



Barabási-Albertモデル

モデリングとシミュレーション

2016年度

scale-free network

- 現実のネットワークの次数分布
 - べき則 : $P(k) \sim k^{-\gamma}$
- べき則 (power-law)
 - 特徴的長さが無い : scale-free
 - 単位を変えても同じ関数形
 - スケール変換に対して不変

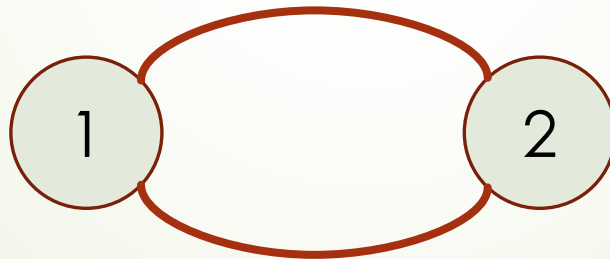
$$P(ak) = a^{-\gamma} P(k)$$

成長するネットワーク

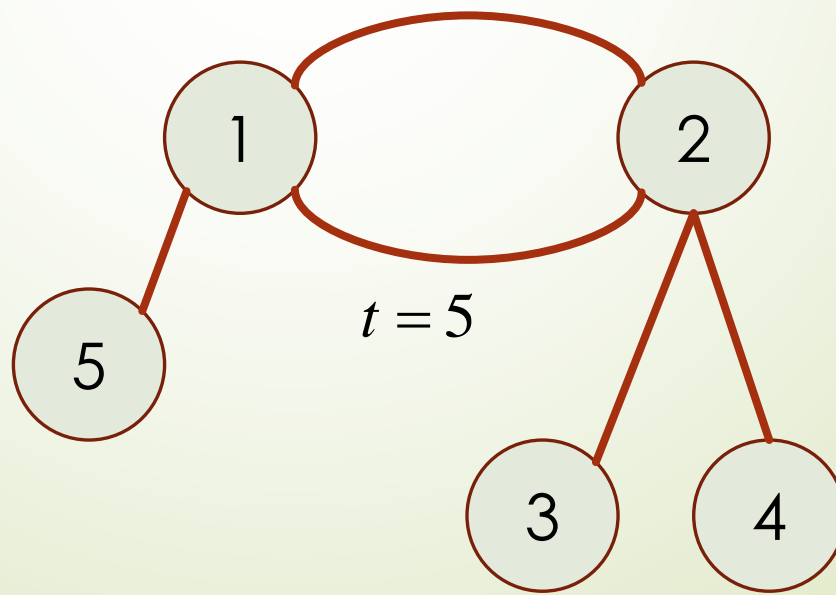
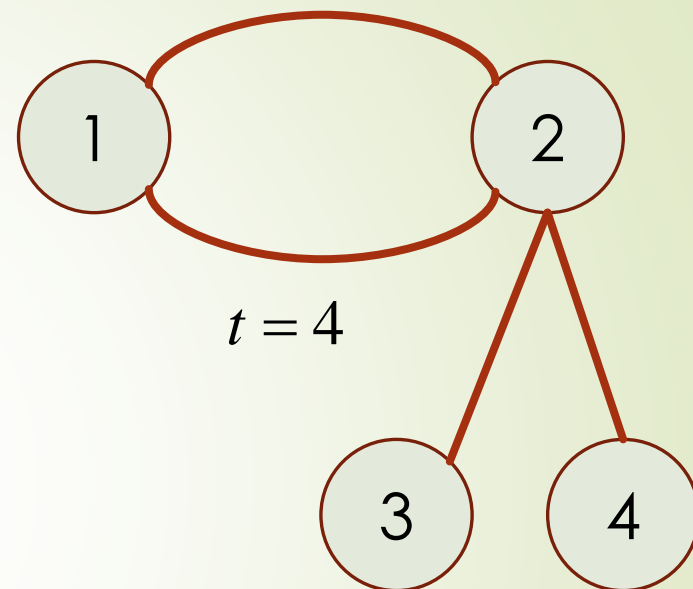
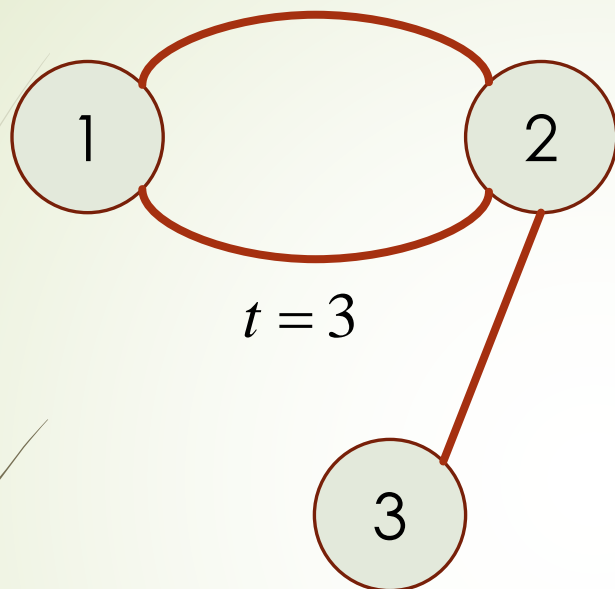
- 実際のネットワークは成長し続けている
 - インターネット
 - Webページのリンク
- 新しくできた節は、既存の節へ辺を生成する
 - 既存の節の性質に依存せずにランダムに対象を選択
 - 既存の節の次数などの性質に依存してランダムに対象を選択

