連成振動

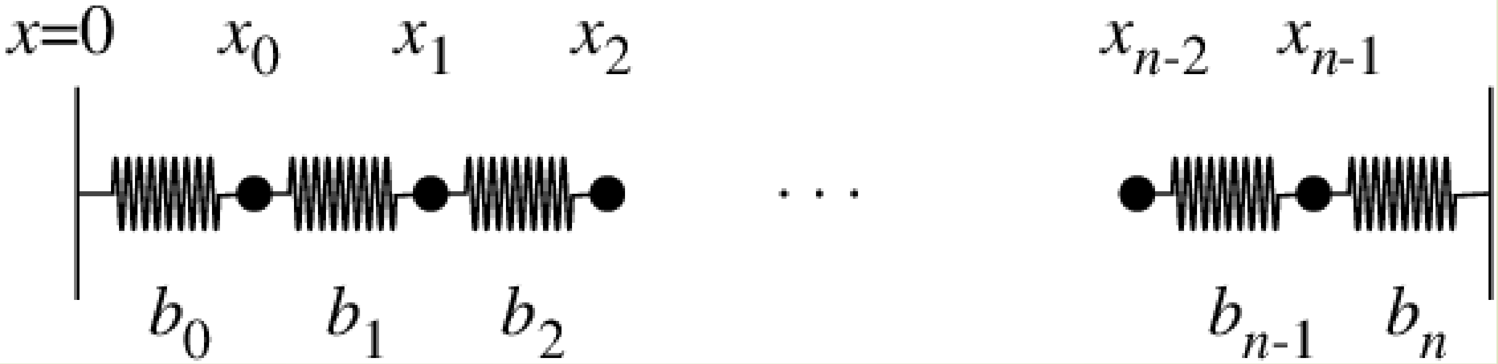
モデリングとシミュレーション

2018年度

モデルの設定

- 自然長bのばねで、質量mの粒子n個が連結されている
  - 粒子の位置：x_i
  - 粒子の平衡位置からのずれ：

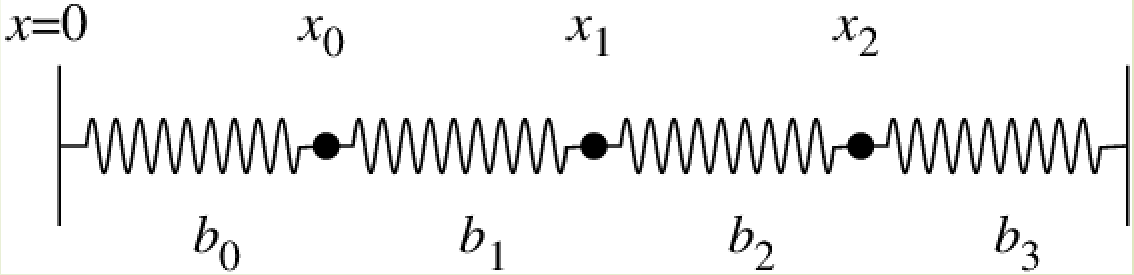
$$y_i = x_i - (i+1)b$$



3粒子系

$$V=\frac{k}{2}\left[y_0^2+\sum_{i=1}^{2}\left(y_i-y_{i-1}\right)^2+y_2^2\right]$$

- ばねの位置エネルギー
  - ばね0：$\frac{ky_0^2}{2}$
  - ばね1：$\frac{k(y_1-y_0)^2}{2}$
  - ばね2：$\frac{k(y_2-y_1)^2}{2}$
  - ばね3：$\frac{ky_2^2}{2}$



3粒子系：運動方程式

$$V = \frac{k}{2}\left[y_0^2 + \sum_{i=1}^{2}\left(y_i - y_{i-1}\right)^2 + y_2^2 \right]$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2 y_i}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{\partial V}{\partial y_i}$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2 y_0}{\mathrm{d}t^2} = -k\left(2y_0 - y_1\right)$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2 y_1}{\mathrm{d}t^2} = -k\left(-y_0 + 2y_1 - y_2\right)$$

