CA伝染病モデル

(Cellular Automaton Epidemic Model) モデリングとシミュレーション

2019年度

理工学部　只木進一

伝染病は接触過程(contact processes)で広がる

- 病気の伝染の過程：接触過程
  - 直接的接触
  - 間接的接触：虫、咳、食器
- 病気に罹った個体に近づかないのが最大の防御方法

伝染病は接触過程(contact processes)で広がる

- 個体の空間分布が病気の拡がりに影響
  - 病気の「感染力」だけが重要ではない
  - 病気をうつす先がなければ、拡がらない

Kermack-McKendrickモデル

- 健康な個体数S、病気の個体数I及び治癒して免疫を持つ個体数R

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = -\beta SI$$
$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \beta SI - \gamma I$$
$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = \gamma I$$

W. D. Kermack and A. G. McKendrick, Proc. R. Soc. A115 (1927) 700.

セルオートマトンによるモデル化

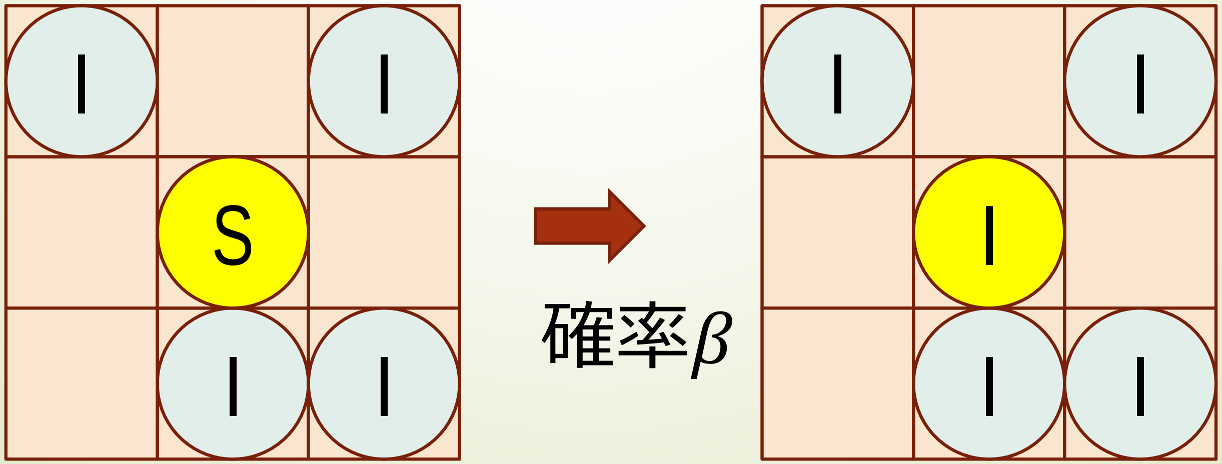
- どうやって空間依存をモデルに取り入れるか？
- 空間をセルに分割する
  - 今回は2次元のマス目に分割
- 一つのセルには一つの個体しか入ることはできない
  - 個体の居ないセルもある
- 隣接した個体間で病気が伝播

- 個体の状態は3種類
  - S：Susceptible：病気に罹る可能性あり
  - I：Infected：病気に罹っている、他の個体にうつす可能性あり
  - R：Recovered：病気が治り免疫がある
- 総個体数は一定
  - セルの総数より少ない

$$N(t) = S(t) + I(t) + R(t) = \mathrm{const}.$$

病気が伝染する過程

- 状態Sの個体が居るセルに、状態Iの個体が居るセルが一つでも隣接している場合
  - 状態Sの個体の状態が確率βで状態Iに



病気が治る過程

- 状態Iの個体は、隣接するセルの個体の状態とは無関係に、確率 γ で治癒し、状態Rに変化
- 状態Rの個体は、変化しない

モデルが無視していること

- 潜伏期間
  - 罹患してから、他にうつすようになるまでの時間
- 複数個体からの影響
- 個体の耐性のばらつき
- 空間配置が単純

2次元格子の周期境界条件
4×4の場合

	12	13	14	15	
3	0	1	2	3	0
7	4	5	6	7	4
11	8	9	10	11	8
15	12	13	14	15	12
	0	1	2	3	

2次元格子の周期境界条件

インデクスと座標の関係

$$r = 4 \times y + x$$

(0,0)	(1,0)	(2,0)	(3,0)
(0,1)	(1,1)	(2,1)	(3,1)
(0,2)	(1,2)	(2,2)	(3,2)
(0,3)	(1,3)	(2,3)	(3,3)