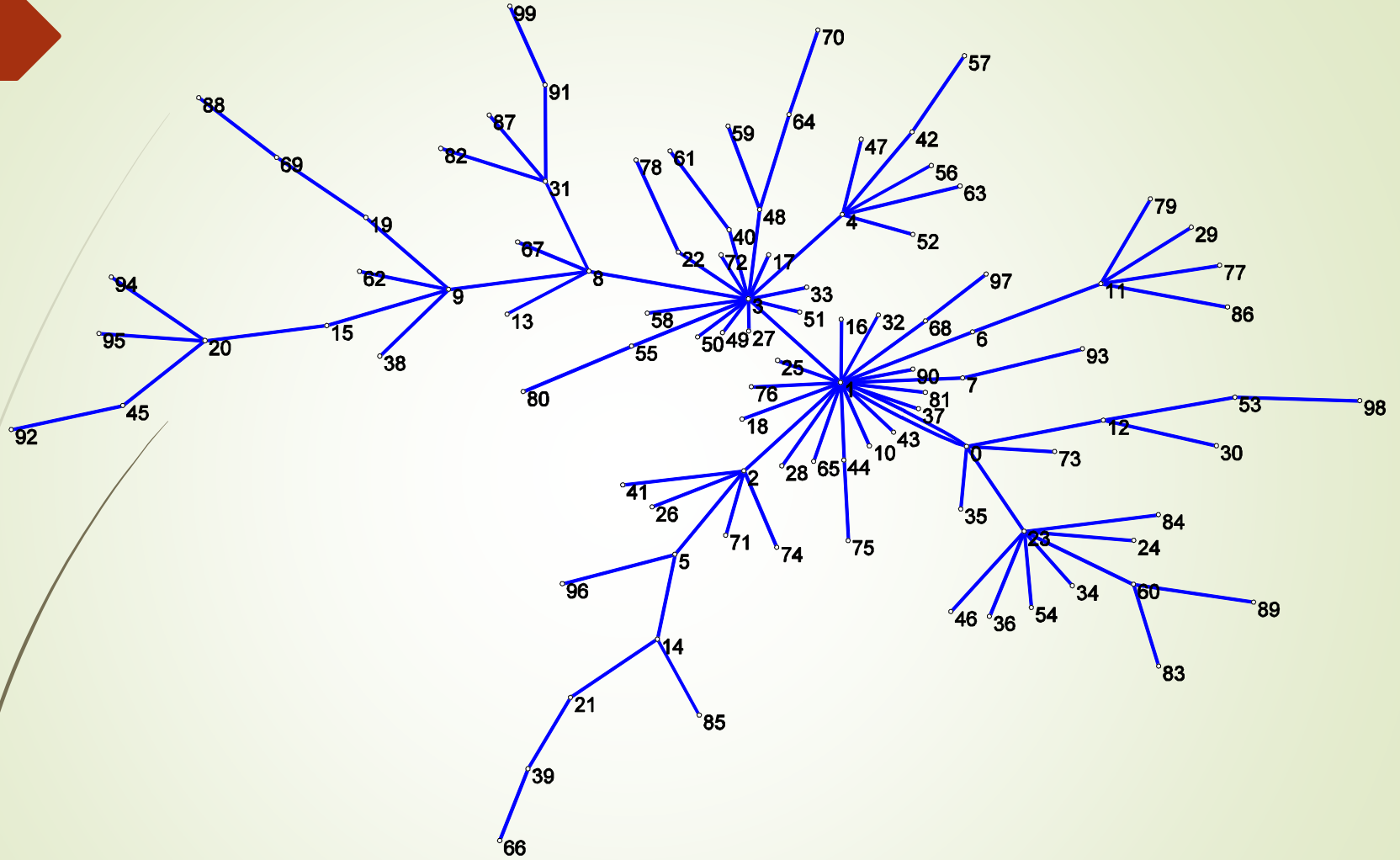
成長するランダムネットワーク

- ▶ 多重接続を許す無向ネットワーク
- ▶ 初期時刻 ($t = 2$) で、二個の節を二本の辺で接続



- 各時刻で、一つの節を追加し、既存の節を**次数に比例する確率**でランダムに選択して接続
 - 次数 k の節が選ばれる確率： $k/(2t)$
 - 次数の総和が $2t$ であることに注意
- 各時刻 t で、 t 個の節と t 本の辺
- 各節に、その節ができた時刻の番号 s を付ける





節 s に k 本の辺がある確率

- ➡ 時刻 t に存在する頂点数は t
- ➡ 時刻 $t + 1$ で頂点 s の次数が k になるには
 - ➡ 時刻 t で、次数が $k - 1$ であり、新しく生成された頂点から、選ばれ、辺が生成される：確率 $(k - 1)/(2t)$
 - ➡ 時刻 t で、次数が k であり、新しく生成された頂点から、選ばれず、辺が生成されない：確率 $1 - k/(2t)$

$$p(k, s, t + 1) = \frac{k - 1}{2t} p(k - 1, s, t) + \left(1 - \frac{k}{2t}\right) p(k, s, t)$$

➡ 初期条件

➡ 初期の二つの頂点の次数は2

$$p(k, s = \{1, 2\}, t = 2) = \delta_{k,2}$$

➡ 新しい頂点の次数は1

$$p(k, s = t, t > 2) = \delta_{k,1}$$

➡ ある時刻で存在する頂点に関する平均

$$P(k, t) = \frac{1}{t} \sum_{s=1}^t p(k, s, t)$$

$$\sum_{s=1}^t p(k, s, t+1) = \frac{k-1}{2t} \sum_{s=1}^t p(k-1, s, t) + \left(1 - \frac{k}{2t}\right) \sum_{s=1}^t p(k, s, t)$$
$$\sum_{s=1}^{t+1} p(k, s, t+1) - \delta_{k,1} = \frac{k-1}{2t} \sum_{s=1}^t p(k-1, s, t) + \left(1 - \frac{k}{2t}\right) \sum_{s=1}^t p(k, s, t)$$

左辺の計算に注意

- 時刻が $t + 1$ であること
- 和の上限

Master方程式の両辺の平均をとる