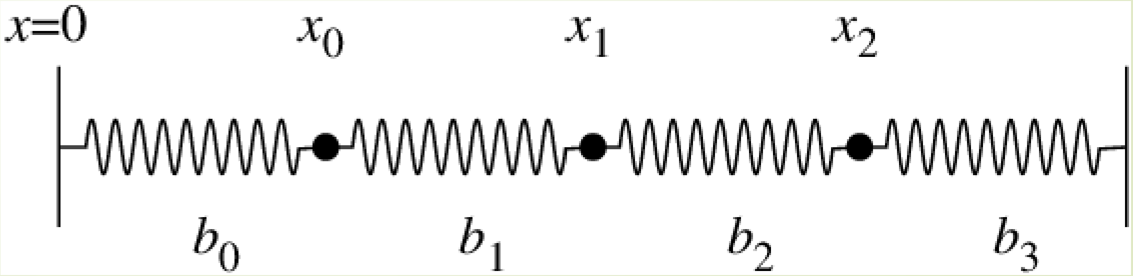
$$m\frac{\mathrm{d}^2 y_2}{\mathrm{d}t^2} = -k\left(-y_1 + 2y_2\right)$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2 y_0}{\mathrm{d}t^2} = -k\left(2y_0 - y_1\right)$$

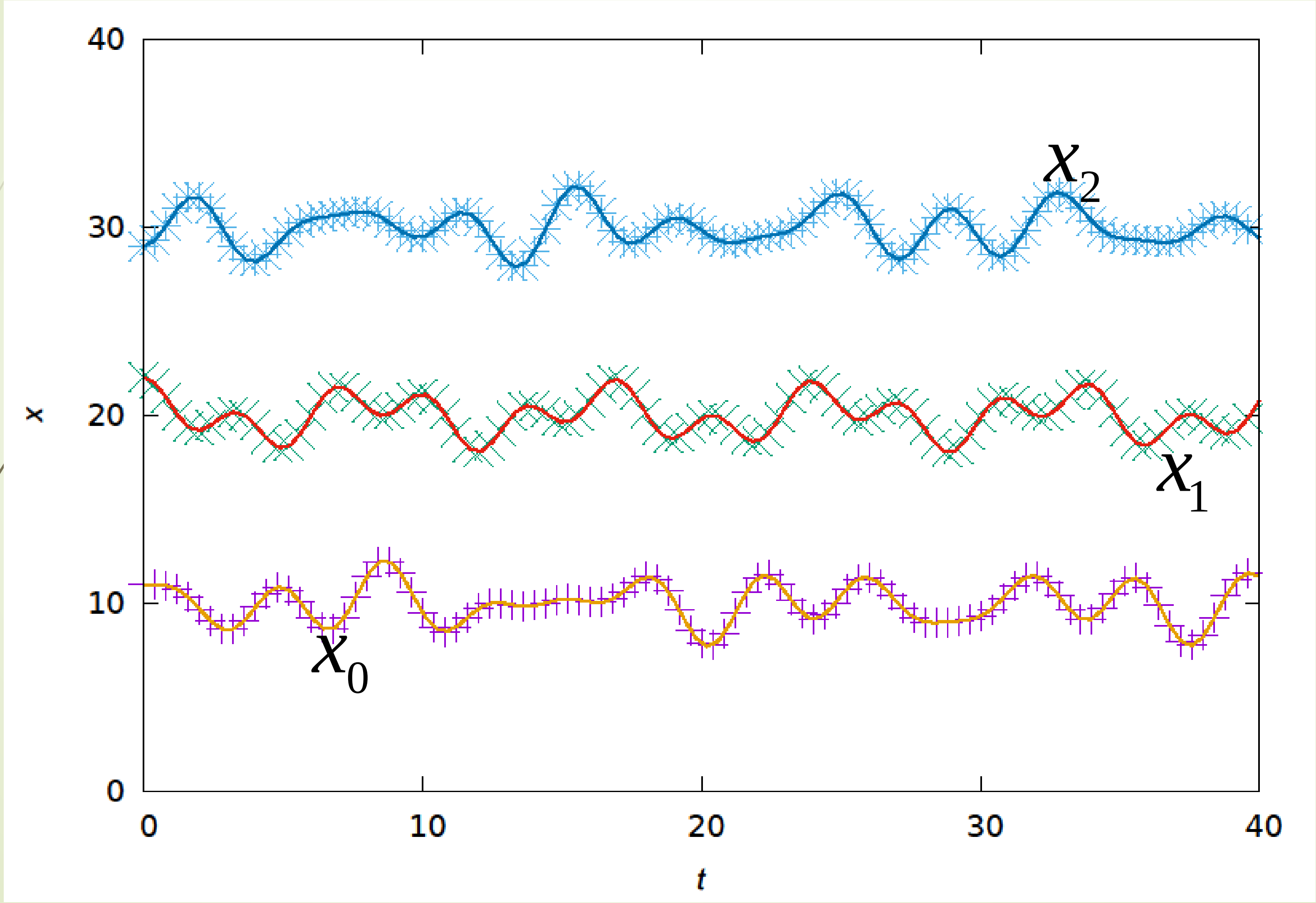
$$m\frac{\mathrm{d}^2 y_1}{\mathrm{d}t^2} = -k\left(-y_0 + 2y_1 - y_2\right)$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2 y_2}{\mathrm{d}t^2} = -k\left(-y_1 + 2y_2\right)$$

