Barabási-Albertモデル

モデリングとシミュレーション

2017年度

scale-free network

- 現実のネットワークの次数分布
  - べき則：$P(k) \sim k^{-\gamma}$
- べき則 (power-law)
  - 特徴的長さが無い：scale-free
  - 単位を変えても同じ関数形
    - スケール変換に対して不変

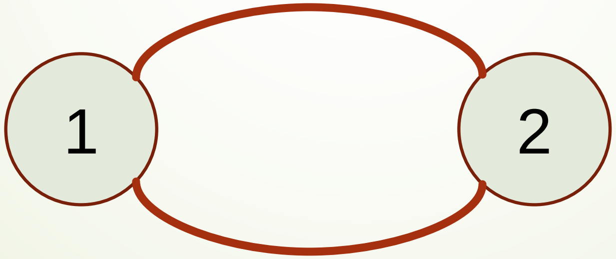
$$P\left(ak\right) = a^{-\gamma} P\left(k\right)$$

成長するネットワーク

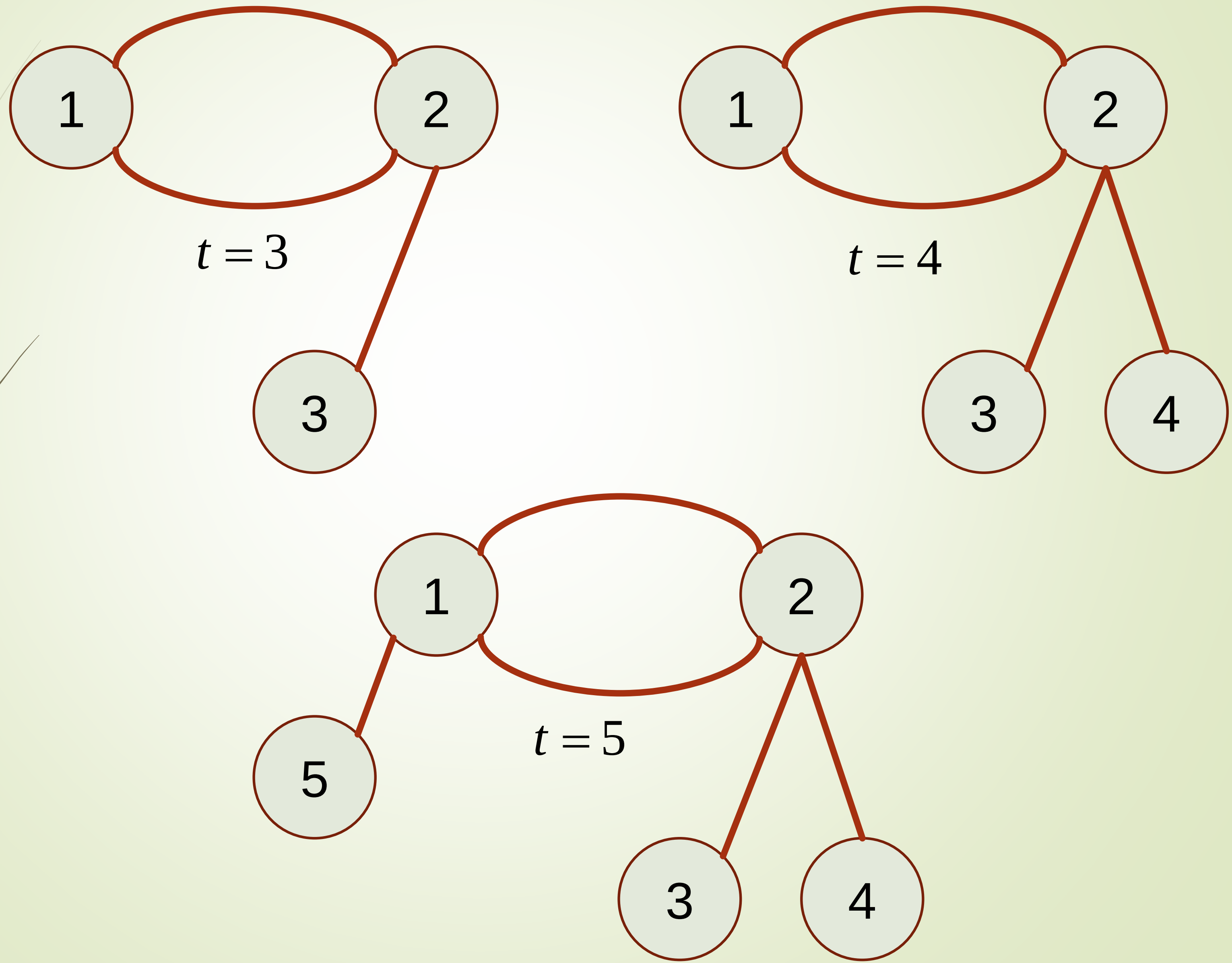
- 実際のネットワークは成長し続けている
  - インターネット
  - Webページのリンク
- 新しくできた節は、既存の節へ辺を生成する
  - 既存の節の性質に依存せずにランダムに対象を選択
  - 既存の節の次数などの性質に依存してランダムに対象を選択

