

# 連成振動

## モデリングとシミュレーション

2019年度

1

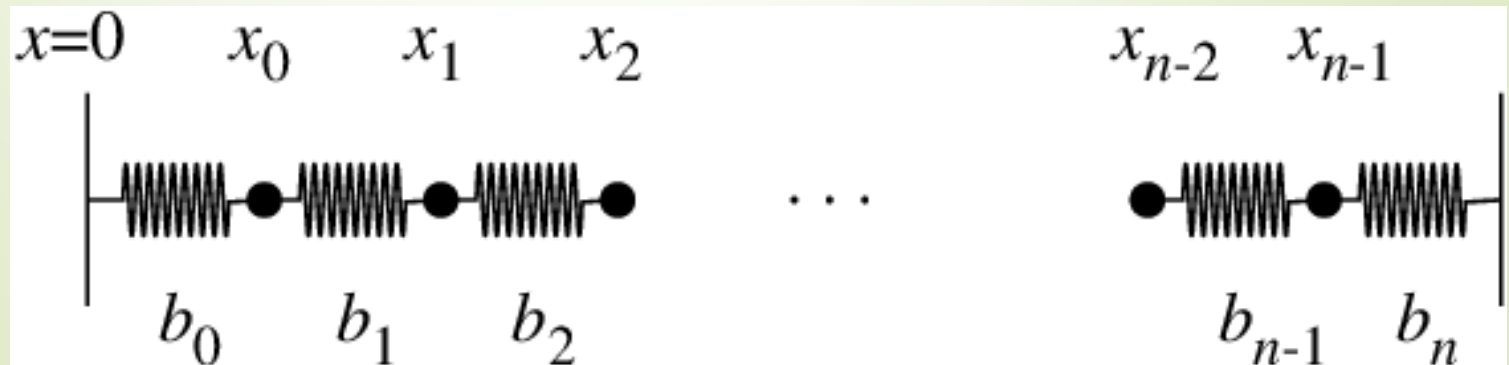
# モデルの設定

➡ 自然長 $b$ のばねで、質量 $m$ の粒子 $n$ 個が連結されている

➡ 粒子の位置： $x_i$

➡ 粒子の平衡位置からのずれ：

$$y_i = x_i - (i + 1)b$$



## 3粒子系

$$V = \frac{k}{2} \left[ y_0^2 + \sum_{i=1}^2 (y_i - y_{i-1})^2 + y_2^2 \right]$$

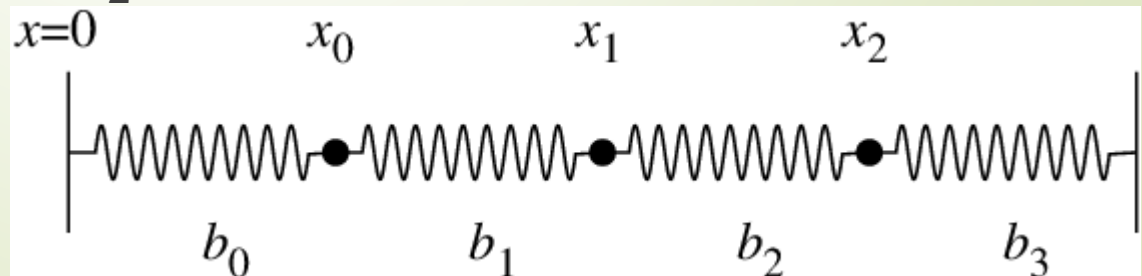
### ▶ ばねの位置エネルギー

▶ ばね0 :  $\frac{ky_0^2}{2}$

▶ ばね1 :  $\frac{k(y_1 - y_0)^2}{2}$

▶ ばね2 :  $\frac{k(y_2 - y_1)^2}{2}$

▶ ばね3 :  $\frac{ky_2^2}{2}$



## 3粒子系：運動方程式

$$V = \frac{k}{2} \left[ y_0^2 + \sum_{i=1}^2 (y_i - y_{i-1})^2 + y_2^2 \right]$$