- 0番の粒子に働く力
  - 0番のバネ：$-ky_0$
  - 1番のバネ：$k(y_1 - y_0)$
- 1番の粒子に働く力
  - 1番のバネ：$-k(y_1 - y_0)$
  - 2番のバネ：$k(y_2 - y_1)$



$$k/m = 1, \quad \left(x(0), v(0)\right) = \left((1,0),(2,0),(-1,0)\right), \quad b = 10$$



動画も見る

運動方程式を行列で表記

$$m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = -k\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = -kM\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

- 右辺の行列Mの固有値をλ、対応する固有ベクトルを$\vec{v}_\lambda$とする

$$M\overrightarrow{v_\lambda} = \lambda\overrightarrow{v_\lambda}$$

固有値

- 固有値方程式

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\left[(2-\lambda)^2 - 2\right] = 0$$

- 固有値

$$\lambda_0 = 2, \quad \lambda_\pm = 2 \pm \sqrt{2}$$

正規直交化固有ベクトル

- $\lambda_0 = 2$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- $\lambda_\pm = 2 \pm \sqrt{2}$

$$\begin{pmatrix} \mp\sqrt{2} & -1 & 0 \\ -1 & \mp\sqrt{2} & -1 \\ 0 & -1 & \mp\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{v_\pm} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ \mp\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

解を固有ベクトルで展開

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = z_+\vec{v}_+ + z_0\vec{v}_0 + z_-\vec{v}_-$$

$$z_\lambda = \overrightarrow{v_\lambda} \cdot \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$z_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(y_0 - y_2\right)$$

$$z_\pm = \frac{1}{2}\left(y_0 \mp \sqrt{2}y_1 + y_2\right)$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(z_+\vec{v}_+ + z_0\vec{v}_0 + z_-\vec{v}_-\right)$$

$$= m\frac{\mathrm{d}^2 z_+}{\mathrm{d}t^2}\vec{v}_+ + m\frac{\mathrm{d}^2 z_0}{\mathrm{d}t^2}\vec{v}_0 + m\frac{\mathrm{d}^2 z_-}{\mathrm{d}t^2}\vec{v}_-$$

$$-kM\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = -kM\left(\lambda_+ z_+\vec{v}_+ + \lambda_0 z_0\vec{v}_0 + \lambda_- z_-\vec{v}_-\right)$$

$$= -k\left(\lambda_+\vec{v}_+ + \lambda_0\vec{v}_0 + \lambda_-\vec{v}_-\right)$$