2次元格子の周期境界条件

	(0,3)	(1,3)	(2,3)	(3,3)	
(3,0)	(0,0)	(1,0)	(2,0)	(3,0)	(0,0)
(3,1)	(0,1)	(1,1)	(2,1)	(3,1)	(0,1)
(3,2)	(0,2)	(1,2)	(2,2)	(3,2)	(0,2)
(3,3)	(0,3)	(1,3)	(2,3)	(3,3)	(0,3)
	(0,0)	(1,0)	(2,0)	(3,0)	

右隣

$((x+1)\%4, y)$

左隣

$((x-1+4)\%4, y)$

上隣

$(x, (y-1+4)\%4)$

下隣

$(x, (y+1)\%4)$

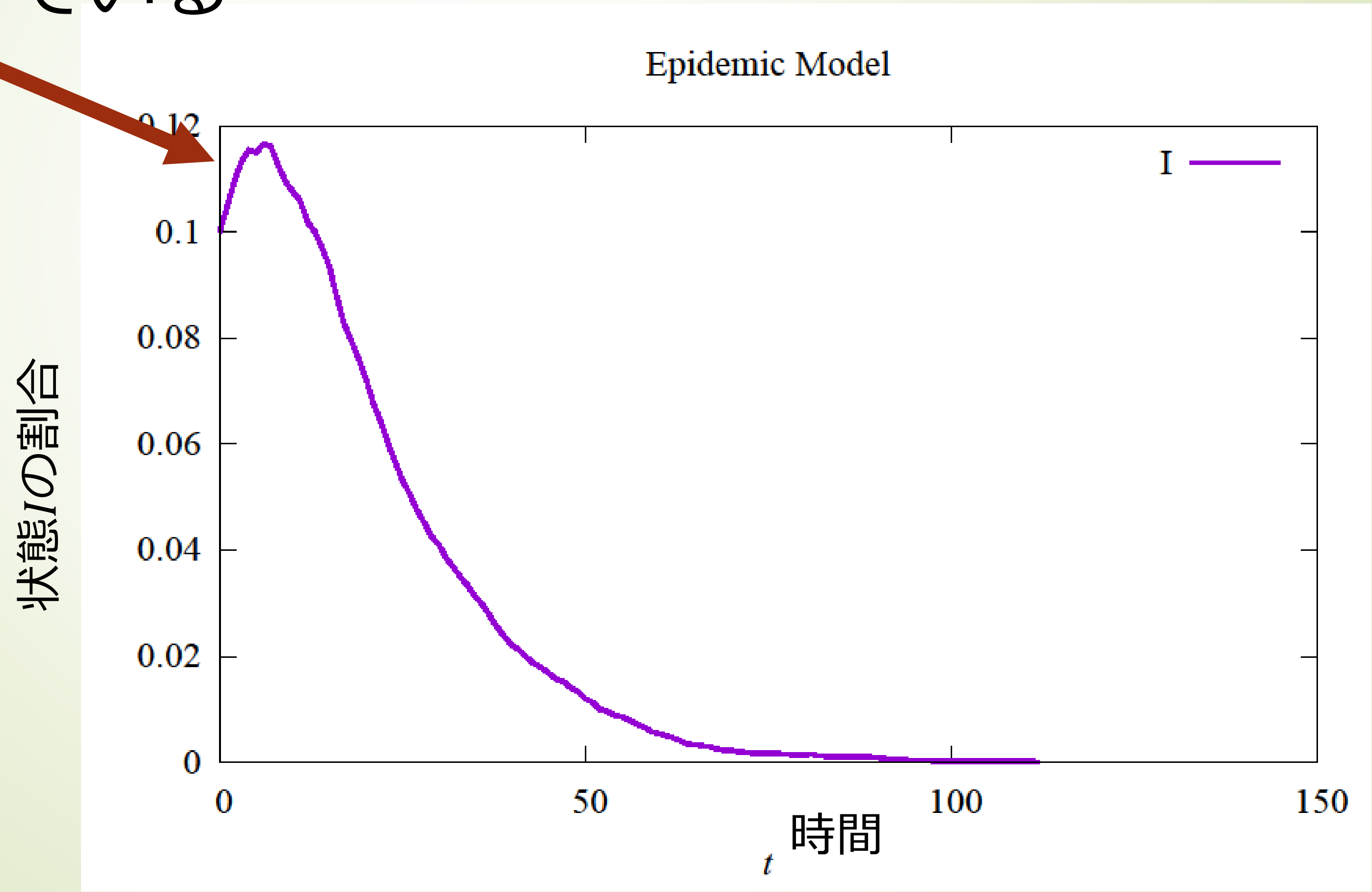
System size: 128×128

$N = 11468$

$I_0 = 1638$

$\beta = 0.1, \quad \gamma = 0.1$

一旦増加している