$$m \frac{d^2 y_i}{dt^2} = - \frac{\partial V}{\partial y_i}$$



$$m \frac{d^2 y_0}{dt^2} = -k(2y_0 - y_1)$$

$$m \frac{d^2 y_1}{dt^2} = -k(-y_0 + 2y_1 - y_2)$$

$$m \frac{d^2 y_2}{dt^2} = -k(-y_1 + 2y_2)$$

$$m \frac{d^2 y_0}{dt^2} = -k(2y_0 - y_1)$$

$$m \frac{d^2 y_1}{dt^2} = -k(-y_0 + 2y_1 - y_2)$$

$$m \frac{d^2 y_2}{dt^2} = -k(-y_1 + 2y_2)$$

➡ 0番の粒子に働く力

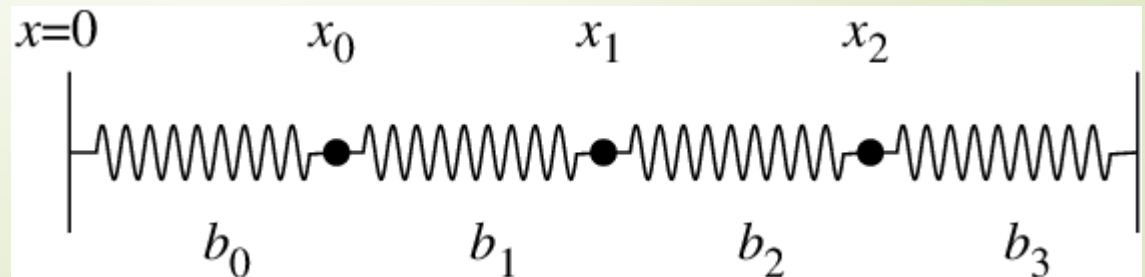
➡ 0番のバネ： $-ky_0$

➡ 1番のバネ： $k(y_1 - y_0)$

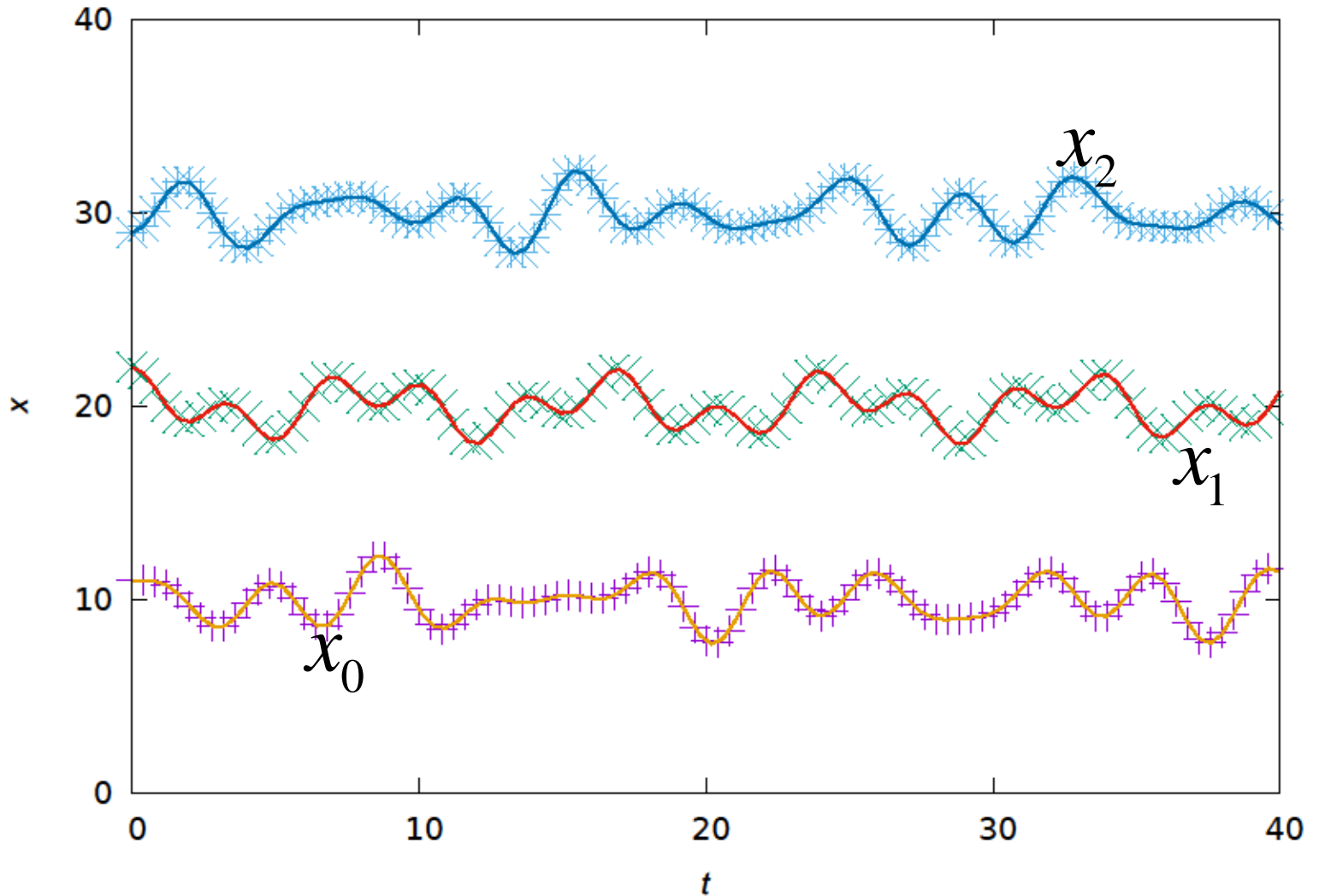
➡ 1番の粒子に働く力

➡ 1番のバネ： $-k(y_1 - y_0)$

➡ 2番のバネ： $k(y_2 - y_1)$



$$k/m = 1, \quad (x(0), v(0)) = ((1, 0), (2, 0), (-1, 0)), \quad b = 10$$



動画も見る

## 運動方程式を行列で表記

$$m \frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = -k \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = -kM \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

- ➡ 右辺の行列 $M$ の固有値を $\lambda$ 、対応する固有ベクトルを $\vec{v}_\lambda$ とする

$$M \vec{v}_\lambda = \lambda \vec{v}_\lambda$$

# 固有値を求める

## ➤ 固有値方程式

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \left[ (2-\lambda)^2 - 2 \right] = 0$$

## ➤ 固有値は3個

$$\lambda_0 = 2, \quad \lambda_{\pm} = 2 \pm \sqrt{2}$$



# 正規直交化固有ベクトル

➡  $\lambda_0 = 2$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \vec{v}_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