固有ベクトル毎の微分方程式へ分解

$$m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}z_\lambda = -k\lambda z_\lambda$$

角速度$\omega_\lambda = \sqrt{\frac{k\lambda}{m}}$の単振動

$$m\frac{\mathrm{d}^2 z_0}{\mathrm{d}t^2} = -2kz_0$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2 z_\pm}{\mathrm{d}t^2} = -\left(2\pm\sqrt{2}\right)kz_\pm$$

3種類の角速度の単振動

$$y_0 = \frac{1}{2}\left(z_+ + \sqrt{2}z_0 + z_-\right)$$

$$y_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(z_+ - z_-\right)$$

$$y_2 = \frac{1}{2}\left(z_+ - \sqrt{2}z_0 + z_-\right)$$

3種類の角速度の単振動の重ね合わせ

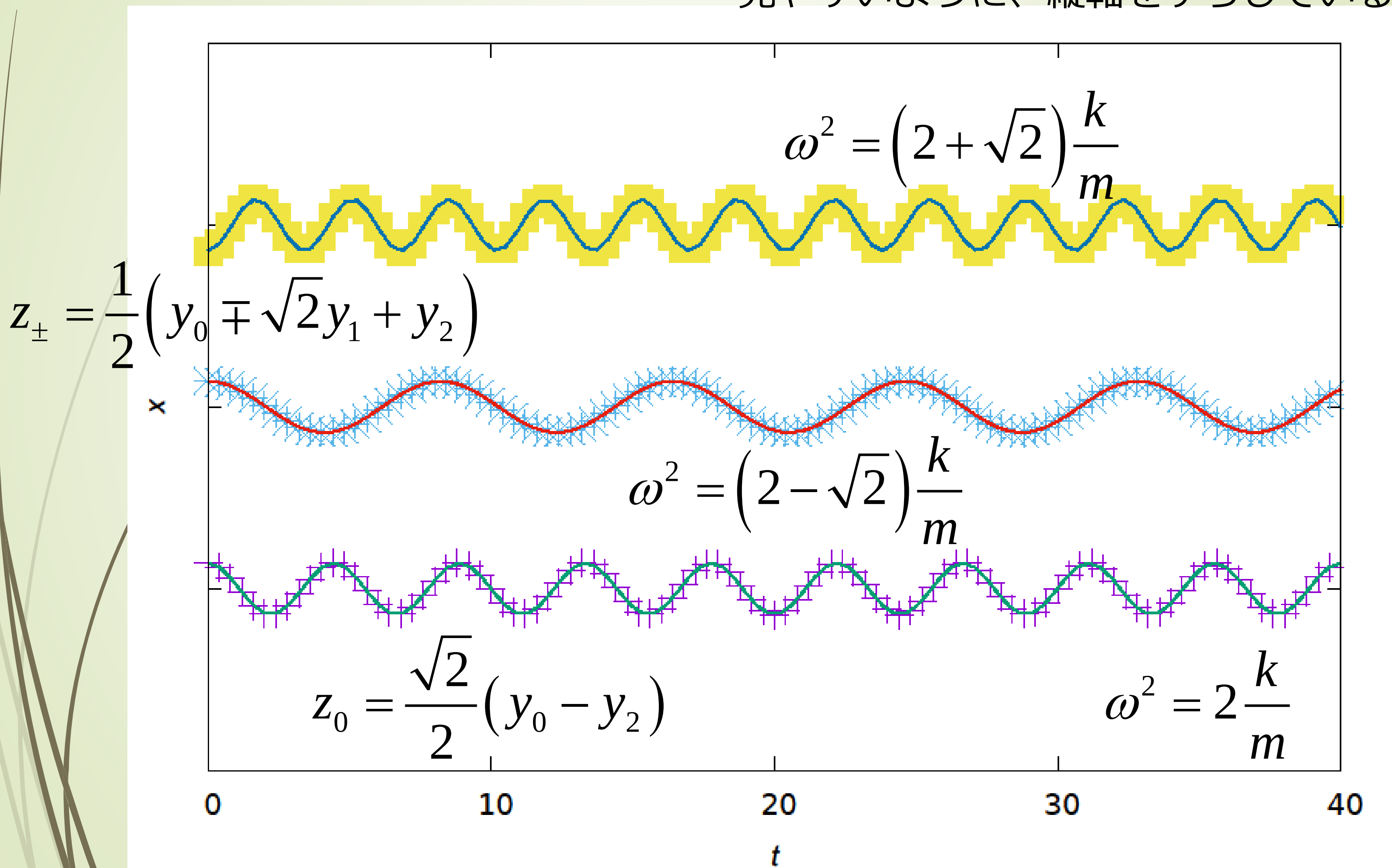
$$x_0 = b + y_0 = b + \frac{1}{2}\left(z_+ + \sqrt{2}z_0 + z_-\right)$$

