

# 7. 連成振動

2017/11/13

## 1 連成振動

### 1.1 問題設定

質量  $m$  の  $n$  個の粒子が、自然長  $b$ 、ばね定数  $k$  のばねによって長さ  $b(n+1)$  の空間に連結されているとします。 $i$  番目の粒子の位置  $x_i$  に対して、その粒子の平衡位置からのずれは

$$y_i = x_i - (i+1)b \quad (1.1)$$

と表されます (図 1)。

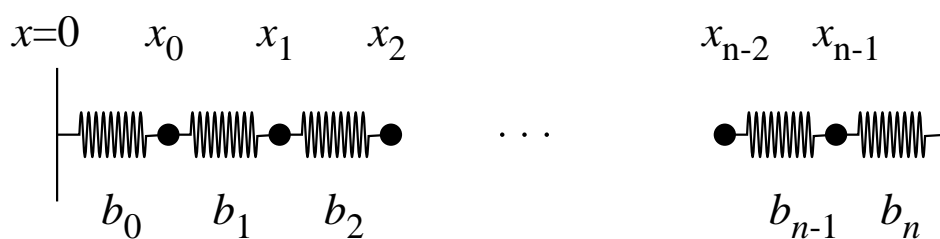


図 1  $n$  粒子の連成振動

授業で扱った 3 粒子の場合、その運動方程式は

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 y_0}{dt^2} &= -k(2y_0 - y_1) \\ m \frac{d^2 y_1}{dt^2} &= -k(-y_0 + 2y_1 - y_2) \\ m \frac{d^2 y_2}{dt^2} &= -k(-y_1 + 2y_2) \end{aligned} \quad (1.2)$$

と記述されます。

課題 1 3 粒子の場合について、変数  $y_i$  に対して、その速度を  $v_i$  とするとき、式 (1.2) に対応した一階連立微分方程式を示しなさい。

## 1.2 クラス設計

課題 2 準備として、

<http://aoba.cc.saga-u.ac.jp/lecture/ModelingAndSimulation/javasrc/DifferentialEquation/coupledOscillators.zip>

をダウンロードし、解凍したものを `DifferentialEquation` プロジェクトの `src` の下に置きなさい。`coupledOscillators` というパッケージになっていることを確認しなさい。

ダウンロードしたファイル中にある連成振動のクラスが `CoupledOscillators` です。課題 1 によって、3 粒子からなる連成振動は 6 変数の一階連立微分方程式として記述することができます。例えば、6 個の変数をクラスフィールドの配列 `double y[]` に保存することにしましょう。粒子  $i$  の変位  $y_i$  が  $2i$  番目に、速度  $v_i$  が  $2i + 1$  番目に入ります。

$y_0 \rightarrow y[0]$

$v_0 \rightarrow y[1]$

$y_1 \rightarrow y[2]$

$v_1 \rightarrow y[3]$

$y_2 \rightarrow y[4]$

$v_2 \rightarrow y[5]$

この割り当て方は、少し考えれば理解できますが、唯一の方法ではありません。従って、クラスの内部にとどめていた方が良いでしょう。

クラスの外部から、初期値を設定する、あるいは結果を取り出すには、各振動子の位置  $y_i$  と速度  $v_i$  が組になっているほうが理解し易くなります。そこで、そのためのクラスを定義します (クラス `Oscillator`)。

### 1.3 $n$ 粒子

一般の  $n$  粒子の連成振動は、行列を使って表現することができます。

$$M_{ij} = \begin{cases} 2 & i = j \\ -1 & j = i \pm 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (1.3)$$

とすると、微分方程式は

$$m \frac{d^2 y_i}{dt^2} = -k \sum_{j=0}^{n-1} M_{ij} y_j \quad (1.4)$$

となります。

**課題 3** 式 (1.4) について、左端 ( $i = 0$ )、中間 ( $0 < i < n - 1$ )、及び右端 ( $i = n - 1$ ) の三つ場合について、右辺を具体的に表現しなさい。つまり、行列  $M$  を用いずに表現しなさい。

クラス `CoupledOscillators` のコンストラクタでは、クラス `Oscillator` の配列によって、初期値を与え、パラメタ  $k$  と  $b$  を与えることで初期化を行っています。