➡  $\lambda_{\pm} = 2 \pm \sqrt{2}$

$$\begin{pmatrix} \mp\sqrt{2} & -1 & 0 \\ -1 & \mp\sqrt{2} & -1 \\ 0 & -1 & \mp\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \vec{v}_{\pm} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \mp\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

# 解を固有ベクトルで展開

$z_\lambda$ は時間のある関数

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = z_+ \vec{v}_+ + z_0 \vec{v}_0 + z_- \vec{v}_-$$

$$z_\lambda = \vec{v}_\lambda \cdot \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$z_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} (y_0 - y_2)$$

$$z_\pm = \frac{1}{2} (y_0 \mp \sqrt{2} y_1 + y_2)$$

左辺

$$\begin{aligned}
 m \frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} &= m \frac{d^2}{dt^2} (z_+ \vec{v}_+ + z_0 \vec{v}_0 + z_- \vec{v}_-) \\
 &= m \frac{d^2 z_+}{dt^2} \vec{v}_+ + m \frac{d^2 z_0}{dt^2} \vec{v}_0 + m \frac{d^2 z_-}{dt^2} \vec{v}_-
 \end{aligned}$$

右辺

$$\begin{aligned}
 -kM \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} &= -kM (z_+ \vec{v}_+ + z_0 \vec{v}_0 + z_- \vec{v}_-) \\
 &= -k (\lambda_+ z_+ \vec{v}_+ + \lambda_0 z_0 \vec{v}_0 + \lambda_- z_- \vec{v}_-)
 \end{aligned}$$