$$x_1 = 2b + y_1 = 2b - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(z_+ - z_-\right)$$

$$x_2 = 3b + y_2 = 3b + \frac{1}{2}\left(z_+ - \sqrt{2}z_0 + z_-\right)$$

各単振動

見やすいように、縦軸をずらしている



n粒子へ拡張

- ばねに蓄えられるエネルギー

$$V = \frac{k}{2}\left[y_0^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \left(y_i - y_{i-1} \right)^2 + y_{n-1}^2 \right]$$

- 運動方程式

$$m\frac{\mathrm{d}^2 y_i}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{\partial V}{\partial y_i} \quad \Rightarrow \quad m\frac{\mathrm{d}^2 y_i}{\mathrm{d}t^2} = -k\sum_{j=0}^{n-1} M_{ij} y_j$$

$$M_{ij} = \begin{cases} 2 & i = j \\ -1 & j = i \pm 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

連立微分方程式への変形

- ずれy_iとその速度v_i

$$\frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}t} = v_i$$

$$\frac{\mathrm{d}v_i}{\mathrm{d}t} = -\frac{k}{m}\sum_{j=0}^{n-1} M_{ij} y_j$$

$$M_{ij} = \begin{cases} 2 & i = j \\ -1 & j = i \pm 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$yy[2i] = \mathrm{y}_i$$

$$yy[2i+1] = v_i$$

偶数番は位置
奇数番は速度

クラス設計の工夫

- Runge-Kutta法を使って数値解
  - 変数と振動子の位置・速度との対応が分りにくくなる
- 一つの振動子の位置と速度を組にしたクラスOscillator
  - 初期値設定やデータ取り出しに利用

```
public class Oscillator {

    public final double y;//平衡位置からのずれ
    public final double v;//速度
    public final double t;//時刻

    public Oscillator(double y, double v) {
        this.y = y;
        this.v = v;
        t = 0;
    }

    public Oscillator(double y, double v, double t) {
        this.y = y;
        this.v = v;
        this.t = t;
    }

}
```

コンストラクタ

- Oscillatorインスタンスの配列を引数に
  - 内部の配列yへ変換

```
public CoupledOscillators(Oscillator oscillators[], double k, double b) {
    this.b = b;
    numOscillators = oscillators.length;//振動子の数
    y = new double[2 * numOscillators];//従属変数
    t = 0.;//独立変数の初期値
    //偶数番目の従属変数は変位、奇数番目は速度
    //初期値設定
    for (int i = 0; i < numOscillators; i++) {
        y[2 * i] = oscillators[i].y;//変位
        y[2 * i + 1] = oscillators[i].v;//速度
    }
```

取り出し

- 内部の配列yからOscillator配列へ変換

```
/**
 * 現在の状態をOscillatorとして返す
 *
 * @return
 */
public Oscillator[] getOscillators() {
    Oscillator oscillators[] = new Oscillator[numOscillators];
    for (int i = 0; i < numOscillators; i++) {
        oscillators[i] = new Oscillator(y[2 * i], y[2 * i + 1], t);
    }
    return oscillators;
}
```