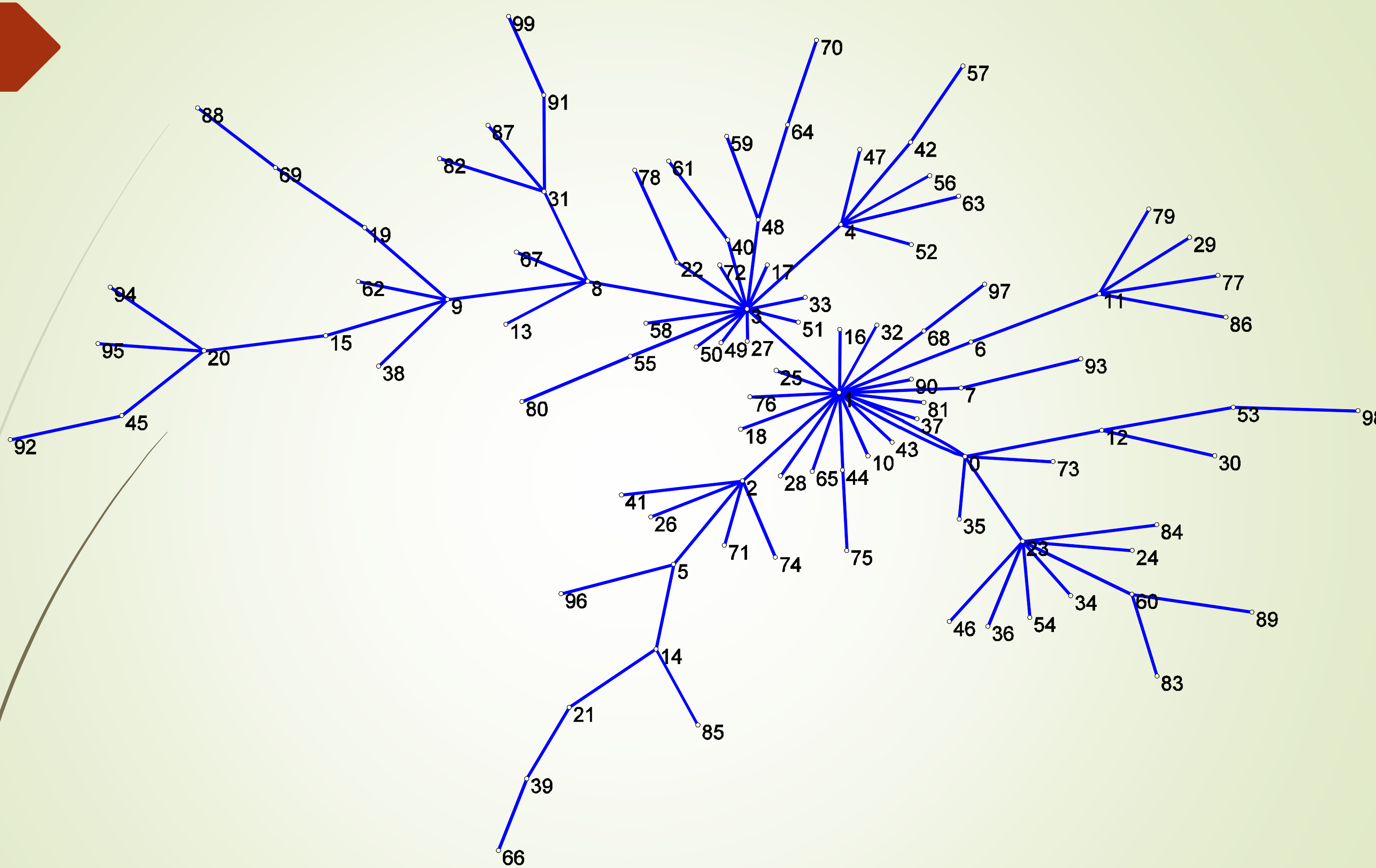
成長するランダムネットワーク

- 多重接続を許す無向ネットワーク
- 初期時刻($t = 2$)で、二個の節を二本の辺で接続



- 各時刻で、一つの節を追加し、既存の節を次数に比例する確率でランダムに選択して接続
  - 次数kの節が選ばれる確率：$k/(2t)$
  - 次数の総和が$2t$であることに注意
- 各時刻tで、t個の節とt本の辺
- 各節に、その節ができた時刻の番号sを付ける


1
2
3
t = 3
1
2
3
4
t = 4
1
2
5
3
4
t = 5



99
70
57
91
88
64
87
59
42
47
82
69
78
61
56
31
63
48
79
19
4
52
40
29
67
22
72
17
8
97
77
62
94
9
33
11
3
86
13
58
51
16
32
68
15
6
95
20
50
49
27
93
38
55
25
90
7
80
76
1
81
53
98
37
45
18
12
92
43
10
30
73
0
44
65
28
2
41
35
26
84
23
24
71
75
74
5
96
34
60
89
46
54
36
14
83
21
85
39
66

節sにk本の辺がある確率

- 時刻tに存在する頂点数はt
- 時刻$t+1$で頂点sの次数がkになるには
  - 時刻tで、次数が$k-1$であり、新しく生成された頂点から、選ばれ、辺が生成される：確率$(\mathrm{k}-1)/(2t)$
  - 時刻tで、次数がkであり、新しく生成された頂点から、選ばれず、辺が生成されない：確率$1-k/(2t)$

$$p(k,s,t+1)=\frac{k-1}{2t}p(k-1,s,t)+\left(1-\frac{k}{2t}\right)p(k,s,t)$$