注意： $\vec{v}_\lambda$ は互いに直交

固有ベクトル毎の微分方程式へ分解

$$m \frac{d^2}{dt^2} z_\lambda = -k \lambda z_\lambda \quad \text{角速度 } \omega_\lambda = \sqrt{\frac{k\lambda}{m}} \text{ の単振動}$$

$$m \frac{d^2 z_0}{dt^2} = -2k z_0$$

$$m \frac{d^2 z_\pm}{dt^2} = -(2 \pm \sqrt{2}) k z_\pm$$

3種類の角速度の単振動

$$y_0 = \frac{1}{2}(z_+ + \sqrt{2}z_0 + z_-)$$

$$y_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}(z_+ - z_-)$$

$$y_2 = \frac{1}{2}(z_+ - \sqrt{2}z_0 + z_-)$$

3種類の角速度の単振動の重ね合わせ

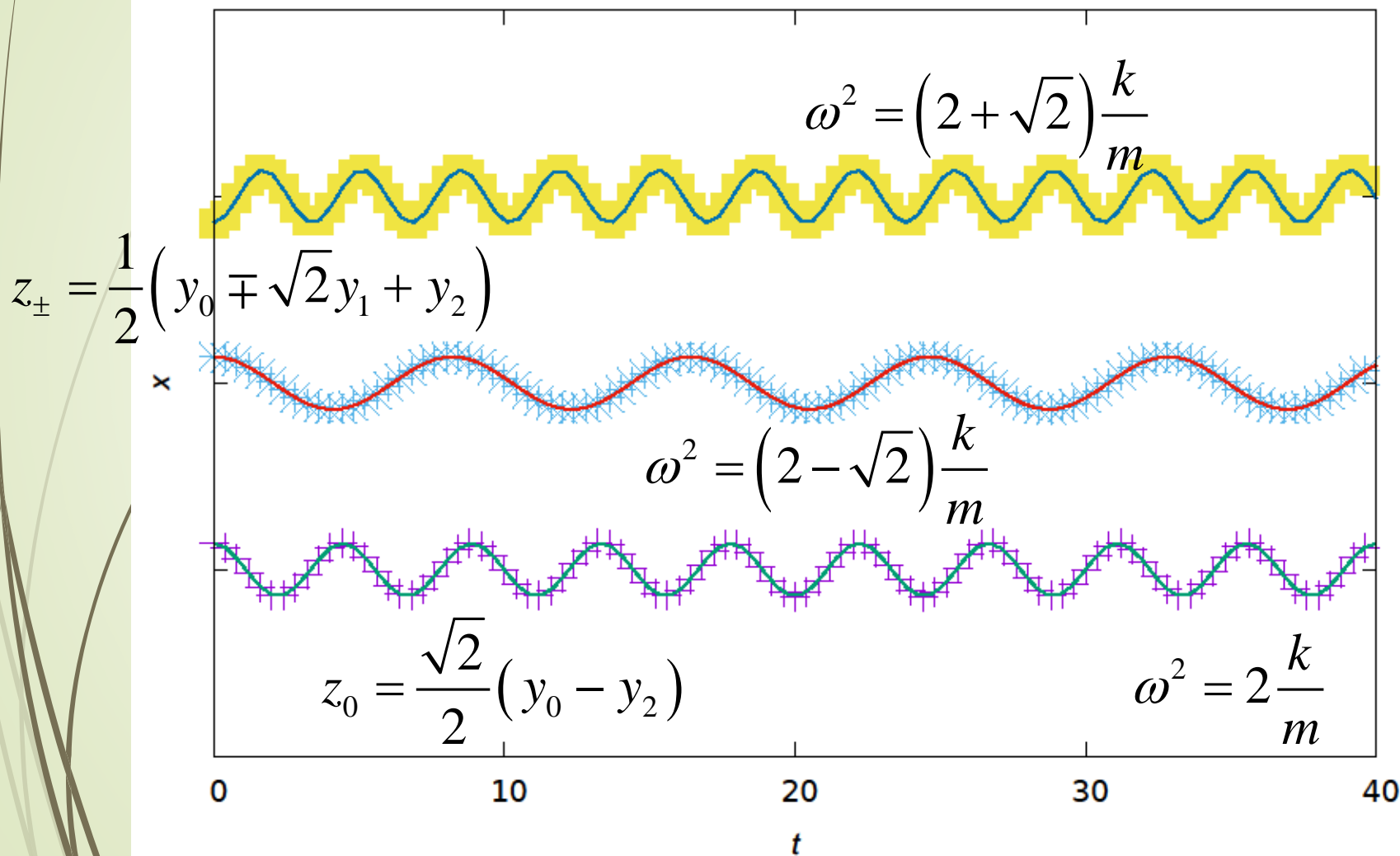
$$x_0 = b + y_0 = b + \frac{1}{2}(z_+ + \sqrt{2}z_0 + z_-)$$