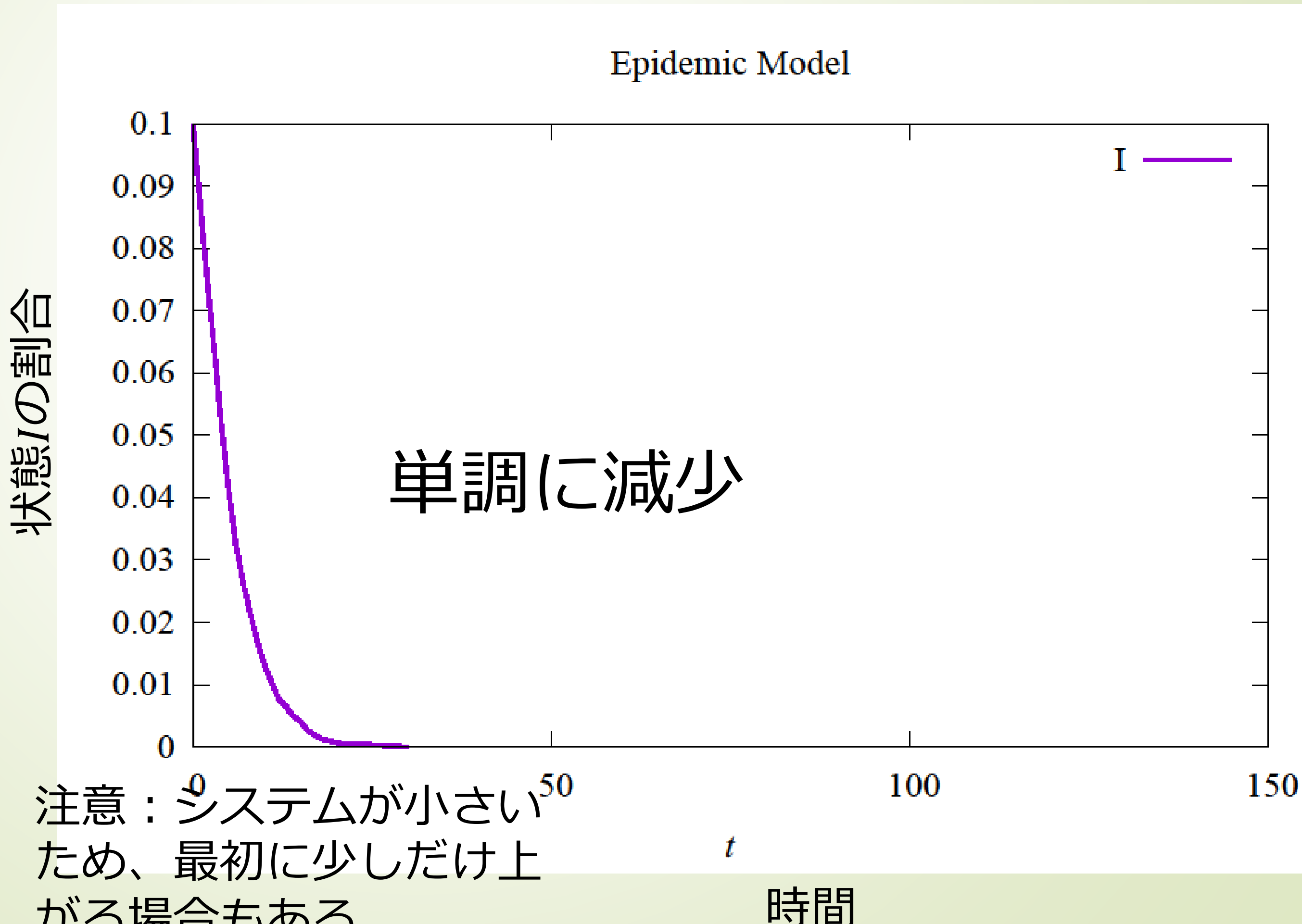


System size: 128×128

$$N = 11468$$

$$I_0 = 1638$$

$$\beta = 0.1, \quad \gamma = 0.1$$



注意：システムが小さいため、最初に少しだけ上がる場合もある。

システム全体の二つの可能性

- 病気が侵入する
  - 状態Iの個体数が一旦増加する
- 病気は侵入できない
  - 状態Iの個体数は単調に減少する
- もっと理論的に理解するには？

平均場(mean field)

- 空間的に不均一なモデルを理論的に調べることは難しい
- 位置の依存性をなくすために、
  - 注目している場所の周囲を平均で置き換える
  - 位置に依存しないモデルができる

平均場モデル中の変数

- $S(t)$：一つのサイトに状態Sの個体が居る確率
- $I(t)$：一つのサイトに状態Iの個体が居る確率
- $R(t)$：一つのサイトに状態Rの個体が居る確率

$$S(t)+I(t)+R(t)=\mathrm{const.}$$

平均場モデルの時間変化

- $S(t)$の時間変化：状態Iへの変化分だけ減少する
- $I(t)$の時間変化：状態Sからの増分と状態Rへの変化への減少分
- $R(t)$の時間変化：状態Iからの増分

$$S(t+1)=S(t)-\beta q(t)S(t)$$

$$I(t+1)=I(t)+\beta q(t)S(t)-\gamma I(t)$$

$$R(t+1)=R(t)+\gamma I(t)$$

- $q(t)$:一つのサイトの周囲に一つでも状態Iの個体が居る確率

$$q(t) = 1 - \left(1 - I(t)\right)^z$$

  - z :一つのサイトの周囲に存在するサイトの数。二次元正方格子ならば4
  - $1 - I(t)$:あるサイトに状態Iの個体の居ない確率
  - $\left(1 - I(t)\right)^z$:z個のサイトに状態Iの個体の居ない確率

