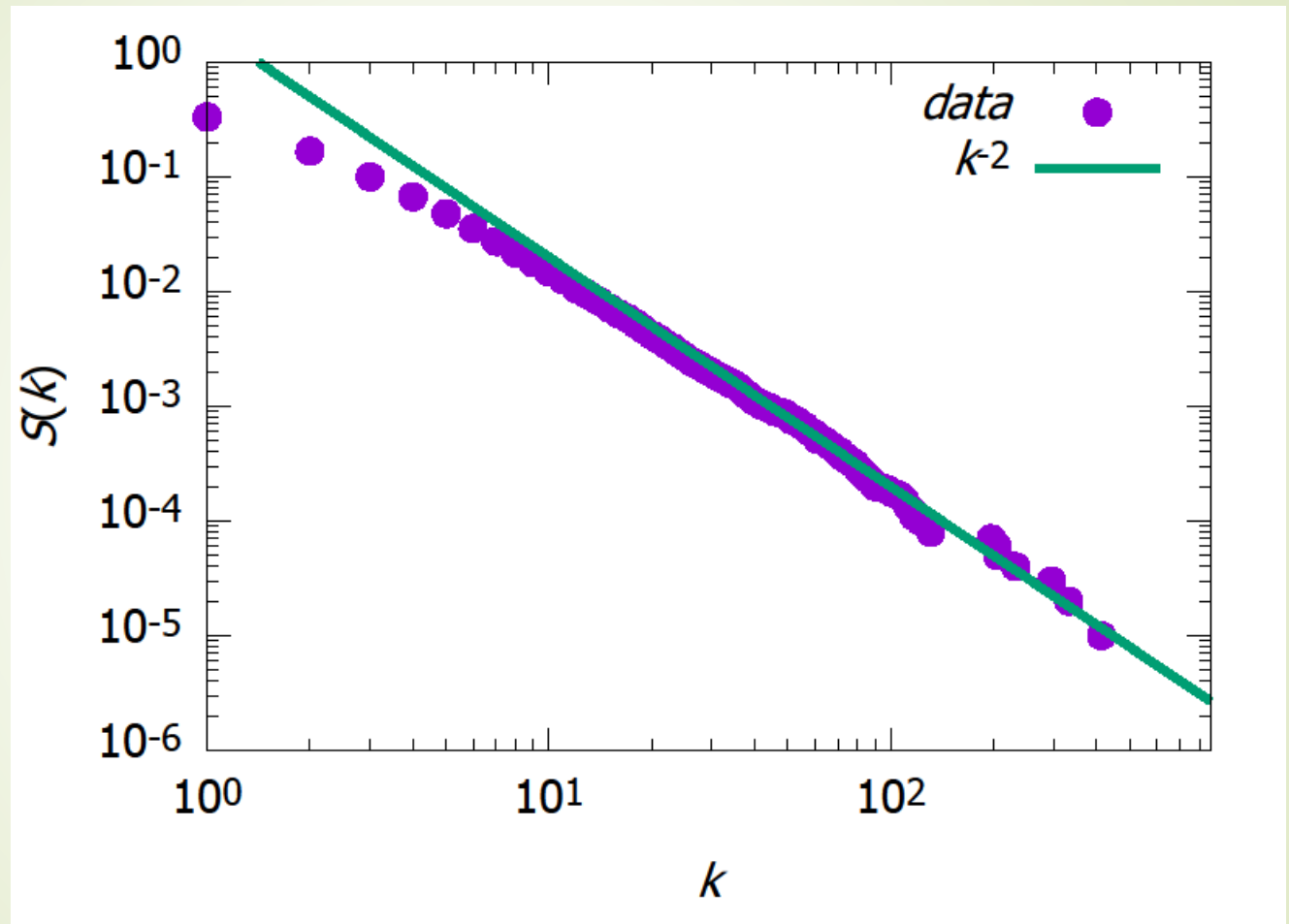
$$\begin{aligned} P(k) &= \frac{4}{(k+2)(k+1)k} \\ &= 4k^{-3} \left(1 - \frac{3}{k} + O(k^{-2}) \right) \end{aligned}$$

➡ 規格化されているか確認

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^N \frac{4}{k(k+1)(k+2)} &= 2 \sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right) \\ &= 2 \left(\sum_{k=1}^N \frac{1}{k(k+1)} - \sum_{k=1}^N \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right) \\ &= 2 \left(\sum_{k=1}^N \frac{1}{k(k+1)} - \sum_{k=2}^{N+1} \frac{1}{k(k+1)} \right) \\ &= 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(N+1)(N+2)} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k(k+1)(k+2)} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \frac{4}{k(k+1)(k+2)} \\ &= 2 \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(N+1)(N+2)} \right) = 1\end{aligned}$$





$$S(k) = 1 - \sum_{j=1}^k P(j)$$