$$x_1 = 2b + y_1 = 2b - \frac{\sqrt{2}}{2}(z_+ - z_-)$$

$$x_2 = 3b + y_2 = 3b + \frac{1}{2}(z_+ - \sqrt{2}z_0 + z_-)$$

# 各単振動

見やすいように、縦軸をずらしている



# $n$ 粒子へ拡張

- ▶ ばねに蓄えられるエネルギー

$$V = \frac{k}{2} \left[ y_0^2 + \sum_{i=1}^{n-1} (y_i - y_{i-1})^2 + y_{n-1}^2 \right]$$

- ▶ 運動方程式

$$m \frac{d^2 y_i}{dt^2} = - \frac{\partial V}{\partial y_i}$$



$$m \frac{d^2 y_i}{dt^2} = -k \sum_{j=0}^{n-1} M_{ij} y_j$$
$$M_{ij} = \begin{cases} 2 & i = j \\ -1 & j = i \pm 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

# 連立微分方程式への変形

➡ ずれ $y_i$ とその速度 $v_i$

$$\frac{dy_i}{dt} = v_i$$

$$\frac{dv_i}{dt} = -\frac{k}{m} \sum_{j=0}^{n-1} M_{ij} y_j$$

$$M_{ij} = \begin{cases} 2 & i = j \\ -1 & j = i \pm 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$yy[2i] = y_i$$

$$yy[2i+1] = v_i$$

偶数番は位置  
奇数番は速度



# クラス設計の工夫

- ▶ Runge-Kutta法を使って数値解
  - ▶ 変数と振動子の位置・速度との対応が分りにくくなる
- ▶ 一つの振動子の位置と速度を組にしたクラスOscillator
  - ▶ 初期値設定やデータ取り出しに利用

```
public class Oscillator {  
  
    public final double y;//平衡位置からのずれ  
    public final double v;//速度  
    public final double t;//時刻  
  
    public Oscillator(double y, double v) {  
        this.y = y;  
        this.v = v;  
        t = 0;  
    }  
  
    public Oscillator(double y, double v, double t) {  
        this.y = y;  
        this.v = v;  
        this.t = t;  
    }  
  
}
```

# コンストラクタ

- Oscillatorインスタンスの配列を引数に
  - 内部の配列yへ変換

```
public CoupledOscillators(Oscillator oscillators[], double k, double b) {
    this.b = b;
    numOscillators = oscillators.length; // 振動子の数
    y = new double[2 * numOscillators]; // 従属変数
    t = 0.; // 独立変数の初期値
    // 偶数番目の従属変数は変位、奇数番目は速度
    // 初期値設定
    for (int i = 0; i < numOscillators; i++) {
        y[2 * i] = oscillators[i].y; // 変位
        y[2 * i + 1] = oscillators[i].v; // 速度
    }
}
```

# 取り出し

- 内部の配列yからOscillator配列へ変換

```
/**
 * 現在の状態をOscillatorとして返す
 *
 * @return
 */
public Oscillator[] getOscillators() {
    Oscillator oscillators[] = new Oscillator[numOscillators];
    for (int i = 0; i < numOscillators; i++) {
        oscillators[i] = new Oscillator(y[2 * i], y[2 * i + 1], t);
    }
    return oscillators;
}
```