- 初期条件
  - 初期の二つの頂点の次数は2

$$p\left(k, s=\{1,2\}, t=2\right)=\delta_{k,2}$$

- 新しい頂点の次数は1

$$p\left(k, s=t, t>2\right)=\delta_{k,1}$$

- ある時刻で存在する頂点に関する平均

$$P\left(k,t\right)=\frac{1}{t}\sum_{s=1}^{t}p\left(k,s,t\right)$$

$$\sum_{s=1}^{t} p(k,s,t+1) = \frac{k-1}{2t}\sum_{s=1}^{t} p(k-1,s,t) + \left(1-\frac{k}{2t}\right)\sum_{s=1}^{t} p(k,s,t)$$

$$\sum_{s=1}^{t+1} p(k,s,t+1) - \delta_{k,1} = \frac{k-1}{2t}\sum_{s=1}^{t} p(k-1,s,t) + \left(1-\frac{k}{2t}\right)\sum_{s=1}^{t} p(k,s,t)$$

左辺の計算に注意

- 時刻が$t+1$であること
- 和の上限

Master方程式の両辺の平均をとる

$$(t+1)P(k,t+1)-\delta_{k,1}=\frac{k-1}{2}P(k-1,t)+t\left(1-\frac{k}{2t}\right)P(k,t)$$

$$(t+1)P(k,t+1)-tP(k,t)=\frac{1}{2}\left[(k-1)P(k-1,t)-kP(k,t)\right]+\delta_{k,1}$$

$$t\left[P(k,t+1)-P(k)\right]+P(k,t+1)=\frac{1}{2}\left[(k-1)P(k-1,t)-kP(k,t)\right]+\delta_{k,1}$$

