

6. 連成振動

2018/11/12

1 連成振動

1.1 問題設定

質量 m の n 個の粒子が、自然長 b 、ばね定数 k のばねによって長さ $b(n+1)$ の空間に連結されているとします。 i 番目の粒子の位置 x_i に対して、その粒子の平衡位置からのずれは

$$y_i = x_i - (i+1)b \quad (1.1)$$

と表されます (図 1)。

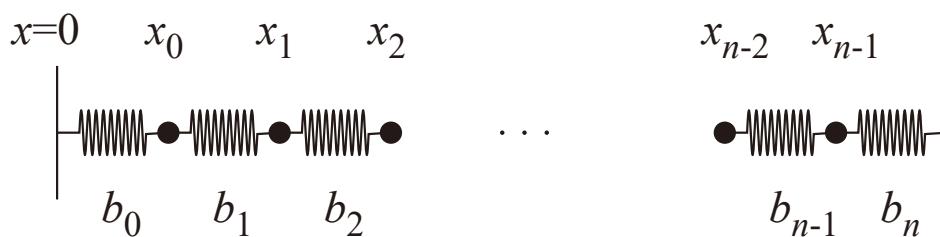


図 1 n 粒子の連成振動

授業で扱った 3 粒子の場合、その運動方程式は

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 y_0}{dt^2} &= -k(2y_0 - y_1) \\ m \frac{d^2 y_1}{dt^2} &= -k(-y_0 + 2y_1 - y_2) \\ m \frac{d^2 y_2}{dt^2} &= -k(-y_1 + 2y_2) \end{aligned} \quad (1.2)$$

と記述されます。

課題 1 3 粒子の場合について、変数 y_i に対して、その速度を v_i とするとき、式 (1.2) に対応した一階連立微分方程式を示しなさい。

1.2 クラス設計

課題 2 準備として、

<http://aoba.cc.saga-u.ac.jp/lecture/ModelingAndSimulation/javasrc/DifferentialEquation/coupledOscillators.zip>

をダウンロードし、解凍したものを `DifferentialEquation` プロジェクトの `src` の下に置きなさい。`coupledOscillators` というパッケージになっていることを確認しなさい。

ダウンロードしたファイル中にある連成振動のクラスが `CoupledOscillators` です。課題 1 によって、3 粒子からなる連成振動は 6 変数の一階連立微分方程式として記述することができます。例えば、6 個の変数をクラスフィールドの配列 `double y[]` に保存することにしましょう。粒子 i の変位 y_i が $2i$ 番目に、速度 v_i が $2i + 1$ 番目に入ります。

$$\begin{aligned}y_0 &\rightarrow y[0] \\v_0 &\rightarrow y[1] \\y_1 &\rightarrow y[2] \\v_1 &\rightarrow y[3] \\y_2 &\rightarrow y[4] \\v_2 &\rightarrow y[5]\end{aligned}$$

この割り当て方は、少し考えれば理解できますが、唯一の方法ではありません。従って、クラスの内部にとどめていた方が良いでしょう。

クラスの外部から、初期値を設定する、あるいは結果を取り出すには、各振動子の位置 y_i と速度 v_i が組になっているほうが理解し易くなります。そこで、そのためのクラスを定義します (クラス `Oscillator`)。

1.3 n 粒子

一般の n 粒子の連成振動は、行列を使って表現することができます。

$$M_{ij} = \begin{cases} 2 & i = j \\ -1 & j = i \pm 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (1.3)$$

とすると、微分方程式は

$$m \frac{d^2 y_i}{dt^2} = -k \sum_{j=0}^{n-1} M_{ij} y_j \quad (1.4)$$

となります。

課題 3 式 (1.4) について、左端 ($i = 0$)、中間 ($0 < i < n - 1$)、及び右端 ($i = n - 1$) の三つ場合について、右辺を具体的に表現しなさい。つまり、行列 M を用いずに表現しなさい。

クラス `CoupledOscillators` のコンストラクタでは、クラス `Oscillator` の配列によって、初期値を与え、パラメタ k と b を与えることで初期化を行っています。ただし $m = 1$ です。

クラス `CoupledOscillators` の `main()` では、3 粒子の場合について、パラメタを $k = 1$ 、 $b = 10$ とし

$$x_0 = 1, v_0 = 0, x_1 = 2, v_1 = 0, x_2 = -1, v_2 = 0$$

を初期値とするシミュレーションを行うように記述されています。

ソースコード 1.1 3 粒子の連成振動の様子を図示する `coupledOscillators.plt`。
記号 `\` は、行が見かけ上改行していても、続いていることを示している。`u` は `using`
の略。

```
1 set terminal pdfcairo enhanced color size 29cm,20cm font "Times-New-Roman"  
   fontscale 1.2  
2 set xlabel "{/:Italic}_t}"  
3 set ylabel "{/:Italic}_x}"  
4 set yrange [0:40]  
5 set xrange [0:40]  
6 set xtic 10  
7 set ytic 10  
8 set output "CoupledOscillators-output.pdf"  
9  
10 plot "CoupledOscillators-output.txt" u 1:2 notitle,\  
11 "CoupledOscillators-output.txt" u 1:3 notitle,\  
12 "CoupledOscillators-output.txt" u 1:4 notitle
```

課題 4 実際にクラス `CoupledOscillators` を実行し、その結果を `Program1.1` を使っ
て作図しなさい。

1.4 gnuplot コマンドの補足

クラス `CoupledOscillators` の `main()` では、 (t, y_0, y_1, y_2) をスペース区切りでファ
イルへ出力しています。gnuplot では、このようなファイルから、どの部分を使って 2 次
元のグラフを描くかを指定することができます。

ソースファイル 1.1 中の `plot` の部分に注目します。`u 1:2` とは、各行の最初の数値を
 x に、2 番目を y としてプロットすることを表しています。つまり (t, y_0) をプロットしま
す。次の `u 1:3` は (t, y_1) をプロットします。なお `u` は `using` の省略です。

また、`u 1:($3+5)` のように式を書くことが可能です。この場合には、 $(t, y_1 + 5)$ をプ
ロットします。

2 動画の作成

簡単に動画を作成できるツールとして `Processing` があります。芸術家やデザイナーを
対象として開発されているため、非常に容易に動画を作成できます。また、Java クラス
を利用することができるため、Java で作成したシミュレーションプログラムの結果を動
画として表示することができるようになります。

2.1 準備

課題 5 先日配布した `processing-3.4.zip` をドキュメントディレクトリに展開します。`processing-3.4\processing.exe` があることを確かめなさい。

2.2 連成振動

課題 6 ドキュメントディレクトリの下に `processing\CoupledOscillators` フォルダを作り、

`http://aoba.cc.saga-u.ac.jp/lecture/ModelingAndSimulation/javasrc/DifferentialEquation/CoupledOscillators.pde`

をダウンロードして置きます。

エクスプローラーを開き、`CoupledOscillators.pde` にマウスを合わせて、「プログラムから開く」を選び、`processing.exe` と関係付けなさい。関係付けが完了すると、ファイル `CoupledOscillators.pde` のアイコンをダブルクリックすることで `processing.exe` を起動することができるようになる。

このファイルをダブルクリックして起動すると、エラーが出ます。そこで、「スケッチ」→「ファイルを追加」で、`DifferentialEquation.jar` 及び `MyLib.jar` を追加します。動作させると、三つの連成した振動子の動きが示されます。