病気の初期侵入
線形近似で調べる

$$I(0) \ll 1$$

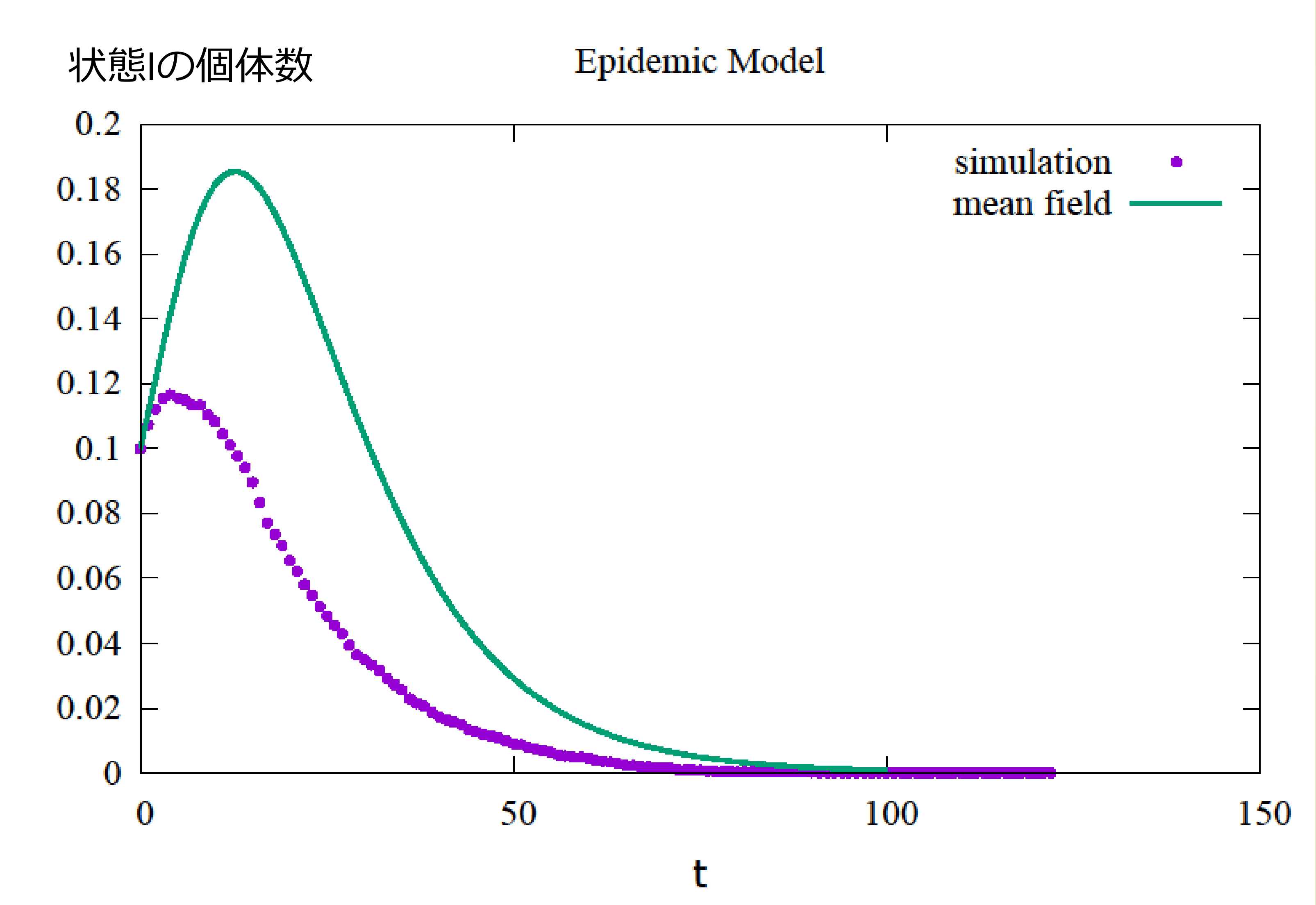
$$q(0) = 1 - \left(1 - I(0)\right)^z = zI(0) + O\left(I(0)^2\right)$$

