

「モデリングとシミュレーション実験」課題1

締切:2016/11/21

1 非調和振動子

ばねの振幅が大きくなると、その変位に比例する力だけでなく、例えば変位の三乗に比例する力が生じることが予想される。そのような非線形項 (比例ではない項) がある振動子を非調和振動子と呼ぶ。例えば

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \lambda x^3 \quad (1.1)$$

という形を考えよう。

課題1 速度を $v = dx/dt$ とする。このとき、式 (1.1) を x と v の連立一階微分方程式として書き直しなさい。

課題2 Runge-Kutta法を用いて、式 (1.1) を数値的に解こう。HarmonicOscillator クラスをコピーして、NonlinearOscillator を作成し、そのコンストラクタに、式 (1.1) に対応した微分方程式を記述しなさい。その際に、パラメタ λ が増えていることに注意しなさい。

また、main() も適切に変更し、プログラムが動作することを確認しなさい。なお、初期条件は $x(0) = 0$ 、 $v(0) = 1$ としなさい。

式 (1.1) の厳密な解を得ることはできない。しかし、エネルギー保存則を用いると、運動の概形を知ることができる。式 (1.1) に対応した非調和振動子のエネルギーは

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{4}\lambda x^4 \quad (1.2)$$

であり、この値が保存する。

課題3 エネルギー (式 (1.2)) が保存すること、つまり $dE/dt = 0$ であることを示しなさい。

初期条件を $x(0) = 0$ 、 $v(0) = v_0$ とすると、時刻 $t = 0$ におけるエネルギーは

$$E_0 = \frac{1}{2}mv_0^2 \quad (1.3)$$

である。このエネルギーが保存することから、最大振幅 x_{\max} は、 $v = 0$ のときに実現し、

$$x_{\max}^2 = \frac{1}{\lambda} \left[-k + \sqrt{k^2 + 4\lambda E_0} \right] \quad (1.4)$$

となる。

課題 4 非調和振動子に対する数値計算の結果とともに、式 (1.4) で与えられる最大振幅を `gnuplot` を用いて図示しなさい。そのことにより、シミュレーションによって得られる振動の最大振幅が式 (1.4) で与えられることを確認しなさい。

2 レポート提出

レポートは以下のように記載し、締切日の実験の開始時に提出すること。

- A4 用紙片面に印刷して提出すること。最初のページの上部に学籍番号と氏名を記載すること。ホチキスで左上を綴じること。
- 課題に沿って、内容を記載すること。ただし、単に課題の答えを記載するだけでは不十分である。課題の記述・理解、方法なども課題に前後して記載することで、レポートそのもので問題設定から解決までが読み取れる形式とすること。
- 「考察」として、レポートを通じて得たことを記載すること。
- 正しい日本語または英語で記述すること。Word や \LaTeX などを使って、適切に組版すること。図も入れ込むこと。単なるテキストファイルの印刷は受け付けない。
- 作成したプログラム (今回は `NonlinearOscillator.java`) 及び `gnuplot` スクリプトも提出すること。プログラムは、レポートの Word や \LaTeX などとともに組版しても良いし、単独で印刷しても良い。
- 他人のプログラム、レポートを写したと判断される場合には、0 点とする。