$$(t+1)P(k, t+1) - \delta_{k,1} = \frac{k-1}{2}P(k-1, t) + t\left(1 - \frac{k}{2t}\right)P(k, t)$$

$$(t+1)P(k, t+1) - tP(k, t) = \frac{1}{2}[(k-1)P(k-1, t) - kP(k, t)] + \delta_{k,1}$$

$$t[P(k, t+1) - P(k, t)] + P(k, t+1) = \frac{1}{2}[(k-1)P(k-1, t) - kP(k, t)] + \delta_{k,1}$$

平衡解

- ➡ 長時間後に確率分布が一定になるとする

$$P(k, t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} P(k)$$

- ➡ 平衡解に対する方程式

$$(k+2)P(k) - (k-1)P(k-1) = 2\delta_{k,1}$$

平衡解

$$P(k) = \frac{k-1}{k+2} P(k-1) \quad \text{for } k > 1$$

$$P(1) = \frac{2}{3}$$

➡ ベキ関数分布

$$\begin{aligned} P(k) &= \frac{4}{(k+2)(k+1)k} \\ &= 4k^{-3} \left(1 - \frac{3}{k} + O(k^{-2}) \right) \end{aligned}$$

➡ 規格化されているか確認

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^N \frac{4}{k(k+1)(k+2)} &= 2 \sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right) \\ &= 2 \sum_{k=1}^N \frac{1}{k(k+1)} - 2 \sum_{k=1}^N \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\ &= 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(N+1)(N+2)} \right) \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k(k+1)(k+2)} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \frac{4}{k(k+1)(k+2)} = 1\end{aligned}$$