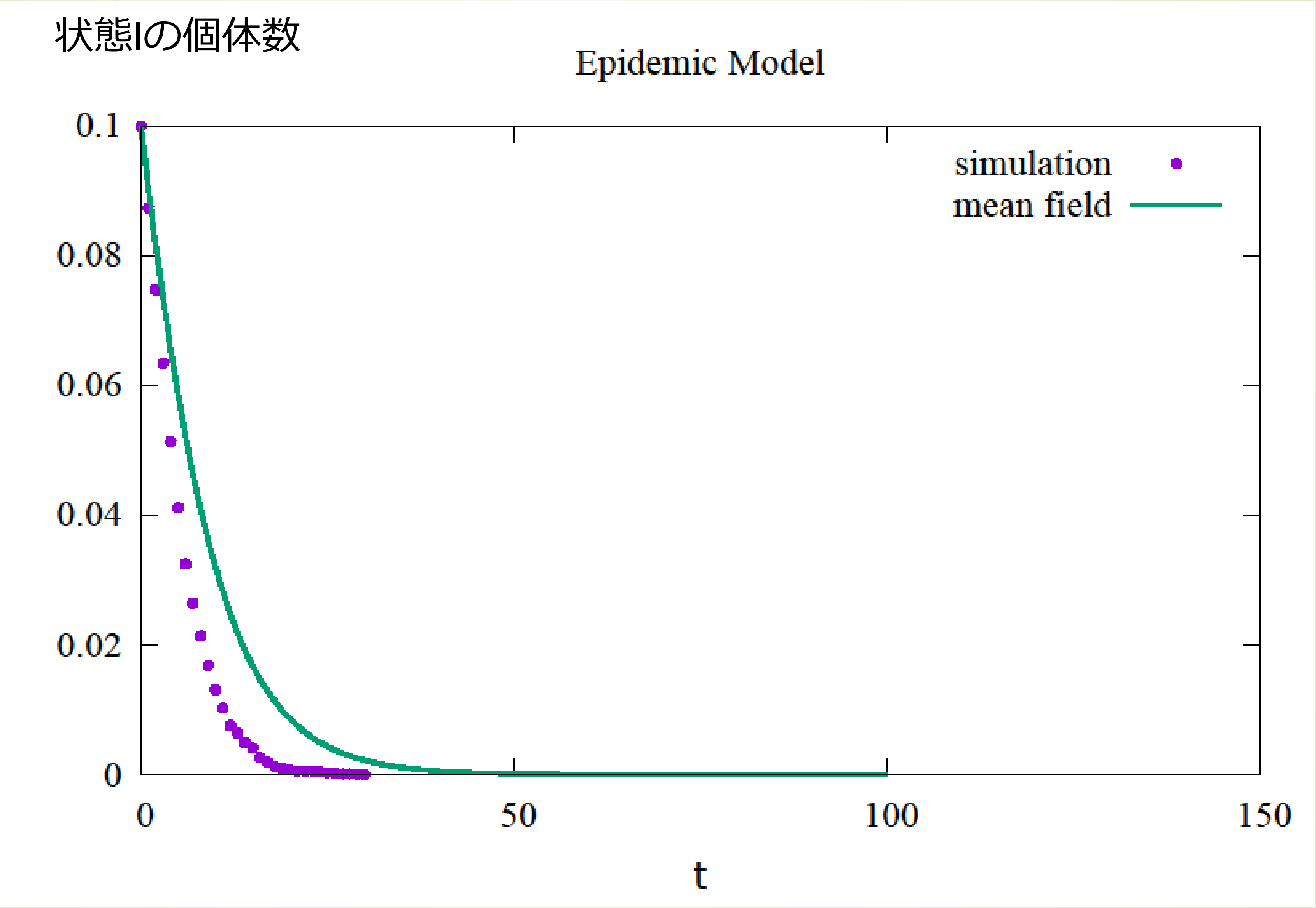
$$S(1) = S(0) - \beta z I(0) S(0) + O\left(I(0)^2\right)$$

$$I(1) = I(0) + \beta z I(0) S(0) - \gamma I(0) + O\left(I(0)^2\right)$$

$$R(1) = R(0) + \gamma I(0)$$

- $\beta z S(0) - \gamma > 0$の場合、いったん$I(t)$は増大、つまり病気は侵入し、感染者数が増える
- $\beta z S(0) - \gamma < 0$の場合、病気は侵入できず、感染者数は短調に減る
- γの閾値
  - $S(0) = 0.7, z = 4, \beta = 0.1$の場合$\gamma = 0.28$


状態Iの個体数
Epidemic Model
simulation
mean field
0.2
0.18
0.16
0.14
0.12
0.1
0.08
0.06
0.04
0.02
0
0
50
100
150
t


状態Iの個体数
Epidemic Model
0.1
0.08
0.06
0.04
0.02
0
0
50
100
150
simulation
mean field
t