

7. 連成振動

2016/11/14

1 連成振動

1.1 問題設定

質量 m の n 個の粒子が、自然長 b 、ばね定数 k のばねによって長さ $b(n+1)$ の空間に連結されているとします。 i 番目の粒子の位置 x_i に対して、その粒子の平衡位置からのずれは

$$y_i = x_i - (i+1)b \quad (1.1)$$

と表されます (図 1)。

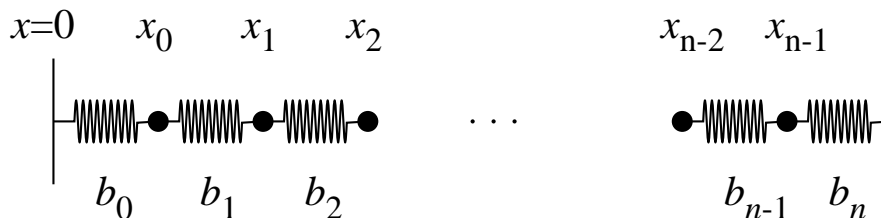


図 1: n 粒子の連成振動

授業で扱った 3 粒子の場合、その微分方程式は

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 y_0}{dt^2} &= -k(2y_0 - y_1) \\ m \frac{d^2 y_1}{dt^2} &= -k(-y_0 + 2y_1 - y_2) \\ m \frac{d^2 y_2}{dt^2} &= -k(-y_1 + 2y_2) \end{aligned} \quad (1.2)$$

と記述されます。

課題 1 3 粒子の場合について、変数 y_i に対して、その速度を v_i とするとき、一階連立微分方程式を示しなさい。

1.2 クラス設計

課題2 準備として、

<http://aoba.cc.saga-u.ac.jp/lecture/ModelingAndSimulation/javasrc/DifferentialEquation/coupledOscillators.zip>

をダウンロードし、解凍したものを DifferentialEquation プロジェクトの src の下に置きなさい。coupledOscillators というパッケージになっていることを確認しなさい。

ダウンロードした中にある連成振動のクラスが CoupledOscillators です。課題1によって、3粒子からなる連成振動は6変数の一階連立微分方程式として記述することができます。例えば、6個の変数をクラスフィールドの配列 double y[] に保存することにしましょう。

$$y_0 \rightarrow y[0]$$

$$v_0 \rightarrow y[1]$$

$$y_1 \rightarrow y[2]$$

$$v_1 \rightarrow y[3]$$

$$y_2 \rightarrow y[4]$$

$$v_2 \rightarrow y[5]$$

この割り当て方は、少し考えれば理解できますが、唯一の方法ではありません。従って、クラスの内部にとどめていた方が良いでしょう。

クラスの外部から、初期値を設定する、あるいは結果を取り出すには、各振動子の位置 y_i と速度 v_i が組になっているほうが理解し易くなります。そこで、そのためのクラスを定義します (クラス Oscillator)。

1.3 n 粒子

一般の n 粒子の連成振動は、行列を使って表現することができます。

$$M_{ij} = \begin{cases} 2 & i = j \\ -1 & j = i \pm 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (1.3)$$

とすると、微分方程式は

$$m \frac{d^2 y_i}{dt^2} = -k \sum_{j=0}^{n-1} M_{ij} y_j \quad (1.4)$$

となります。

課題3 式(1.4)について、 $i = 0$ 、 $0 < i < n - 1$ 、及び $i = n - 1$ の場合について、右辺を具体的に表現しなさい。つまり、行列 M を用いずに表現しなさい。

クラス `CoupledOscillators` のコンストラクタでは、クラス `Oscillator` の配列によって、初期値を与え、パラメタ k と b を与えることで初期化を行っています。

```
set terminal png 28
set xlabel "t"
set ylabel "x"
set yrange [0:40]
set xrange [0:40]
set xtic 10
set ytic 10
set output "CoupledOscillators-output.png"
b=10
lambda0=2
lambdaMinus=2-sqrt(2)
lambdaPlus=2+sqrt(2)

z0(x)=sqrt(2)*cos(sqrt(lambda0)*x)
zMinus(x)=sqrt(2)*cos(sqrt(lambdaMinus)*x)
zPlus(x)=-sqrt(2)*cos(sqrt(lambdaPlus)*x)

plot "CoupledOscillators-output.txt" u 1:2 notitle,\
"CoupledOscillators-output.txt" u 1:3 notitle,\
"CoupledOscillators-output.txt" u 1:4 notitle,\
b+(zMinus(x)+zPlus(x)+sqrt(2)*z0(x))/2 with line notitle
```

Program 1.1: 3粒子の連成振動の様子を図示する `coupledOscillators.plt`。記号 `\` は、行が見かけ上改行していても、続いていることを示している。

課題4 配布ファイルでは、コンストラクタの中で、微分方程式の記述が一部しか行われていません。 $i = 0$ の振動子と $i = n - 1$ の振動子の部分は、記述していますが、 $0 < i < n - 1$ の分がありません。この部分を記述しなさい。

クラス `CoupledOscillators` の `main()` では、3 粒子の場合について、

$$x_0 = 1, v_0 = 0, x_1 = 2, v_1 = 0, x_2 = -1, v_2 = 0$$

を初期値とするシミュレーションを行うように記述されています。

課題5 実際にクラス `CoupledOscillators` を実行し、その結果を `Program1.1` を使って作図しなさい。また、`Program1.1` は、3 個の粒子のうち、0 番の粒子の軌跡のみ、厳密解の曲線を描いています。他の 2 個の粒子の軌跡に対しても厳密解の曲線を描くようにしなさい。