**課題 4** 配布ファイルでは、コンストラクタの中で、微分方程式の記述が一部しか行われていません。 $i = 0$  の振動子と  $i = n - 1$  の振動子の部分は、記述していますが、 $0 < i < n - 1$  の分がありません。この部分を記述しなさい。

クラス `CoupledOscillators` の `main()` では、3 粒子の場合について、

$$x_0 = 1, v_0 = 0, x_1 = 2, v_1 = 0, x_2 = -1, v_2 = 0$$

を初期値とするシミュレーションを行うように記述されています。

ソースコード 1.1 3 粒子の連成振動の様子を図示する `coupledOscillators.plt`。  
記号 `\` は、行が見かけ上改行していても、続いていることを示している。`u` は `using` の略。

```
1
2 set terminal png 28
3 set xlabel "t"
4 set ylabel "x"
5 set yrange [0:40]
6 set xrange [0:40]
7 set xtic 10
8 set ytic 10
9 set output "CoupledOscillators-output.png"
10
11 plot "CoupledOscillators-output.txt" u 1:2 notitle,\
12 "CoupledOscillators-output.txt" u 1:3 notitle,\
13 "CoupledOscillators-output.txt" u 1:4 notitle
```

**課題 5** 実際にクラス `CoupledOscillators` を実行し、その結果を `Program1.1` を使って作図しなさい。

## 2 動画の作成

簡単に動画を作成できるツールとして `Processing` があります。芸術家やデザイナーを対象として開発されているため、非常に容易に動画を作成できます。また、Java クラスを利用することができるため、Java で作成したシミュレーションプログラムの結果を動画として表示することができるようになります。

### 2.1 準備

**課題 6** 先日配布した `processing-3.3.5.zip` をドキュメントディレクトリに展開します。`processing-3.3.5\processing.exe` があることを確かめなさい。

### 2.2 簡単な例

`Processing` 単独で簡単な動画を作成しよう。動画は二つの基本的メソッドによって行うことができます。第一は初期化で、`setup()` メソッドに記述します。描画領域 (`canvas`)

の大きさ、毎秒の画面更新などを設定します。実際の描画は `draw()` メソッドで行います。例として、でたらめ位置にでたらめな色の円を描くことにします。

**課題 7** `processing-3.3.5\processing.exe` を起動し、ソースファイル 2.1 を作成し、動作させなさい。メニューからソースファイルを保存すると、ドキュメントディレクトリの下に `processing\test\test.pde` として保存される。

ソースコード 2.1 簡単な processing スクリプト `test.pde`

```
1 void setup(){
2   size(800,800);//canvas size
3   smooth();//drawing object smoothly
4   frameRate(3);//1 frame par second
5   background(200,240,200);//background color
6 }
7
8 void draw(){
9   background(200,240,200);//clear canvas
10  //setting position
11  float x = (float)(600*Math.random());
12  float y = (float)(600*Math.random());
13  //setting color
14  int r = (int)(256*Math.random());
15  int g = (int)(256*Math.random());
16  int b = (int)(256*Math.random());
17  fill(r,g,b);
18  //draw ellipse
19  ellipse(100+x,700-y,50.,50.);
20 }
```

**課題 8** エクスプローラーを開き、`test.pde` にマウスを合わせて、「プログラムから開く」を選び、`processing.exe` と関係付けなさい。関係付けが完了すると、ファイル `test.pde` のアイコンをダブルクリックすることで `processing.exe` を起動することができるようになる。

## 2.3 連成振動

**課題 9** ドキュメントディレクトリの下に `processing\CoupledOscillators` フォルダを作り、

`http://aoba.cc.saga-u.ac.jp/lecture/ModelingAndSimulation/  
javasrc/DifferentialEquation/CoupledOscillators.pde`

をダウンロードして置きます。このファイルをダブルクリックして起動すると、エラーが出ます。そこで、「スケッチ」→「ファイルを追加」で、`DifferentialEquation.jar` 及び `MyLib.jar` を追加します。動作させると、三つの連成した振動子の動きが示されます。