平衡解

- 長時間後に確率分布が一定になるとする

$$P(k,t) \xrightarrow[t\to\infty]{} P(k)$$

- 平衡解に対する方程式

$$(k+2)P(k)-(k-1)P(k-1)=2\delta_{k,1}$$

平衡解

$$P(k)=\frac{k-1}{k+2}P(k-1)\quad \text{for } k>1$$

$$P(1)=\frac{2}{3}$$

- べき関数分布

$$P(k)=\frac{4}{(k+2)(k+1)k}$$

$$=4k^{-3}\left(1-\frac{3}{k}+O\left(k^{-2}\right)\right)$$

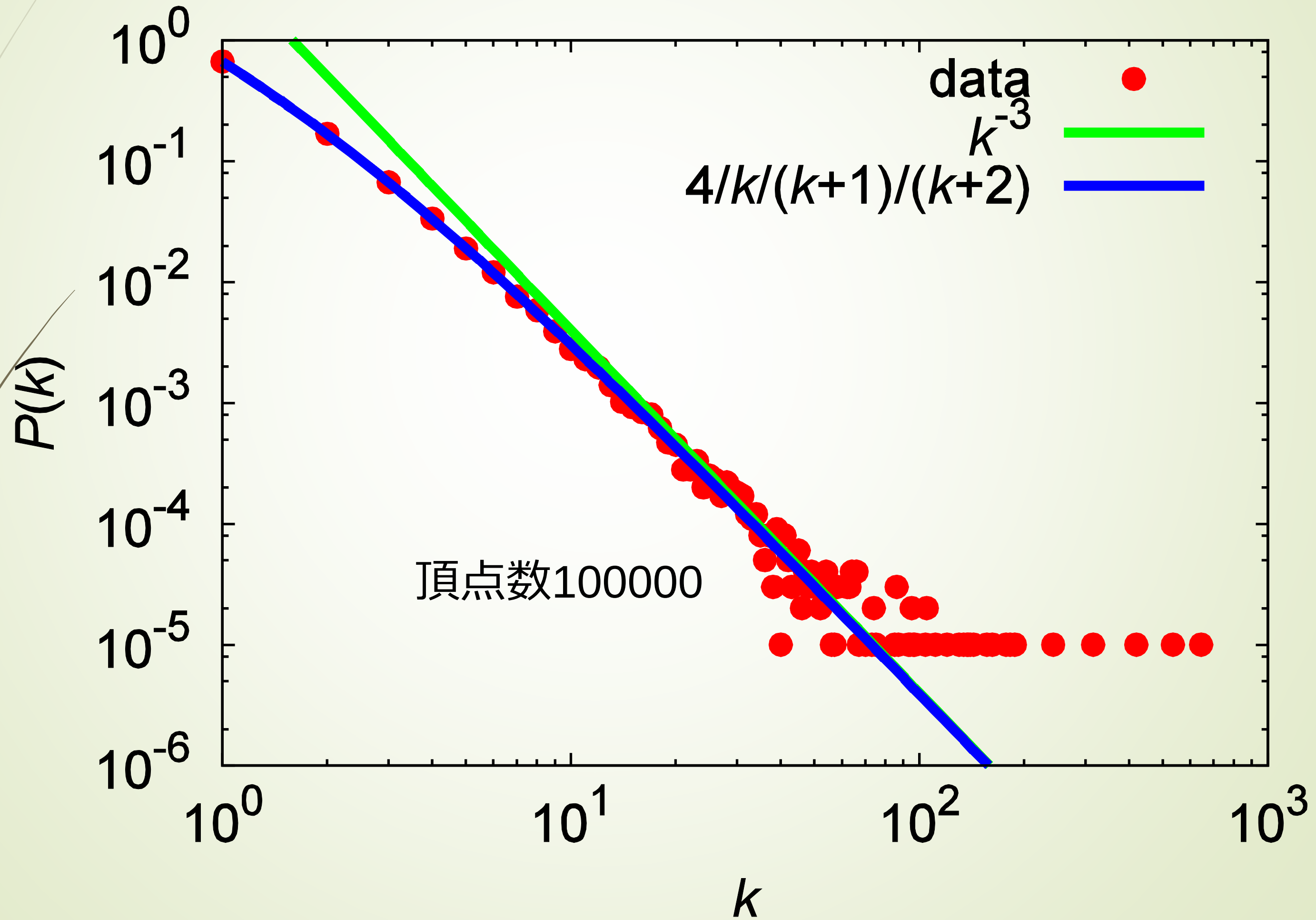
- 規格化されているか確認

$$\sum_{k=1}^{N}\frac{4}{k(k+1)(k+2)}=2\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right)$$

$$=2\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k(k+1)}-2\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$=2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{(N+1)(N+2)}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{k(k+1)(k+2)}=\lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N}\frac{4}{k(k+1)(k+2)}=1$$



data
k-3
4/k/(k+1)/(k+2)
頂点数100000
P(k)
k
10^0
10^-1
10^-2
10^-3
10^-4
10^-5
10^-6
10^0
10^1
10^2
10^3